数理解析研究所講究録
第491巻 1983年 1-13

Fourier 解析における Martingales

山形大 工 渡利千波
(Chinami Watari)

§1. 序. Martingales の理論の歴史は, Fourier 解析の歴史にくらべてはるかに浅く, Fourier解析をモデルとしながら発展して来た一面をもっている。他方, 出発点においては完全に Fourier解析に所属する結果と見られているものが, 実は Martingale 論に所属すると見る方が落ち着きのよいことがある.
ここでは, この種の結果の例として, 古典的な2つの定理

I. Paley による Walsh-Fourier 級数の分解定理

II. L^1-関数の Calderon-Zygmund 分解

について述べる。この両者の関係は, いわゆる「Fourier解析における実関数的方法」が整備される過程で明らかになって来たが, Martingale 理論の立場から「明示的に」論じている文献はあまり見当らないようである。あるいは, すでに空気のような存在になってしまっているのであろうか。筆者にはまだそうなっているとは思われないが.

§2. Paley の分解定理. R. E. A. C. Paley は, J. E. Littlewood と共同で, いわゆる Littlewood-Paley 理論を建設するかたわら, Walsh 関数系に関する Fourier 級数論

(以下WFSの理論という)の L^p-theory $(p>1)$ を作った。これを紹介するには、技術的になるが、Walsh関数の定義から始めねばならない。

Rademacher関数系 $\{\phi_n(x)\}$ $n=0,1,2,\cdots$

$$\phi_0(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq x \quad 1/2 \\ -1 & 1/2 \leqq x < 1 \end{cases} \qquad \phi_0(x+1) = \phi_0(x)$$

$$\phi_n(x) = \phi_0(2^n x) \qquad [0,1) \text{ 上の}$$

で定義される関数系をいう。これは正規直交系であるが完備ではない。この直交性が確率論でいう独立性に起因していることは注目に値する。

Paley の定義による Walsh 関数系 $\{\psi_n(x)\}_{n=0,1,2\cdots}$ は次のようなものである。

$\psi_0(x) \equiv 1$

$n \geqq 1$ に対しては、その2進法展開を考えて

$$n = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \cdots + 2^{n_r} \qquad n_1 > n_2 > \cdots > n_r \geqq 0$$

とするとき

$$\psi_n(x) = \phi_{n_1}(x)\,\phi_{n_2}(x) \cdots \phi_{n_r}(x).$$

$\{\psi_n(x)\}$ が ± 1 という値のみをとる正規直交系であることは容易に見られる。$f \in L^1(0,1)$ を

$$c_n = \int_0^1 f(t)\,\psi_n(t)\,dt \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x)$$

と Fourier展開すると，その部分和 $s_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \psi_\nu(x)$ は

$$s_n(x) = \int_0^1 f(t)\, D_n(x,t)\, dt \qquad D_n(x,t) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \psi_\nu(x)\psi_\nu(t)$$

で与えられる。とくに $n = 2^m$ に対しては

$$D_{2^m}(x,t) = \prod_{j=0}^{m-1} \left(1 + \phi_j(x)\phi_j(t)\right) = \begin{cases} 2^m & [0, 2^{-m}) \\ 0 & [2^{-m}, 1) \end{cases}$$

が成立するから，$s_{2^m}(x) \to f(x)$ a.e. であり，$\{\psi_n\}$ は完備な正規直交系である。

f から S_{2^m} を作る操作は，条件つき期待値を作ることに他ならず，$\{S_{2^m}\}$ は Martingale をなしている。今日の目で見れば，Martingale 論との関連が出発点においてすでに認められることになる。

さて，Paley の分解定理は次のように述べられる。

定理 1. ある $p > 1$ に対して $f \in L^p(0,1)$ とする。

$s_{2^{m+1}}(x) - s_{2^m}(x) = \delta_m(x)$ とおくとき

$$\Delta(x) = \left(|c_0|^2 + \sum_{m=1}^{\infty} |\delta_m(x)|^2\right)^{1/2}$$

$$\Delta^*(x) = c_0 \phi_0(\theta) + \sum_{m=1}^{\infty} \phi_m(\theta)\, \delta_m(x)$$

は，いずれも $f(x)$ と「ほぼ大きさが等しい」，つまり

(1) $$\int_0^1 \Delta(x)^p\, dx \leqq A_p \int_0^1 |f(x)|^p\, dx \leqq A_p \int_0^1 \Delta(x)^p\, dx$$

