数理解析研究所講究録
第 491 巻 1983 年 87-106

関数環とmartingale

早大理工　新井　仁之　(Hitoshi Arai)
早大教育　和田　淳蔵　(Junzo Wada)

本講演では、前半で、N. Th. Varopoulos ([9]) が定義した正則(holomorphic) martingaleからなるH^p空間について、関数環論に関連した最近までの結果を紹介しながら、いくつかの注意を与える。また、H^∞が＊弱極大でないことを証明する。後半では、H^pの理論を2-parameter の場合に拡張することを試みる。

§1　正則martingaleからなるH^p空間

$(x_1(t))_{t\geq 0}, \cdots, (x_m(t))_{t\geq 0}$; $(y_1(t))_{t\geq 0}, \cdots, (y_m(t))_{t\geq 0}$

を確率空間$(\Omega;\mathcal{F};P)$ で定義された$2m$個の独立な1次元Brown運動で、$x_j(0)=y_j(0)=0$ (a.s. $1\leq j\leq m$)となっているものとする。

$\mathcal{F}_t \equiv \sigma[x_j(s), y_j(s) : 1\leq j\leq m; 0\leq s\leq t]$ $(t\geq 0)$

とし、$\sigma[\mathcal{F}_t : t\geq 0]=\mathcal{F}$ を仮定しておく。

$Z_j \equiv x_j+iy_j$; $\bar{Z}_j \equiv x_j-iy_j$ $(1\leq j\leq m)$

とする。このとき、組 $(\Omega;\mathfrak{F};\mathfrak{F}_t\ t\geq 0;P)$, $Z_1,\cdots,Z_m$ を B_{2m}-空間という。$(\Omega;\bar{\mathfrak{F}};\bar{P})$ を $(\Omega;\mathfrak{F};P)$ の完備化とし、$\bar{\mathfrak{F}}_t \equiv \mathfrak{F}_t \vee \{\bar{P}$-零集合$\}$ $(t\geq 0)$ とする。$\bar{\mathfrak{F}} = \vee_t \bar{\mathfrak{F}}_t$ である。

$\bar{\mathfrak{F}}_t$ に適合した(resp. 局所) martingale を、ここでは、$\mathbb{B}_{2m}$-(resp. 局所) martingale ということにする。

$\mathcal{L}_2^{loc} \equiv \{(\alpha_s):(\alpha_s)$ は、$\bar{\mathfrak{F}}_t$ に適合した可測過程で、任意の $t>0$ に対して、確率 1 で、$\int_0^t |\alpha_s|^2 ds<\infty$ が成り立つ。$\}$

とおく。(X_t) が正則(resp. 局所) martingale であるとは、(X_t) が $\mathbb{B}_{2m}$-(resp. 局所) martingale で、かつ、次の (1.1) をみたすことである。

(1.1) $\exists \alpha_j \in \mathcal{L}_2^{loc}\quad (1\leq j\leq m):\ X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dZ_j$

今後、$X\in L^1 (\equiv L^1(\bar{\mathfrak{F}}))$ に対し X_t で、$E[X|\bar{\mathfrak{F}}_t]$ を表わす。$(t\geq 0)$

$H^p (\equiv H^p(\bar{\mathfrak{F}})) \equiv \{X\in L^p : (X_t)$ は正則 martingale$\}$ $(1\leq p\leq\infty)$

とする。

(注意 1 : (X_t) が正則局所 martingale で、$X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^1$ をみたすとする。停止時間列 $\{\sigma_n\}$ が存在して、$\sigma_n<\infty$, $\sigma_n \uparrow \infty$ a.s. かつ $(X_{t\wedge\sigma_n})_t$ は L^2 martingale になる。$|X_{t\wedge\sigma_n}|\leq X^*$ より、$\{X_{t\wedge\sigma_n}\}_{t,n}$ は一様可積で、$\lim_n E|X_{t\wedge\sigma_n} - X_t| = 0$ である。これと $E[X_{t\wedge\sigma_n}|\bar{\mathfrak{F}}_s] = X_s\ (t>s)$ より、$E[X_t|\bar{\mathfrak{F}}_s] = X_s$ となる。ゆえに、(X_t) は、一様可積 martingale になる。ゆえに $X_\infty \in H^1$ である。)

(X_t) が 2 乗可積分 $\mathbb{B}_{2m}$-martingale のとき

$\exists_1\, \alpha_j, \beta_j \in \mathcal{L}_2 \equiv \{\gamma \in \mathcal{L}_2^{loc} : E[\int_0^t |\gamma|^2 ds] < \infty\ (\forall t \geq 0)\}\ (1 \leq j \leq m)$

s. t. $X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dy_j \quad (t \geq 0)$

が成り立つ。([11]参照) そこで、

$HX_t \equiv -\sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dy_j \quad (t \geq 0)$

とする。すると、$(X_t + iHX_t)$ は正則martingaleになり、さらに、$E|X_t - X_0|^2 = E[\sum_{j=1}^m \int_0^t (|\alpha_j|^2 + |\beta_j|^2) ds]\ (t \geq 0)$ (L^2恒等式) より、$\|HX_t\|_{L^2(あ)} = \|X_t - X_0\|_{L^2(あ)}$ となる。特に (X_t) が L^2有界なら、$X_\infty + iHX_\infty \in H^2$ となる。この H をHilbert 変換という。

ところで、一様可積な$\mathbb{B}_{2m}$_martingale (X_t) は、

(1.2) $X_t = X_0 + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j dx_j + \sum_{j=1}^m \int_0^t \beta_j dy_j \quad (\alpha_j, \beta_j \in \mathcal{L}_2^{loc}; 1 \leq j \leq m)$

