数理解析研究所講究録
第 491 巻 1983 年 25-35

確率論におけるBMO

秋田大教育　塩田安信
(Yasunobu Shiota)

John-Nirenbergにより導入されたBMO(bounded mean oscillation)の概念は，七十年初頭，Getoor-Sharpe，Garsiaらによってマルチンゲール理論に移入された。その後，この方面の研究は急速に進み今日に至っている。

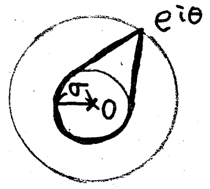
本稿ではBMO函数からBMOマルチンゲールがどのようにして構成されるかを，Getoor-Sharpeの論文に沿って解説する。それからBMOマルチンゲールの特徴付けに関する結果について述べる．

§1. H^p-function と H^p-martingale

1. u を harmonic function on $D=\{|z|<1\}$ とする。このとき $\exists_1$ harmonic conjugate $\tilde{u}$: $\tilde{u}(0)=0$ で $F=u+i\tilde{u}$ が analytic on D，となることは良く知られている。この u に対して non-tangential maximal function :

$$N_\sigma u(e^{i\theta}) \equiv \sup\{|u(z)| : z \in \Omega_\sigma(\theta)\}.$$

ここで $0<\sigma<1$, $e^{i\theta}\in\Gamma=\partial D$ で $\Omega_\sigma(\theta)$ は Stolz domain（下図）である。



$(B_t)_{t\geq 0}$, $B_0\equiv 0$ を，ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の complex B.M. とし，stopping time

$$\tau(\omega) \equiv \inf\{t>0 : |B_t(\omega)|=1\}$$

とする。このとき，u の Brownian maximal function

$$u^*(\omega) \equiv \sup\{|u(B_t(\omega))| : 0\leq t<\tau(\omega)\}.$$

analytic function F on D が H^p-function $(0<p<\infty)$ とは

$$\|F\|_{H^p} \equiv \sup_{r<1}\left[\int_0^{2\pi}|F(re^{i\theta})|^p dm(\theta)\right]^{1/p} < \infty$$

なること。ただし，$dm(\theta)$ は Γ 上の normalized Lebesgue measure.

2. Burkholder-Gundy-Silverstein (1971) の結果，u を harmonic on D とし，$F=u+i\tilde{u}$ とする。$0<\sigma<1$ なる各 σ および，$\forall\lambda>0$ に対して $^\exists$ const. c_σ, C_σ :

$$c_\sigma m\{e^{i\theta} : N_\sigma u(e^{i\theta})>\lambda\}$$
$$\leqq P\{\omega : u^*(\omega)>\lambda\} \leqq C_\sigma m\{e^{i\theta} : N_\sigma u(e^{i\theta})>\lambda\}.$$

このとき明かに

$$\|u^*\|_{L^p(\Omega)} \cong \|N_\sigma u\|_{L^p(\Gamma)}, \quad 0<p<\infty.$$

B-G-S は $N_\sigma u$ を u^* で置きかえて評価することにより

$\exists$ const. $c_{\sigma,p}, C_{\sigma,p}$:

(1) $\qquad c_{\sigma,p}\|N_\sigma u\|_{L^p(\Gamma)} \leqq \|F\|_{H^p} \leqq C_{\sigma,p}\|N_\sigma u\|_{L^p(\Gamma)}$, $0<p<\infty$

を導いた．即ち，

$$\|F\|_{H^p} \cong \|N_\sigma u\|_{L^p(\Gamma)} \cong \|u^*\|_{L^p(\Omega)}.$$

なお(1)で左側の不等式はHardy-Littlewoodにより，すでに示されており，右側についても $p>1$ のときはM. Rieszの定理から簡単に導くことができるということを注意しておく．

3．B-G-Sの結果をもとにして，H^p-functionからH^p-martingaleを導き出す．ただし p は $1\leqq p<\infty$ としておく．

$\widehat{B}_t \equiv B_{t\wedge\tau}$ (stopped B.M.)とし，$\mathcal{F}_t \equiv \sigma\{\widehat{B}_s : 0\leq s\leq t\}$ とする。$F=u+i\tilde{u}\in H^p$ に対して

$$X_t(\omega) \equiv u(\widehat{B}_t(\omega))$$

とおくと，Doobの良く知られた結果より $\{X_t ; t\geq 0\}$ は $\mathcal{F}_t$-martingaleとなり，さらにB-G-Sの結果を用いれば