(2) $$\int_0^1 |\Delta^*(x)|^p\, dx \leqq A_p \int_0^1 |f(x)|^p\, dx \leqq A_p \int_0^1 |\Delta^*(x)|^p\, dx$$

ここで A_p は p だけで定まり f に無関係な定数をあらわすが、場所によって異なることがある。

この定理を証明するに当って、Paley は $p=2k$ の場合に $\Delta(x)^{2k}$ の積分を直接計算して (1) の左半分を出し、Khintchine の不等式で (2) に移り、M. Riesz の補間定理を用いて一般の $p\geqq 2$ の場合の左半分を出し、双対性で (2) の右半を出し、Khintchine の不等式で (1) の右半を出す、という手順をとっている。ここでは、Marcinkiewicz の補間定理を利用する。

第1段 $p=2$ のとき。Fourier 解析の立場では Bessel の不等式ないし Parseval の等式であり、Martingale の立場では Martingale difference の級数の直交性による。

第2段 $p=1$ のとき。この場合には、定理の結論自体は成立しないが、その代用品ともいえる「弱い評価」が得られる。この評価のために、II の Calderon-Zygmund 分解が有効であるが、後述することにして、結果は

(3) $\mathrm{meas}\{x : \Delta(x) > y\} \leqq \dfrac{3}{y}\|f\|_1$ （Δ^*も同様）

となる。

第3段（Marcinkiewicz の補間定理の特殊な形）

T が、可積分関数を可測関数にうつす作用素で、

$$|T(f+g)(x)| \leqq |Tf(x)| + |Tg(x)|$$

$$|T(cf)(x)| = |c|\,|Tf(x)|$$

$$\|Tf\|_2 \leqq A\|f\|_2 \qquad \mathrm{meas}\{x : |(Tf)(x)| > y\} \leqq \frac{A}{y}\|f\|_1$$

をみたしていれば，$1 < p \leqq 2$ に対して定数 A_p が定まり

$$\|Tf\|_p \leqq A_p \|f\|_p.$$

とくに，(1)，(2) の左半分は，$1 < p \leqq 2$ に対して成立する。

第4段（Khintchine の不等式）　$0 < p < \infty$ に対し

$$\Big(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2\Big)^{p/2} \leqq A_p \int_0^1 \Big|\sum_{m=0}^{\infty} c_m \phi_m(\theta)\Big|^p d\theta \leqq A_p \Big(\sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2\Big)^{p/2}$$

通常は p を偶数として中央項を展開して証明されるが，第2段を仮定すれば，次のような証明も可能である。収束性に関する煩雑さを避けるため，有限和と考えて論ずる。

$f(\theta) = \sum_{m=0}^{N} c_m \phi_m(\theta)$ とすると $\Delta(\theta) = \Big(\sum_{m=0}^{N} |c_m|^2\Big)^{1/2} = \|f\|_2$

である。これは定数（正と考えてよい）だから $y < \|f\|_2$ に対して（たとえば $y = \frac{3}{4}\|f\|_2$ とせよ）

$$1 = \mathrm{meas}\{\theta : \Delta(\theta) > y\} \leqq 4\|f\|_1 / \|f\|_2$$

つまり $\|f\|_2 \leqq 4\|f\|_1$ である。$p < 2$ を2に近くとって，$\alpha = \frac{2}{p} - 1$，$\beta = 2 - \frac{2}{p}$ とおくと $\alpha > 0$，$\beta > 0$ $\alpha + \beta = 1$ で（$\beta p' = \beta \cdot \frac{p}{p-1} = 2$ に注意）

$$\int_0^1 |f(\theta)| d\theta \leqq \Big(\int_0^1 |f(\theta)|^{\alpha p} d\theta\Big)^{1/p} \Big(\int_0^1 |f(\theta)|^{\beta p'} d\theta\Big)^{1/p'}$$

から $\Big(\sum_{m=0}^{N} |c_m|^2\Big)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p'}} \leqq 4\Big(\int_0^1 |f(\theta)|^{2-p} d\theta\Big)^{1/p}$ が出る。