と表わすことができるので、形式的には、HX_∞ を定義できる。しかし、$X + iHX_\infty \in H^1$ となる保障はない。これに関して、次の定理がある。

<u>定理1.1.</u> ([9]Th3.2) $X \in L^1$ のとき、1), 2) は同値である。

1) $X + iHX_\infty \in H^1$ 2) $X^* \equiv \sup_t |X_t| \in L^1$

証明 (2)⇒1)) X_t が (1.2) で表わされているとする。[3] の (2.2) より、$E[\sup_{t \leq s} |HX_t|] \leq c_1 E[\langle HX, HX \rangle_s^{\frac{1}{2}}] = c_1 E[\langle X - X_0, X - X_0 \rangle_s^{\frac{1}{2}}] \leq c_1 C_1 (E[X^*] + E[|X_0|]) < \infty \quad (\forall s \geq 0)$ 。ゆえに、(注意1)より、$X + iHX_\infty \in H^1$ となる。(1)⇒2)) $Z_t = X_t + iHX_t$ とおく。Z_t は、[3]のConformal martingaleゆえ、1) と[3](6.3) より、

$E[X^*] \leq 4E[|Z_\infty|] < \infty$ となる。∎

§2 正則martingaleと解析関数との合成定理

[9] Lemma 3.1 を、次の形に修正しておく

<u>定理2.1.</u> $X_1, \cdots, X_n \in H^1$ とする。Dを$\mathbb{C}^n$内の領域で、$P\{\forall t \geq 0 : (X_1(t), \cdots, X_n(t)) \in D\} = 1$ とする。

φ を$\mathbb{C}^n$上でC^2級で、かつD上で解析的な関数とする。このとき、(1) $Z_t \equiv \varphi(X_1(t), \cdots, X_n(t))$ は、正則局所martingaleである。(2) $Z^* \in L^1$ ならば、$Z_\infty \in H^1$ である。(3) $X_j \in H^\infty$ $(1 \leq j \leq n)$ ならば、$Z_\infty \in H^\infty$ である。

証明 $X_k(t) = X_k(0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_j^{(k)} dZ_j$ $(k = 1, \cdots, n)$ とする。$F_t = (X_1(t), \cdots, X_n(t))$ とおく。伊藤の公式から、
$\varphi(F_t) = \varphi(F_0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial z_k}(F_s)\, \alpha_j^{(k)}(s)\, dZ_j(s)$ $(t \geq 0)$ と表わせるから、$(\varphi(F_t))$ は、正則局所martingaleである。$Z^* \in L^1$ のとき、(注意1)より、(Z_t) は一様可積なmartingaleであるから、$\varphi(F_t) = \varphi(F)_t$ $(t \geq 0)$ となる。ゆえに、$Z_\infty \in H^1$ である。$X_j \in H^\infty$ $(1 \leq j \leq n)$ のときは、$\frac{\partial \varphi}{\partial z_k}$ が、$\{F_s(\omega) : 0 \leq s \leq \infty, \omega \in \Omega\} \subset \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq \sum_{j=1}^n \|X_j\|_{L^\infty}\}$ で有界であるから、(Z_t) は正則martingaleになる。$\varphi(F) \in L^\infty$ より、$Z_\infty \in H^\infty$ である。■

(注：[9]との違いは、$X_1, \cdots, X_n \in H^1$ の仮定の部分である。)

§3 H^pと関数環

次の定理は、今後の議論の基礎になる。

<u>定理3.1.</u> ([9]) (3.1) H^∞は、$L^\infty(\mathcal{F})$の部分環をなす。すな

わち、H^∞は複素線型空間で、$\forall X, Y \in H^\infty : XY \in H^\infty$ をみたす。

(3.2) H^∞は、$L^\infty(\mathfrak{F})$で、*弱閉である。

(3.3) $H^\infty \ni 1$

(3.4) $\forall X, Y \in H^\infty : E(XY) = E(X)E(Y)$

(3.5) H^2は、$L^2(\mathfrak{F})$ノルム閉である。

(3.6) H^pの元は、H^∞の元で$L^p(\mathfrak{F})$ノルム近似できる。$(1 \leq p < \infty)$

(3.7) $\forall \Phi \in \mathrm{Re}\, L^\infty(\mathfrak{F}),\ \exists \phi \in (H^\infty)^{-1} : \log|\phi| = \Phi$

(ただし、$(H^\infty)^{-1} \equiv \{f \in H^\infty : \exists g \in H^\infty \text{ s.t. } fg = 1\}$ とする。)

証明 (3.3) は明らか。(3.1), (3.4) は定理2.1 による。(3.5) はL^2恒等式(3ページ参照) による。$H^\infty = H^2 \cap L^\infty$ と (3.5) 及び Krein_Smulian の結果([1]) より (3.2) が出る。$X \in H^p$ $(1 \leq p < \infty)$ をとる。$T_n = \inf\{t : |X_t| > n\}$ とすると、$|X_{T_n}| \leq n$ で、$X_{T_n} = X_0 + \int_0^t \chi_{(T_n > s)} dX_s$ となるから、$X_{T_n} \in H^\infty$である。[3] の (6.3) と lebesgue の優収束定理より、(3.6) がわかる。(3.7) については、$\phi_t \equiv \exp[\Phi_t + iH\Phi_t]$ とおけば、$\sup_t |\phi_t| \leq \exp\|\phi\|_{L^\infty} + 1$ であるから、定理2.1 (2) よりϕが求めるものである。■