(2) $\qquad X^*(\omega) \equiv \sup_{t\geq 0}|X_t(\omega)| \in L^p(\Omega)$

となることがわかる。また

$$X_t \longrightarrow X_\infty = \phi(B_\tau) \ \text{a.s.}, \quad \phi : u \text{ の boundary function}$$

で，特に

(3) $\qquad X_\infty$ は $\sigma\{B_\tau\}$-measurable

となる。

逆に $\{X_t, t\geq 0\}$ が(2)，(3)をみたす $\mathcal{F}_t$-martingale とすれば，

(3)より∃ real measurable function ϕ on Γ : $X_\infty = \phi(B_\tau)$, そして $X_\infty \in L^p(\Omega)$ より $\phi \in L^p(\Gamma)$ である。このとき

$$u(re^{i\theta}) \equiv \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\psi}) P(r, \theta-\psi)\, dm(\psi)$$

とすると，u は harmonic on D で $X_t = u(\widetilde{B}_t)$ となることが示せる。従って(2)より $u^* \in L^p(\Omega)$ で B-G-S の結果より $F \in H^p$ がわかる。

§2. BMO-function と BMO-martingale

1. $I \subset \Gamma$ を subarc とし，f を Γ 上の function とする。f の I 上での平均を

$$I(f) \equiv \frac{1}{m(I)} \int_I f\, dm$$

で定める。$f \in L^2(\Gamma)$ が BMO-function on Γ とは

(1) $\displaystyle \sup_{I \subset \Gamma} I(|f - I(f)|) < \infty$

をみたすこと。ただし sup は Γ のすべての subarc I について取る。(1)が任意の $p \geq 1$ に対して，条件

$$\sup_{I \subset \Gamma} I(|f - I(f)|^p) < \infty$$

と同値なことは John-Nirenberg の不等式

$$m\{e^{i\theta} \in I : |f(e^{i\theta}) - I(f)| > \lambda\} \leq m(I)\, e^{-c\lambda}$$

から導ける。BMO函数については Fefferman-Stein らによって詳細な研究がなされているが，それについては内山氏の講演録を参照して下さい。

2．f を BMO-function とする．

$$u(z) \equiv \int_0^{2\pi} f(e^{i\psi}) P(r, \theta-\psi) dm(\psi) \quad , \quad z = re^{i\theta} \in D$$

とし，$X_t \equiv u(\widetilde{B}_t)$ とおく。$f \in L^2(\Gamma)$ より $u + i\tilde{u} \in H^2$ で，前節のことより $\{X_t ; t \geq 0\}$ は $\mathcal{F}_t$ に関する H^2-martingale で

$$X_t \longrightarrow X_\infty = f(\widetilde{B}_\tau) \quad a.s. ,$$

(2) $\quad X_\infty$ は $\sigma\{B_\tau\}$-measurable で $X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t]$

が言える．さらに(1)については

(1)

$$\longleftrightarrow \sup_{z \in D} P((f - Pf(z))^2) < \infty$$

$$\longleftrightarrow \sup_{z \in D} E_z[(f(\widetilde{B}_\tau) - u(z))^2] < \infty \quad \text{（角谷の定理による）}$$

$$\longleftrightarrow \sup_{t \geq 0} \| E[(f(\widetilde{B}_\tau) - u(\widetilde{B}_t))^2 | \mathcal{F}_t] \|_\infty < \infty \quad \text{（強 Markov 性による）}$$

と同値変形ができる。即ち，

(3) $\quad \sup_{t \geq 0} \| E[(X_\infty - X_t)^2 | \mathcal{F}_t] \|_\infty < \infty$

が言える（詳細は Petersen の本を参照のこと）。

逆に，$\{X_t ; t \geq 0\}$ が(2)，(3)をみたす $\mathcal{F}_t$-martingale とすると上の変形が同値なことより，$\exists$ BMO-function f on Γ : $X_\infty = f(\widetilde{B}_\tau)$ 従って $X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t] = u(\widetilde{B}_t)$ が言えるから，Γ 上の BMO-function 全体と(2)，(3)をみたす $\mathcal{F}_t$-martingale の間には一対一の対応が存在する。

§3. BMO-martingale（一般の場合）

1．§1,2で得られた結果を基にして，一般の確率空間においてH^pおよびBMO-martingaleを定義する．

・$(\Omega, \mathcal{F}, P)$：complete probability spaceとし，$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$を$\mathcal{F}$のsub-σ-fieldの右連続増大列で$\mathcal{F}=\bigvee_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$なるものとする。