これが左半分である。右半分はWalsh多項式が$L^{p'}$で稠密なことを用いて、dualityで得られる。

オ5段　Paleyの定理の(1), (2)は同値である。

$\delta_n(x)$を$\phi_n(\theta)$の係数と見て、Khintchineの不等式による。

オ6段　(2)の左半は、$1<p<\infty$に対して成立する。

オ3段と、dualityによる。

オ7段　(2)の右半が$1<p<\infty$に対して成立する。

有限和の場合を考えれば十分である。$\Delta^*(x)$に、もう一度fからΔ^*を作った操作を施すと$f(x)$に戻るから左半に帰着する。

これで、オ2段を仮定してはいるが、Paleyの定理の証明が一段落した。

§3. Calderon-Zygmund分解

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$を確率空間とし、$\mathcal{F}$はatomic σ-fieldの増加列$\{\mathcal{F}_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$によって張られているとする。$\{\mathcal{F}_n\}$は、次のような意味で"regular"であると仮定する。$(\mathcal{F}_0=\{\Omega, \phi\})$

$$\exists C>0: \ A\in\mathcal{F}_n,\ B\in\mathcal{F}_{n-1}\ \text{atoms}\ A\subset B$$
$$\Rightarrow P(B)\leq C\,P(A)$$

典型的な例としては、$\Omega=[0,1)$、$\mathcal{F}$はBorel sets全体、$\mathcal{F}_n$はΩを逐次2分して得られる分割から生成される

σ-field が考えられる。 Ωとして $\mathbb{R}^d$ の単位立方体をとり、2等分割である。 $C = 2^d$ ととればよい。

定理2（Calderon-Zygmund 分解）

$f \in L^1$ と $y > \|f\|_1$ を与えるとき、f は次のように分解できる。

(i) $f = g + b \qquad b = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n(i)} b_{ij}$

(ii) b_{ij} は $\mathcal{F}_i$-atom A_{ij} の外では 0 で、

$$y \sum_{i,j} P(A_{ij}) \leqq \|f\|_1$$

(iii) $\sum_{i,j} \|b_{ij}\|_1 \leqq 2\|f\|_1$

(iv) $E(b_{ij}) = \int_{A_{ij}} b_{ij} \, dP = 0$

(v) $\|g\|_1 \leqq \|f\|_1$

(vi) $\|g\|_\infty \leqq Cy$ 　（C は "regularity constant"）

証明　Calderon-Zygmund の原証明は、次のように読み直すことができる。

$h_n = E[\,|f| \mid \mathcal{F}_n]$ とおいて、Martingale $\{h_n\}$ を作る。 $\tau = \inf\{n : h_n > y\}$ とおくと τ は1つの stopping time である（すなわち、$(\tau = n)$ という事象は $\mathcal{F}_n$ 可測であるという事実が、すべての n に対して成立する）。

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_n \quad \forall n\}$$

は $\mathcal{F}$ の sub-σ-field をなしている。とくに $(\tau = n)$

という事象は（もちろん $\mathcal{F}_n$ 可測であるが）$\mathcal{F}_\tau$ 可測でもある。

補題　$A \in \mathcal{F}_\tau \vee \mathcal{F}_n$ ならば $A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_n$

実際，示すべきことは2つあって

a)　$A \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_n$　（$\mathcal{F}_\tau$ の定義の一部）

b)　$A \in \mathcal{F}_n \Rightarrow A \cap (\tau = n) \in \mathcal{F}_n$

b) の結論は $\{A \cap (\tau = n)\} \cap (\tau = k) \in \mathcal{F}_k$　($\forall k$) にほかならないが，$n = k$ であればこれは自明で，$n \neq k$ であれば空集合 $\phi \in \mathcal{F}_k$ からやはり成立する。

系1. 集合族 $\mathcal{G}$ と集合 B において次の記法を用いる。

$$\mathcal{G} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathcal{G}\}$$

このとき　$\mathcal{F}_\tau \cap (\tau = n) = \mathcal{F}_n \cap (\tau = n)$

系2.　$E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1_{(\tau = n)} = E[f \mid \mathcal{F}_n]\, 1_{(\tau = n)}$

実際，条件つき期待値の性質から，左辺は

$$E[f 1_{(\tau = n)} \mid \mathcal{F}_\tau] = E[f 1_{(\tau = n)} \mid \mathcal{F}_\tau \cap (\tau = n)]$$