定理3.1 の結果は、関数環論では、非常に重要な性質とされている。このことをみるため、ここで、関数環の一般論に少し触れることにする。しかし、一口に関数環といっても、その種類は、たくさんある。ここでは、H^∞をとらえるのに有効であると思われる*弱Dirichlet 環について述べる。

―＊弱Dirichlet 環と H^p ―

$(X;\mathcal{A};\mu)$を任意の確率空間とする。Aを$L^\infty(\mathcal{A})$の部分集合とする。Aが次の(＊1)～(＊4)をみたすとき、Aを＊弱Dirichlet環という。

(＊1) Aは、$L^\infty(\mathcal{A})$の部分環をなす。　(＊2)　$A \ni 1$

(＊3) $\forall f, g \in A$: $\int fg\,d\mu = \int f\,d\mu \int g\,d\mu$

(＊4) $A+\bar{A}$は、$L^\infty(\mathcal{A})$で＊弱稠密である。ただし、$\bar{A} \equiv \{\bar{f} : f \in A\}$ で、$\bar{\ }$は複素共役を表わす記号とする。

関数族Bに対し、$[B]_p$という記号で、$p=\infty$のときは、Bの$L^\infty(\mathcal{A})$での＊弱閉包を表わし、$0<p<\infty$のときは、Bの$L^p(\mathcal{A})$ノルム閉包を表わすことにする。

定理3.2 (Srinivasan-Wang，[8] 定理5.6.1 参照)

Aが＊弱Dirichlet環であるための必要十分条件は、Aが(＊1),(＊2),(＊3) 及び (＊4′) $\forall u \in \mathrm{Re}\,L^\infty(\mathcal{A}), \exists f \in [A]_\infty^{-1} : \log|f| = u$ の条件をみたすことである。

(3.2) より、$[H^\infty]_\infty = H^\infty$となる。定理3.1と定理3.2から、$H^\infty$は＊弱Dirichlet環になることがわかる。

ここで、H^∞の＊弱Dirichlet性を使って、次のことを証明する。

定理3.3　$[H^\infty]_p = H^p$　$(1 \leq p < \infty)$

証明　B_2空間で証明する。B_{2m}空間でも、以下の議論を形

式的に拡張すればよい。$[H^\infty]_p \supset H^p$ は、定理3.1 による。ここでは、"$H^\infty \ni X^{(n)}, E|X^{(n)}-X|^p \to 0\ (n\to\infty) \Rightarrow X \in H^p$ " を示す。

$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha dx_1 + \int_0^t \beta dy_1$ $(\alpha, \beta \in \mathcal{L}_2^{loc})$ とおける。$\sigma_n \equiv \inf\{t: \int_0^t |\alpha|^2 ds \geqq n\} \wedge n$, $\tau_n \equiv \inf\{t: \int_0^t |\beta|^2 ds \geqq n\} \wedge n$, $T_n \equiv \inf\{t: |X_t| \geqq n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ とおく。$\lim_{n\to\infty} E|X_{T_N}^{(n)} - X_{T_N}|^p = 0$ と $X_{T_N}^{(n)} \in H^\infty$ より、$X_{T_N} \in [H^\infty]_p \cap L^\infty(\mathcal{F})$ である。H^∞ は、＊弱 Dirichlet 環であるから、[8](5.2.11) より、$[H^\infty]_p \cap L^\infty(\mathcal{F}) = H^\infty$ となる。ゆえに、$X_{T_N} \in H^\infty$ である。$(N \in \mathbb{N})$ 従って、$X_{T_N \wedge t} = X_0 + \int_0^t \gamma^{(N)} dz_1$ $(\gamma^{(N)} \in \mathcal{L}_2)$ $(N \in \mathbb{N})$ とおける。伊藤表現の一意性と、$\sigma_n \to \infty$, $\tau_n \to \infty$, $T_n \to \infty$ $(n \to \infty,\ a.s.)$ とから、$X_t = X_0 + \int_0^t \alpha dz_1$ となることがわかる。よって、$X \in H^p$ である。■

さて、一般に、A が＊弱 Dirichlet 環のとき、$[A]_p$ は、単位円周 $\mathbb{T}$ 上の古典的 Hardy 空間 $H^p(\mathbb{T})$ の妥当な抽象化としてよく知られている。実際、$\mathbb{T}$ 上で成り立っている多くの重要な定理、たとえば、不変部分空間定理、因数分解定理、Szegö の定理、Helson-Szegö の定理 etc. は＊弱 Dirichlet 環にまでは一般化できている。そのほか、Jensen の公式 "$\forall f \in [A]_1 : \log|\int f d\mu| \leqq \int \log|f| d\mu$" も成り立っている。([8], [5] 参照) 従って、関数環論を通すことによって、H^∞ も今述べた一連の定理をみたすことがわかる。

ここで問題とすることは、$H^\infty(\mathbb{T})$ で成り立っていながら、

一般の$[A]_\infty$がみたすとは限らないような性質を、H^∞がもっているか、ということである。このような問題となる性質として、たとえば、次の3つのものがあげられる。

コロナ定理、　解析構造、　＊弱極大性

結論からいえば、H^∞は、コロナ定理をみたし([9])、解析構造をもたず([2])、＊弱極大になっていない（筆者）。

定理3.4（コロナ定理，[9]）$f_1, \cdots, f_n \in H^\infty$が、ある定数$\delta > 0$に対して、$\sum_{j=1}^{n} |E[f_j | \mathcal{F}_t]| \geqq \delta \ (\forall t \geqq 0)$ a.s. をみたすとき、適当な$g_1, \cdots, g_n \in H^\infty$をとって、$\sum_{j=1}^{n} f_j g_j = 1$とできる。