・unif. integrable martingale $X=(X_t)$のpathは一般に，右連続で左極限をもつ。また$X=(X_t)$とそのterminal r. v. $X_\infty \in L^1(\Omega)$を同一視する．

・Tで$\mathcal{F}_t$-stopping timeを表わす。

unif. integrable martingale $X=(X_t)$がBMO-martingaleとは

$$\|X\|_{BMO} \equiv \sup_T \| E[|X_\infty - X_{T-}| \,|\, \mathcal{F}_T]\|_\infty < \infty$$

なること。BMO-martingale全体をBMOで表わす．定数だけ異なる二つのBMO-martingaleを同一視すれば，BMOは$\| \ \|_{BMO}$でnormed spaceとなる。

2．BMO-martingaleに関する諸結果．

(a) John-Nirenberg型の不等式．$\alpha < 1/8\|X\|_{BMO}$ならば

$$\sup_T \| E[\exp \alpha |X_\infty - X_{T-}| \,|\, \mathcal{F}_T]\|_\infty < \infty .$$

(b) (a)より$\forall p>1$に対して

$$\|X\|_{BMO} \cong \|X\|_{BMO,p} \equiv \sup_T \| E[|X_\infty - X_{T-}|^p \,|\, \mathcal{F}_T]^{1/p}\|_\infty$$

が導ける。$p=2$のときこの右辺は連続なmartingaleに対して§2,(3)式と一致する．

(c) Herz-Lepingle 表現. $X \in BMO$ とする. このとき, non-adapted process $B=(B_t)$(必ずしも一意でない)が存在して

i) $\int_0^\infty |dB_s| \leqq C$ for some const. C,

ii) $X_\infty = A_\infty$, ここで A は B の dual optional projection.

(d) 双対定理. $H^1 \equiv \{$unif. integrable martingale $X=(X_t)$: $\|X\|_{H^1} \equiv E[X^*] < \infty\}$ とすると

$$(H^1)^* \cong BMO.$$

従って BMO が Banach space ということもわかる。

3. 上の(c)で用いられた dual optional projection について説明しよう. 詳しいことは Dellacherie-Meyer の本を参照のこと.

(a) H を bounded measurable process とすると $\exists_1$ optional process ${}^oH$:

$${}^oH_T I_{\{T<\infty\}} = E[H_T I_{\{T<\infty\}} \mid \mathcal{F}_T] \quad \text{for every } T.$$

${}^oH$ を H の optional projection という。

(b) $B=(B_t)$: process of integrable variation (non-adapted) に対して

$$\mu(H) \equiv E\left[\int_0^\infty H_s dB_s\right] \quad , \ H : \text{bdd. meas. proc.}$$

とすると, μ は $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \times \mathcal{F})$ 上の bounded signed measure で evanescent set を charge しない.

逆にこのような measure μ が与えられたとき $\exists_1$ process of integrable variation $B=(B_t)$ で, μ は上の形に表わせる.

(c) μ に associate した process $B=(B_t)$ が adapted

$$\longleftrightarrow \mu({}^oH) = \mu(H) \quad , \ H : \text{bdd. meas. proc.}$$

(d) μ に associate した process を $B=(B_t)$ とする。このとき新たに measure μ^o を

$$\mu^o(H) \equiv \mu({}^oH) = E[\int_0^\infty {}^oH\, dB]$$

により定めると $\mu^o(H)=\mu^o({}^oH)$ だから (b), (c) より $\exists 1$ adapted process of integrable variation $A=(A_t)$: $\mu^o(H)=E[\int_0^\infty H\, dA]$.
この A を B の dual optional projection という。

§4. BLO-martingale と A_1-条件

1. unif. integ. mart. $Y=(Y_t)$ が BLO-martingale とは

$$\exists C>0 : Y_T - Y_\infty \leqq C, \ |\Delta Y_T| \leqq C \text{ a.s. for every } T$$

なること。BLO-mart. の全体を BLO で，positive BLO-mart. の全体を BLO_+ で表わす。

2. BLO に関する結果.

(a) $Y \in BLO$ with a const. C ならば $\|Y\|_{BMO} \leqq 3C$. $Y \in BLO$ でも $-Y \in BLO$ とは限らないから BLO は BMO の subspace ではない.

(b) $X \in BMO$

$$\longleftrightarrow \exists Y^1, Y^2 \in BLO_+ \text{ (必ずしも一意でない) } : X = Y^1 - Y^2.$$

以下 $(\mathcal{F}_t)_{t\geqq 0}$ は，すべての $\mathcal{F}_t$-martingale が連続となるものと仮定する。

(c) $X \in BMO \longrightarrow X^* \in BLO_+$.