に等しいから，これに系1を適用すればよい。

定理2の証明に戻る。　$g = E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1_{(\tau < \infty)} + f 1_{(\tau = \infty)}$ とおき，$b = f - g = \{f - E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\}\, 1_{(\tau < \infty)}$ とおく。

$$(\tau < \infty) = \bigcup_{i=0}^{\infty} (\tau = i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{n(i)} A_{ij}$$

（$(\tau = 0) = \phi$　($y > \|f\|_1$ だから) に注意，A_{ij} は $\mathcal{F}_i$-atom）

と分解して　$b_{ij} = b\, 1_{A_{ij}}$　とおくと (i) は成立している。

(ii) は $\quad y\, P(\tau=n) \leqq \int_{(\tau=n)} h_n \, dP = \int_{(\tau=n)} |f| \, dP$ を n についてかき合わせて $y\, P(\tau<\infty) \leqq \|f\|_1$ から得られる。

(iii) は $\quad \sum_{i,j} |b_{ij}| \leqq |f| + E[\,|f| \mid \mathcal{F}_\tau]$ からでる。

(iv) : 補題の系2から

$$E[h \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1_{(\tau=i)} = E[h \mid \mathcal{F}_i]\, 1_{(\tau=i)}$$ が成立し,

$$E[b_{ij} \mid \mathcal{F}_i] = E[f \mid \mathcal{F}_i]\, 1_{A_{ij}} - E[\,E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1_{A_{ij}} \mid \mathcal{F}_i]$$
$$= 0$$ であるから

$$E[b_{ij}] = E[\,E[b_{ij} \mid \mathcal{F}_i]\,] = 0$$

(v) は g の作り方から直接に得られる.

(vi) をだすために $\{\mathcal{F}_n\}$ の "regularity" が必要になっている。

$(\tau=\infty)$ 上では $|f| \leqq \lambda$ であるから, $(\tau<\infty)$ 上で考えればよい. $(\tau=i)$ 上では

$$g = g\, 1_{(\tau=i)} = E[f \mid \mathcal{F}_\tau]\, 1_{(\tau=i)} = E[f \mid \mathcal{F}_i]\, 1_{(\tau=i)}$$

であり, $\mathcal{F}_i$ - atom $A_{ij} = A$ の上では (B : $\mathcal{F}_{i-1}$ atom, $\supset A$)

$$|g| \leqq \frac{1}{P(A)} \int_A |f| \, dP \leqq \frac{1}{P(A)} \int_B |f| \, dP \leqq \frac{C}{P(B)} \int_B |f| \, dP$$

$$= C\, h_{i-1} \leqq C\lambda$$

これで証明が完了する。

定理1の第2段に戻る。 $\Omega = [0,1)$ とし, $\mathcal{F}_n$ は Ω を逐次に2等分して得られる sub σ-field とする。 $\mathcal{F} = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ は Borel sets 全体である. $f \in L^1$, $y > \|f\|_1$ を与えるとき $\{h_n\}$, τ を定理2の証明のように定める.

$f=g+b$ に対応して, g, b から Δ, Δ^* に相当するものが作れるが それらを Δ_g, Δ_g^* ; Δ_b, Δ_b^* と書くことにする。 Minkowski の不等式あるいは直接評価で

$$\Delta \leqq \Delta_g + \Delta_b \qquad |\Delta^*| \leqq |\Delta_g^*| + |\Delta_b^*|$$

が得られる. Δ, $|\Delta^*|$ についてはほぼ同様の評価が成立するから, 以下 Δ について論ずる。

$$\{x ; \Delta(x;f) > y\} \equiv (\Delta > y) \subset (\Delta_g + \Delta_b > y)$$
$$= \Big((\Delta_g+\Delta_b > y) \cap (\tau < \infty)\Big) \cup \Big((\Delta_g+\Delta_b > y) \cap (\tau = \infty)\Big)$$
$$\subset (\tau < \infty) \cup (\Delta_g > y)$$

が成立する。ここで

(*) $(\tau=\infty)$ 上では $\Delta_b = 0$

を一時仮定している。 Chebyshev の不等式と, 第1段と, (vi) (v) をこの順で利用して, $y > \|f\|_1$ のときは

$$\mathrm{meas}(\Delta_g > y) \leqq \frac{1}{y^2}\int_0^1 \Delta_g^2\,dx \leqq \frac{1}{y^2}\int_0^1 |g|^2\,dx$$
$$\leqq \frac{2}{y}\int_0^1 |g|\,dx \leqq \frac{2}{y}\|f\|_1$$

が得られるから, $\mathrm{meas}(\tau<\infty) \leqq \frac{1}{y}\|f\|_1$ とあわせて

$$\mathrm{meas}(\{x ; \Delta(x;f) > y\}) \leqq \frac{3}{y}\|f\|_1 \qquad (y > \|f\|_1)$$

が得られる. $y \leqq \|f\|_1$ に対しては, 左辺は1以下, 右辺は3以上となり trivial に成立する.