証明　[9]での構成法を紹介する。まず、B_2空間で考える。以下、$dG = \beta dZ_1$のときβをG'で表わす。$K_{ij} \equiv \bar{f}_i \bar{f}_j' - \bar{f}_j \bar{f}_i'$とし、$F \equiv (f_1, \cdots, f_n)$, $u_{ij}^{(0)}(t) \equiv \int_0^t K_{ij}/|F|^4 d\bar{Z}_1 - \int_0^t 4\langle \bar{F} \cdot F' \rangle K_{ij}/|F|^6 ds$とおく。

$u_{ij}^{(0)} = u_{ij}^{(0)}(\infty) = \lim_{t \to \infty} u_{ij}^{(0)}(t) \in BMO(\mathcal{F})$だから、$L(\varphi) \equiv E[u_{ij}^{(0)} \varphi]$ $(\varphi \in H^1)$とすると、定理1.1とFeffermanの双対定理より、$L \in (H^1)^*$である。Lに、Hahn-Banachの定理とRieszの表現定理を適用して、$E[u_{ij}^{(0)} \varphi] = E[v_{ij} \varphi]$ $(\varphi \in H^1)$なる$v_{ij} \in L^\infty$の存在がわかる。任意の$\varphi \in H^1$に対し、$E[(u_{ij}^{(0)} - v_{ij}) \varphi] = 0$だから、$u_{ij}^{(0)} - v_{ij} \in H^2$となる。$\lambda_{ij} \equiv (u_{ij}^{(0)} - v_{ij})'$とおく。そこで、$\ell_i^{(1)} \equiv (\bar{f}_i/|F|^2) + \sum_{j=1}^{n} (u_{ij}^{(0)} + \int \lambda_{ij} dZ_1) f_j$とおくと、伊藤の公式から、$\ell_i^{(1)} \in H^2 \cap L^\infty = H^\infty$かつ$\sum_{i=1}^{n} f_i \ell_i = 1$となる。$B_{2m}$空間でも、同様に構成できる。

(解析構造)　これについては、[2] を参照。

(＊弱極大性)　$[A]_\infty$ が $L^\infty(\mathcal{A})$ で＊弱極大であるとは、

$[A]_\infty \subsetneqq B \subsetneqq L^\infty(\mathcal{A})$ となるような＊弱閉環 B が存在しないことである。A が＊弱 Dirichlet 環のとき、次の Muhly の定理は重要である。

<u>定理3.5</u>　([1] P152 参照)

A が＊弱 Dirichlet 環のとき、1), 2) は同値である。

1) $[A]_\infty$ は＊弱極大である。　2) $\forall f \in [A]_\infty : \mu(f=0)>0 \Rightarrow \mu(f=0)=1$

このMuhly の定理を使って、次のことを証明する。

<u>定理3.6</u>　H^∞ は、＊弱極大ではない。

証明　$T \equiv \inf\{t : |Z_1(t)| \geq 1\}$ とおく。$P(T>r)>0$ かつ $P(T<r)>0$ となる正数 r をとり固定する。(このような r の存在は、Brown 運動の性質から容易に証明できる。) そこで、

$$\alpha(s,\omega) \equiv \begin{cases} 0 & (0 \leq s < r) \\ 1 & (r \leq s) \end{cases} \qquad \omega \in \Omega$$

とおき、$X_t \equiv \int_0^t \alpha dZ_1$ とおく。$X_{T\wedge t} = \int_0^t \chi_{(T>s)}\alpha(s)dZ_1(s)$ だから、$(X_{T\wedge t})_t$ は正則martingale である。確率積分の計算で、$|X_T| \leq 2$ a.s. がわかるから、$X_T \in H^\infty$ である。さらに、

$$P(X_T=0) \geq P(T<r) > 0, \qquad P(X_T \neq 0) \geq P(T>r) > 0$$

となっていることもわかる。よって、定理3.5 より、H^∞ は、＊弱極大にはなっていない。■

§4 2-parameter 正則martingaleと関数環

$(\Omega_j;\mathfrak{F}^j;\mathfrak{F}^j_t\ t\geq 0;P^j)$, Z_j を§1で定義したB_2空間とし、$\bar{\mathfrak{F}}^j$, $\bar{P}^j$, $\bar{\mathfrak{F}}^j_t$ も§1で定めたものとする。$(j=1,2)$

$(\Omega;\mathbb{F};P)$を直積測度空間 $(\Omega_1\times\Omega_2;\bar{\mathfrak{F}}^1\times\bar{\mathfrak{F}}^2;\bar{P}^1\times\bar{P}^2)$の完備化とし、$\mathfrak{F}_{st}\equiv(\bar{\mathfrak{F}}^1_s\times\bar{\mathfrak{F}}^2_t)\vee\{P\text{零集合}\}$ $(s,t\geq 0)$とする。

2-parameter の確率過程 $(X_{st})_{(s,t)\in[0,\infty]^2}$ が

(4.1) $\forall s\in[0,\infty]$: $(X_{st})_t$ が $\bar{\mathfrak{F}}^2_t$ に関して正則martingale.

(4.2) $\forall t\in[0,\infty]$: $(X_{st})_s$ が $\bar{\mathfrak{F}}^1_s$ に関して正則martingale.