(d) $Y \in BLO_+ \longrightarrow Y^* - Y_\infty \in L^\infty$,

$Y^* - Y_\infty \in L^\infty \longrightarrow Y \in BLO$.

(c), (d) より

(e) $Y \in BLO_+ \longrightarrow {}^\exists X \in BMO : Y_\infty = X^* + \text{bounded r.v.}$,

${}^\exists X \in BMO : Y_\infty = X^* + \text{bounded r.v.} \longrightarrow Y \in BLO$.

3. positive unif. integ. mart. $W = (W_t)$ が A_1-条件をみたす ($W \in A_1$) とは

$${}^\exists C > 0 : W_T \leqq C W_\infty \text{ a.s. for every } T.$$

S^+-条件をみたす($W \in S^+$)とは

$${}^\exists C > 0 : W_T \leqq C W_{T-} \text{ a.s. for every } T.$$

A_1-条件については実解析のときに対応して次のことが言える。

(a) (内山, Doléans-Dade and Meyer) $E[W_\infty] = 1$ とすれば, $Q \equiv W_\infty P$ は $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の p.m. このとき

$$W \in A_1 \longleftrightarrow \lambda Q(X^* \geqq \lambda) \leqq K E_Q[X_\infty] \quad \text{for every}$$

$$\text{positive unif. integ. mart } X, \ \lambda > 0.$$

(b) reverse Hölder inequality (Doléans-Dade and Meyer)

$W \in A_1 \cap S^+$ とすると

$${}^\exists \varepsilon, C > 0 : E[W_\infty^{1+\varepsilon} | \mathcal{F}_T] \leqq C W_T^{1+\varepsilon} \text{ a.s. for every } T.$$

(b)はもっと弱い仮定の下で言える。詳しいことは D.-M. の論文を見よ.

A_1-条件は次のことよりBLOと結びつけられる.

(c) $Y \in BLO_+ \longleftrightarrow W_t = E[\exp \alpha Y_\infty | \mathcal{F}_t]\ (\geqq 1) \in A_1 \cap S^+$

for some $\alpha > 0$.

$W \geqq 1$ の条件を除けば $Y \in BLO$.

(d) $W(\geqq 1) \in A_1 \cap S^+$ とすると

$0 < {}^\exists \delta < 1$, ${}^\exists$ unif. integ. mart. $M(\geqq 1)$, $E[(M^*)^\delta | \mathcal{F}_t] \in S^+$,

${}^\exists H \in L^\infty$, $0 < c_1 \leqq H \leqq 1$: $W_\infty = (M^*)^\delta H$.

逆も $W \geqq 1$ を除いて成り立つ.

(c),(d) より

(e) $Y \in BLO_+$ とすると

${}^\exists$ const. $a > 0$, ${}^\exists$ unif. integ. mart $M(\geqq 1)$,

$E[(M^*)^\delta | \mathcal{F}_t] \in S^+$ for some $0 < \delta < 1$, ${}^\exists H \in L^\infty_+$:

$Y_\infty = a \log M^* + H$

逆に, $Y_\infty = a \log M^* + H$ で a, M, H が上の条件をみたすならば $Y \in BLO$.

参考文献

1. C. Bennett, Another characterization of BLO, Proc. of A.M.S. 85, 552-556
2. Burkholder, Gundy and Silverstein, A maximal function characterization of the class H^p, Trans. A.M.S. 157, 137-153

3. Coifman and Rochberg. Another characterization of BMO, Proc. of A.M.S. 79, 249-254.

4. Dellacherie et Meyer, Probabilites et Potentiels II, Herman, Paris.

5. Doléans-Dade and Meyer, Inégalites de normes avec poids, Sem. de Proba. XIII, L.N. in Math. 721, 313-331

6. Garia, Martingale inequalities: Seminar note on recent progress, Benjamin

7. Getoor and Sharpe, Conformal martingales, Inventiones Math. 16, 271-308

8. 風巻, マルチンゲールの理論, 確率論セミナー

9. Petersen, Brownian motion, Hardy spaces and bounded mean oscillation, Cambridge Univ. press

10. Shiota, Certain decompositions of BMO-martingales, Tohoku Math. J. 33, 561-565

11. Uchiyama, Weight functions on probability spaces, Tohoku Math. J. 30, 463-470

12. Varopoulos, The Helson-Szegö Theorem and Ap-Functions for Brownian motion and Several variables, J. of Funct. Analy. 39, 85-121