残っているのは (*) の験証である.

Δ_b は，$E[b|\mathcal{F}_n]$ の階差の平方和の平方根だから，$(\tau=\infty)$ 上で $E[b|\mathcal{F}_n]$ がすべて 0 であることを見ればよい。そのためには

$$b=(f-E[f|\mathcal{F}_\tau])1_{(\tau<\infty)}=\sum_{i=1}^{\infty}(f-E[f|\mathcal{F}_\tau])1_{(\tau=i)}$$

の右端辺の各項（$b^{(i)}$ とおく）について，$E[b^{(i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$ が 0 であればよい。さて，$i\leq n$ であれば

$$E[b^{(i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$$
$$=E[f1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}-E[E[f|\mathcal{F}_\tau]1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$$

右辺第2項は補題2を用いて $E[E[f|\mathcal{F}_i]1_{(\tau=i)}|\mathcal{F}_n]1_{(\tau=\infty)}$ と書けるから，第1項，第2項とも $1_{(\tau=i)}\cdot 1_{(\tau=\infty)}$ という因数をもつことになり，$0-0=0$ である。$i>n$ であれば，第1項はそのままで，第2項は $\mathcal{F}_n\subset\mathcal{F}_i$ から第1項と等しくなるから，やはり 0 である。これで(*)が示された。

定理1の証明もこれで完　している。

§4. 他の若干の場合について。Carlesonによる，L^2 関数のFourier級数の概収束の証明の途中にも，条件つき期待値が利用されている。この点に着目して，乗法的な直交関数系に対して，Martingale論を利用して収束問題を解決しようとしたSchippの研究があり，ある程度の成功はおさめているものの，2つの対象の大きさを比較する，という操作が

本質的に必要な段階があって，なかなかMartingale論の枠内には封じ込められない。劣調和性を利用することなしに，$\mathbb{R}^d$におけるH^pの理論を構成しようとする一連の試みの中にも，ある種のMartingaleが効果的に利用されている。現状ではまだ相当に不備であるが，Fourier解析のかなりの部分が，Martingale論の立場から見直しよく再編される可能性は，かなり大きいと思われる。

文献．Calderon-Zygmund分解は[1]で与えられた。Paley [2]の後半部にはあまり証明がなく「Fourier級数の場合と同様である」という記述が見られるが，いわゆるLittlewood-Paley理論として発展されたものは，複素関数論を利用する関係上，WFSに適用できない部分がかなりある。ただ，"real method"が整備されて，証明はされている。

△のL^1-評価を与えたのはYano[7]である。本稿での証明はほぼ[5]に従っているが，"regular" Martingaleを全面においた点では[6]というべきかもしれない。この条件は強すぎる嫌いがあるが，本質的に必要であることがUchiyama[3]で指摘されている。[4]はすぐれた総合報告である。F. Schippの研究はAnalysis Math.の初期の巻に出ている。Marcinkiewiczの補間定理の完全な形は[Z].

References

[1] A. P. Calderon - A. Zygmund, On existence of certain singular integrals, Acta Mathematica 88(1952), 85 - 139.

[2] R. E. A. C. Paley, A remakable system of orthogonal functions, Proc. London Math. Soc. (II), 34(1932), 241 - 279.

[3] A. Uchiyama, Weight functions on probability spaces, Tôhoku Math. J., 30(1978), 463 - 470.

[4] 内山明人, BMOについて, 数学 34(1982), 317 - 330.

[5] C. Watari, Mean convergence of Walsh-Fourier series, Tôhoku Math. J., 16(1964), 183 - 188.

[6] 渡利千波, Martingales の Calderon-Zygmund 分解とその応用. 実解析セミナー 1976

[7] S. Yano, On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series, Tôhoku Math. J. 11(1959), 191 - 215.

[Z] A. Zygmund, Trigonometric series, vol. II, pp. 112 et seq.