の２条件をみたすとき、(X_{st}) を、ここでは、正則な確率過程ということにする。

$X\in L^1(\mathbb{F})$に対して、X_{st} で、$E[X|\mathfrak{F}_{st}]$を表わすことにする。

$1\leq p\leq\infty$ に対して、

$H^p(\mathbb{F})\equiv\{X\in L^p(\mathbb{F}):(X_{st})$ は正則な確率過程 $\}$

とおく。$H^p(\mathbb{F})\ni X$ のとき、(X_{st}) は $\mathfrak{F}_{st}$ に適合したmartingaleであるので、(X_{st})をH^p正則martingaleと呼ぶことにする。

(注：$H^2(\mathbb{F})\ni X$ のとき、(X_{st})は、ある$\Phi\in\Lambda^2$ ([7] 参照) で、

$X_{st}=X_{s0}+X_{0t}-X_{00}+\int_0^s\int_0^t\Phi\,dz_2dz_1$ とかける。しかし、このことは、以下の議論に関する限り、必要ではない。)

1-parameter の正則martingaleを 2-parameter の場合に拡張するということも、Varopoulosによってなされたが、Varopoulosの2-parameter 正則martingaleの定義では、C^∞性

を仮定していて、1-parameter のときのように関数環として取り扱っていない。われわれは、この Varopoulos の定義から C^∞ 性を除いたものを H^p 正則 martingale と定義して、関数環論の枠組みの中で、いろいろと考察していく。

各 parameter ごとに、1-parameter のときの結果（定理 3.1，定理 3.3，Jensen の公式（7ページ参照））をくり返し適用すれば、次のことが証明できる。

定理4.1　(4.3) $H^\infty(\mathbb{F})$ は、$L^\infty(\mathbb{F})$ の＊弱閉な部分環をなす。

(4.4) $H^\infty(\mathbb{F}) \ni 1$

(4.5) $\forall X, Y \in H^\infty(\mathbb{F})$: $E[XY]=E[X]E[Y]$　（ただし、$E[\cdot]$ は P に関する積分を表わすものとする。）

(4.6) $H^p(\mathbb{F})$ は、$L^p(\mathbb{F})$ ノルム閉である。

(4.7) $\forall X \in H^1(\mathbb{F})$: $\log|X_{oo}| = \log|E[X]| \leqq E[\log|X|]$

証明　(4.7) を証明する。7ページでも述べたように、$\forall X \in H^1(\mathfrak{F}^j)$: $\log|E_j[X]| \leqq E_j[\log|X|]$ $(j=1,2)$ が成り立つ。ただし、$E_j[\cdot]$ は P^j に関する積分を表わすものとする。

任意の $X \in H^1(\mathbb{F})$ をとる。$X_{oo}=0$ の場合は明らかであるから、$X_{oo} \neq 0$ の場合を示す。$X_{oo} \neq 0$ のとき

$$\infty > E[|X|] \geqq E_2E_1[\log|X|] \geqq E_2[\log|E_1[X]|]$$
$$= E_2[\log|X_{o\infty}|] \geqq \log|E_2[X_{o\infty}]| = \log|X_{oo}| > -\infty$$

よって、Fubini の定理より、　$\log|E[X]| = \log|X_{oo}|$

$\leqq E[\log|X|]$ となる。■

(注：(4.4) から、$[H^\infty(\mathbb{F})]_p \subset H^p(\mathbb{F})$ であることがわかる。$[H^\infty(\mathbb{F})]_p = H^p(\mathbb{F})$ は、まだ証明できていない。)

ここで、定理4.1 の関数環論的な意味を述べる。$H^\infty(\mathbb{F})$ は＊弱Dirichlet 環になっていないので（§6参照）、今度は、König の H^p 空間論を使う。

— König の Hardy 空間論と $H^p(\mathbb{F})$ —

$(X;\mathcal{A};\mu)$ を任意の確率空間とする。(H,μ) が次の(★1)〜(★3)をみたすとき、(H,μ) を Hardy algebra situation という。

(★1)　H は、$L^\infty(\mathcal{A})$ の＊弱閉な部分環をなす。

(★2)　$H \ni 1$

(★3)　$\forall f, g \in H$ ： $\int fg\,d\mu = \int f\,d\mu \int g\,d\mu$

また、さらに

(★4)　$\forall f \in H$ ： $\log|\int f\,d\mu| \leqq \int \log|f|\,d\mu$

をみたすとき、μ は Jensen測度であるという。

(注：定理4.1 より、$(H^\infty(\mathbb{F}), P)$ は、Hardy algebra situation で、かつ P は Jensen測度になっている。)

次に、König の理論で良く使われる記号を導入する。

$L(\mathcal{A}) \equiv \{f \mid f$ は $\mathcal{A}$_可測関数$\}$

$$H^\#(\mathcal{A}) \equiv \{f \in L(\mathcal{A}) \mid (\exists u_n \in H)(\|u_n\|_{L^\infty} \leqq 1, \lim_{n\to\infty} u_n = 1 \ (a.s.) \ \& \ u_n f \in H \ (n=1,2,\cdots))\}$$

$E(\mathcal{A}) \equiv \{u \in \mathrm{Re}L(\mathcal{A}) \mid (\exists v \in \mathrm{Re}L(\mathcal{A}))(\forall t \in \mathbb{R}:$

$\exp t[u+iv] \in H^{\#}(\mathcal{A})\ )\}$

$H^{\#}$は、$\mathbb{T}$上のH^p空間論で重要な、Nevanlinna族からつくられるN^+の抽象化である。また、Eは、$\mathbb{T}$上の共役可能な関数からなる集合をモデルにしている。実際、上の記号で、vはuの、ある意味で、共役関数になっていると考えられる。ただし、vは、このままだと一意的に定まらないので、次の定理によって一意化しておく。

定理4.2 ([1]) $\forall u \in E(\mathcal{A}), \exists_1 v \in \mathrm{Re}L(\mathcal{A}), \forall t \in \mathbb{R}$:
$\exp t[u+iv] \in H^{\#}(\mathcal{A})$ & $\int \exp t[u+iv]d\mu = \exp t\alpha(u)$

ただし、$\alpha(f) \equiv \inf\{-\log|\int f d\mu| : g \in H, -\log|g| \geqq f\}$とする。

この定理で定まったvを$^*u$と書き、uの共役関数という。

$E^\infty(\mathcal{A}) \equiv E(\mathcal{A}) \cap L^\infty(\mathcal{A})$ とおく。次の定理は、§5で使う。

定理4.3 (抽象的H^p空間でのM.Rieszの不等式，[1])

(H, μ)をHardy algebra situationとし、μをJensen測度とする。$A_p \equiv \max[\tan(\frac{\pi}{2p}), \cot\mathrm{an}(\frac{\pi}{2p})]$とおく。このとき、

$\forall u \in E^\infty(\mathcal{A}): \quad \|{}^*u\|_{L^p} \leqq A_p\|u\|_{L^p} \qquad (1 \leqq p < \infty)$

が成り立つ。

Königの理論は、[1]に詳説されている。また[12]にも解説がある。詳しくは、それらを参照されたい。

この§の最後に、次の定理を証明する。

定理4.4　$X_1, \cdots, X_n \in H^1(\mathbb{F})$ とする。Dを$\mathbb{C}^n$内の領域で、$P\{\forall s,t \geq 0 : (X_1(s,t), \cdots, X_n(s,t)) \in D\} = 1$　とする。

φ を$\mathbb{C}^n$上でC^2級で、かつD上で解析的な関数とする。このとき、次のことが成り立つ。

(1)　$\sup_{s,t} |\varphi(X_1(s,t), \cdots, X_n(s,t))| \in L^1(\mathbb{F})$　ならば、

　$\varphi(X_1, \cdots, X_n) \in H^1(\mathbb{F})$

(2)　$X_j \in H^\infty(\mathbb{F})\ (1 \leq j \leq n)$　ならば、$\varphi(X_1, \cdots, X_n) \in H^\infty(\mathbb{F})$

証明　$M_{st} \equiv (X_1(s,t), \cdots, X_n(s,t))$ とおく。任意の $s \geq 0$ を固定する。定理2.1 より、$\varphi(M_{st}) = \varphi(M_{s\infty})_t$ $(t \geq 0)$ となるから (4.1) が成り立つ。(4.2) も同様にして成り立つ。

$E[\varphi(M) | \mathfrak{F}_{st}] = E_2[E_1[\varphi(M) | \mathfrak{F}^1_s] | \mathfrak{F}^2_t] = E_2[\varphi(M_{s\infty}) | \mathfrak{F}^2_t]$

$= \varphi(M_{st})$

よって、$\varphi(M) \in H^1(\mathbb{F})$ である。(2) は (1) より明らか。■

§5　正値な実部をもつH^1正則martingale

以下、$L^p(\mathbb{F})$ ノルムを $\|\cdot\|_p$ と表わすことにする。$(1 \leq p \leq \infty)$

まず、König の理論でよく使われるH^+を定義する。

$H^+ \equiv \{X \in L(\mathbb{F}) : \mathrm{Re}X \geq 0 \text{ a.s.} \ \&\ \exp(-tX) \in H^\infty(\mathbb{F})\ (\forall t \geq 0)\}$

命題5.1　$H^1(\mathbb{F}) \ni X$ が実数値なら、$X = E[X]$ a.s. である。

証明　(4.7) から、命題5.1 は、関数環論では自明なこととされている。その理由は、([8] 補題5.6.2 ：$g \in \mathrm{Re}L^1(\mathfrak{A})$ とする。$\exists \delta > 0, \forall t \in (-\delta, \delta) : \int \log|1 - tg| d\mu \geq 0 \Rightarrow g = 0$ a.s.) にあ

る。実際(4.7)より、$Y=X-E[X]$とおけば、任意の$t\in\mathbb{R}$に対し、$E[\log|1-tY|]\geqq\log|E[1-tY]|=0$であるから、$X=E[X]$ a.s. となる。■

次の補題は、以下の議論で重要である。

<u>補題5.2</u>　$X\in H^1(\mathbb{F}),\exp(X)\in L^\infty(\mathbb{F})\Rightarrow\exp(X)\in H^\infty(\mathbb{F})$

証明　$\mathrm{Re}\,X_{st}\leqq\log(\|\exp(X)\|_\infty+1)$であるから、$|\exp(X_{st})|\leqq\|\exp(X)\|_\infty+1<\infty$　よって、定理4.4より、$\exp(X)\in H^1(\mathbb{F})\cap L^\infty(\mathbb{F})=H^\infty(\mathbb{F})$となる。■

<u>補題5.3</u>　$X\in H^1(\mathbb{F}),\mathrm{Re}\,X\geqq 0$ a.s. $\Rightarrow$ $X\in H^+$

証明　任意の$t\geqq 0$に対して、$\exp(-tX)\in L^\infty(\mathbb{F})$であるから、補題5.2より、$X\in H^+$となる。■

さて、Logで対数関数の主値を表わすことにする。次のことが成り立つ。

<u>定理5.4</u>　$X\in H^1(\mathbb{F}),\mathrm{Re}\,X\geqq 0;X\neq 0$ a.s. $\Rightarrow$ $\mathrm{Log}\,X\in[H^\infty(\mathbb{F})]_1$

証明　補題5.3より、$X\in H^+$である。[1]p92より、

$\exists\{h_k\}_{k=1}^\infty\subset H^\infty(\mathbb{F}):\mathrm{Re}\,h_k\geqq 0,|X|\geqq|h_k|,\lim_{k\to\infty}h_k=X$ a.s.

が成り立つ。$X_n\equiv X+\frac{1}{n}$, $h_k^{(n)}\equiv h_k+\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbb{N})$とおく。すると、$\mathrm{Re}\,h_k^{(n)}\geqq\frac{1}{n}$, $|h_k^{(n)}|\leqq|X|+1$である。

$s_k^{(n)}\equiv\max(\|\mathrm{Re}\,h_k^{(n)}\|_\infty,\|\mathrm{Im}\,h_k^{(n)}\|_\infty)$, $\delta_n=\frac{1}{n}$とおくと、

$$\|h_k^{(n)}-([\delta_n+(s_k^{(n)})^2]/\delta_n)\|_\infty\leqq\sqrt{-2\delta_n+([\delta_n+(s_k^{(n)})^2]/\delta_n)^2}$$
$$<[\delta_n+(s_k^{(n)})^2]/\delta_n$$

となるから、関数論のRungeの一様近似定理より、

$\mathrm{Log}\,h_k^{(n)} \in \overline{H^\infty(\mathbb{F})}^{\|\cdot\|_\infty} = H^\infty(\mathbb{F})$ となる。

$|\mathrm{Log}\,h_k^{(n)}| \leqq \max(\log n,\ \log(|X|+1)) + \pi \quad (\forall n, k \in \mathbb{N})$

$|\mathrm{Log}\,X_n| \leqq \max(\log(|X|+1),\ |\log|X||) + \pi \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

である。また、(4.7) より、$\log|X| \in L^1(\mathbb{F})$ である。(実際、$E[X] \neq 0$ であり、かつ $E[|\log|X||] \leqq 2\|X\|_1 - \log|E[X]|$ である)

以上のことと、Lebesgueの優収束定理により、

$\mathrm{Log}\,X \in [H^\infty(\mathbb{F})]_1$ となる。■

<u>定理5.5</u>　$X \in H^1(\mathbb{F})$, $\mathrm{Re}X \geqq 0$; $X \neq 0$ a.s. ならば、X は外関数である。すなわち、$-\infty < \log|E[X]| = E[\log|X|]$ となる。

(この定理の証明のために、次の補題を証明する。)

<u>補題5.6</u>　$X \in H^1(\mathbb{F})$, $\mathrm{Re}X \in L^\infty(\mathbb{F}) \Rightarrow X \in \bigcap_{1 \leqq p < \infty} [H^\infty(\mathbb{F})]_p$

補題5.6 の証明　任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、$\exp(tX) \in L^\infty(\mathbb{F})$ であり、$tX \in H^1(\mathbb{F})$ であるから、補題5.2 より、$\exp(tX) \in H^\infty(\mathbb{F})$ である。[1] p70 より、$H^\infty(\mathbb{F}) = H^\#(\mathbb{F}) \cap L^\infty(\mathbb{F})$ ゆえ、$\mathrm{Re}X \in E(\mathbb{F})$ である。[1] p111 より、ある $k \in \mathbb{R}$ が存在して、$\mathrm{Im}X = {}^*(\mathrm{Re}X) + k$ となる。定理4.3 より、${}^*(\mathrm{Re}X) \in \bigcap_{1<p<\infty} L^p(\mathbb{F})$ となる。[1] p115 より、$\mathrm{Re}X + i\,{}^*(\mathrm{Re}X) \in H^\#(\mathbb{F}) \cap [\bigcap_{1 \leqq p < \infty} L^p(\mathbb{F})] \subset \bigcap_{1 \leqq p < \infty} [H^\infty(\mathbb{F})]_p$ となる。よって、$X \in \bigcap_{1 \leqq p < \infty} [H^\infty(\mathbb{F})]_p$ となる。■

定理5.5 の証明　〈場合I：$\exists \delta > 0$ s.t. $\mathrm{Re}X \geqq \delta$ の場合〉

定理5.4 より、$\mathrm{Log}\,X \in H^1(\mathbb{F})$ である。$i\,\mathrm{Log}\,X$ に補題5.6 を適

用すれば、$\mathrm{Log}X \in [H^\infty(\mathbb{F})]_2$ となる。$g \equiv \mathrm{Log}X$ とおくと、

$\exists g_n \in H^\infty(\mathbb{F})$: $\|g_n - g\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$ となるから、[1]p128 と

定理4.3 より、$\|\mathrm{Im}\,g_n - \mathrm{Im}\,E[g_n] - (\mathrm{Im}\,g_k - \mathrm{Im}\,E[g_k])\|_2$

$\leqq A_2 \|\mathrm{Re}\,g_n - \mathrm{Re}\,g_k\|_2 \to 0 \ (n, k \to \infty)$

ゆえに、$\|\mathrm{Im}\,g_n - \mathrm{Im}\,E[g_n] - \widetilde{\mathrm{Re}\,g}\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$ なる $\widetilde{\mathrm{Re}\,g} \in L^2(\mathbb{F})$ が存在する。このとき、

$$\|g_n - \mathrm{Im}\,E[g_n] - (\mathrm{Re}\,g + i\widetilde{\mathrm{Re}\,g})\|_2 \to 0 \ (n \to \infty)$$

であるから、$\mathrm{Re}\,g + i\widetilde{\mathrm{Re}\,g} \in [H^\infty(\mathbb{F})]_2$ となる。

$$\widetilde{\mathrm{Re}\,g} - \mathrm{Im}\,g = i\{\mathrm{Re}\,g + i\widetilde{\mathrm{Re}\,g} - g\} \in [H^\infty(\mathbb{F})]_2 \subset H^2(\mathbb{F})$$

であるから、命題5.1 より、ある定数 $k \in \mathbb{R}$ が存在して

$\widetilde{\mathrm{Re}\,g} = \mathrm{Im}\,g + k$ となる。従って、$g = \mathrm{Re}\,g + i\widetilde{\mathrm{Re}\,g} - ik$ である。ゆえに、$X = \exp g = e^{-ik} \exp(\mathrm{Re}\,g + i\widetilde{\mathrm{Re}\,g})$ である。そこで、

$Y = e^{ik} \exp(-\mathrm{Re}\,g - i\widetilde{\mathrm{Re}\,g})$ とおくと、$|Y| \leqq \frac{1}{\delta}$ となるから、補題5.2 より、$Y \in H^\infty(\mathbb{F})$ で、$XY = 1$ となる。ゆえに、(4.7)より、

$-\infty < \log|E[X]| = E[\log|X|]$ となる。

〈場合II：一般の場合〉 $X_n = X + \frac{1}{n}$ とし、X_n に場合Iを適用すると、$-\infty < \log|E[X_n]| = E[\log|X_n|]$ となる。

$|\log|X_n|| \leqq \max(|\log|X||, |X|)$ と Lebesgue の優収束定理から

$n \to \infty$ とすると、$-\infty < \log|E[X]| = E[\log|X|]$ が得られる。■

§6 $H^p(\mathbb{F})$ と $H^p(\mathbb{T}^2)$

$H^p(\mathbb{T}^2)$ をトーラス $\mathbb{T}^2$ 上の古典的 H^p 空間とする。

われわれの $H^p(\mathbb{F})$ は、$H^p(\mathbb{T}^2)$ と次の関係がある。

$S \equiv \inf\{s : |Z_1(s)| \geq 1\}$，　$T \equiv \inf\{t : |Z_2(t)| \geq 1\}$　とし、

$\mathcal{B} \equiv \sigma[Z_{1S}, Z_{2T}]$　とする。

定理 6.1　$H^p(\mathbb{F}) \cap L^p(\mathcal{B}) = \{f(Z_{1S}, Z_{2T}) : f \in H^p(\mathbb{T}^2)\}$

証明　任意の $X \in$ (左辺) をとると、ある $f \in L^p(\mathbb{T}^2)$ が存在して、$X = f(Z_{1S}, Z_{2T})$ となる。任意の $(m, n) \notin (\mathbb{Z}_+)^2$ をとる。$m < 0$ としても以下のことでは、一般性を失わない。

$$4\pi^2 \hat{f}(m, n) = \int f(\theta, \varphi) e^{-im\theta} e^{-in\varphi} d\theta d\varphi$$

$$= E[f(Z_{1S}, Z_{2T}) Z_{1S}^{(-m)} Z_{2T}^{(-n)}] = E_2[E_1[f(Z_{1S}, Z_{2T}) Z_{1S}^{(-m)}] Z_{2T}^{(-n)}]$$

$$= E_2[E_1[f(Z_{1S}, Z_{2T})] E_1[Z_{1S}^{(-m)}] Z_{2T}]$$

$$= E_2[E_1[f(Z_{1S}, Z_{2T})] \cdot 0 \cdot Z_{2T}] = 0$$

ゆえに、$f \in H^p(\mathbb{T}^2)$ となる。従って、(左辺) $\subset$ (右辺) となる。"$\supset$" 側は、明らかである。■

この定理を使って、§5の結果は、$H^p(\mathbb{T}^2)$ に翻訳することができる。

§7　あとがき

Holomorphic martingale をここでは、正則martingale と呼んだが、これは、[4] の訳語に従ったものである。

参考文献

[1] K. Barbey - H. König, Abstract analytic function theory and Hardy algebras, Lecture Note in Math.

593 (1977) Springer

[2] K.Carne, The algebra of bounded holomorphic martingales, J. Funct. Anal. 45 (1982) 95_108

[3] R.K.Getoor_M.J.Sharpe, Conformal martingeles, Invent.Math. 16 (1972) 271_308

[4] 荷見守助, Dirichlet algebra の周辺, 数理解析研究所講究録 451 (1982) 187_206

[5] I. Hirschman_R.Rochberg, Conjugete function theory in weak * Dirichlet algebras, J. Funct. Anal. 16 (1974) 359_371

[6] W.Rudin, Function theory in polydiscs, Benjamin Inc. (1969)

[7] H.Sato, Caractérisation par les transformation de Riesz de la classe de Hardy H^1 de fonctions biharmoniques sur $\mathbb{R}_+^{m+1} \times \mathbb{R}_+^{n+1}$, These de doctrat, L'universite scientifique et medical de Grenoble (1979)

[8] 竹之内脩_阪井章_貴志一男_神保敏弥, 関数環 培風館 数理科学シリーズ 8 (1977)

[9] N.Th.Varopoulos, The Helson_Szegö theorem and Ap_functions for Brownian motion and several

variables, J. Funct. Anal. 39 (1980) 85-121

[10] N. Th. Varopoulos, Probabilistic approach to some problems in complex analysis, Bull. Sc. math. 2e Série 105 (1981) 181-224

[11] 渡辺信三　確率微分方程式　産業図書　数理解析とその周辺 9 (1975)

[12] "関数環とその関連分野" 特集, 数学 28 (1976)