

逐次分析の問題について

富山大経済学部 高橋 一 (Hajime TAKAHASHI)

本稿では逐次分析のいくつかの問題を Martingale との関連において論じる。はじめに逐次分析への動機づけを考察し第二節では歴史的な問題、Wald の Sequential Probability Ratio Test (以下 SPRT と記す) について論じる。第三節は Wald SPRT の問題点及その後の発展を、そして第四節では最近の話題を紹介する。

§1. 序 簡単のため本稿では以下の問題を考える。(Ω, \mathcal{F}) を可測空間。($\mathcal{F}_n, n \geq 1$) を単調増加有界の sub σ -加法族の列とする。 \mathcal{F} 上の確率測度を P_θ と書く、 P_θ のもとで X_1, X_2, \dots は独立な平均 θ 、分散 1 の正規分布、 $N(\theta, 1)$ にしたかう確率変数列 (i.i.d. r.v.) とし以下 $S_n = X_1 + \dots + X_n, n \geq 1, S_0 = 0$ と書く。この時統計的仮説検定問題

$$(1) \quad H_0: \theta = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta \neq 0$$

を考察する。標準的な検定方式は、あらかじめ定められた標本数 N と有意水準 $0 < \alpha_0 < 1/2$ に対し

$$(2) \quad |S_N| > k\sqrt{N}$$

ならば H_0 を棄却して H_1 を採択する。ここで定数は

$$(3) \quad P_0 \{ |S_N| > k\sqrt{N} \} = 2 \{ 1 - \Phi(k) \} = \alpha_0,$$

すなわち標準正規分布の分布関数, により決められる。

一般に Z -検定と呼ばれる上記検定法は、いわゆる左度比較

検定で UMP invariant, unbiased 等いくつかの最適性を保持し

ている。(Lehmann, (1959) (H3 ~ 6)). 従って "無条件" に

N 個の標本が取れる場合, 特に科学実験等に於いて Z -検定

及其の一般化である t -検定は優れた方法といえる。ところが

一方, 実際に患者を叩き行う医学実験, 又は迅速な決定

が要求される, 例へば戦時下に於ける品質管理等の場合状況は若

干異ってくる。今仮りに X_i を i 番目の患者のある薬に対

する反応とし, その結果は $i+1$ 番目の患者が実験に参入する

前に得られるものとする。即ち X_1, X_2, \dots と逐次データ

が得られるものとする。ここでゼロ仮説 H_0 対立仮説 H_1 に対

し検定する時 $|S_n|$ の値が非常に大きくなるならば多くの

場合 N 個すべてのデータを集める前に H_0 の非妥当性は明か

かに存するであろう。これは S_n の値が平均的には 0 に等しい事

より少くとも直観的には明らかであろう。(図1参照)

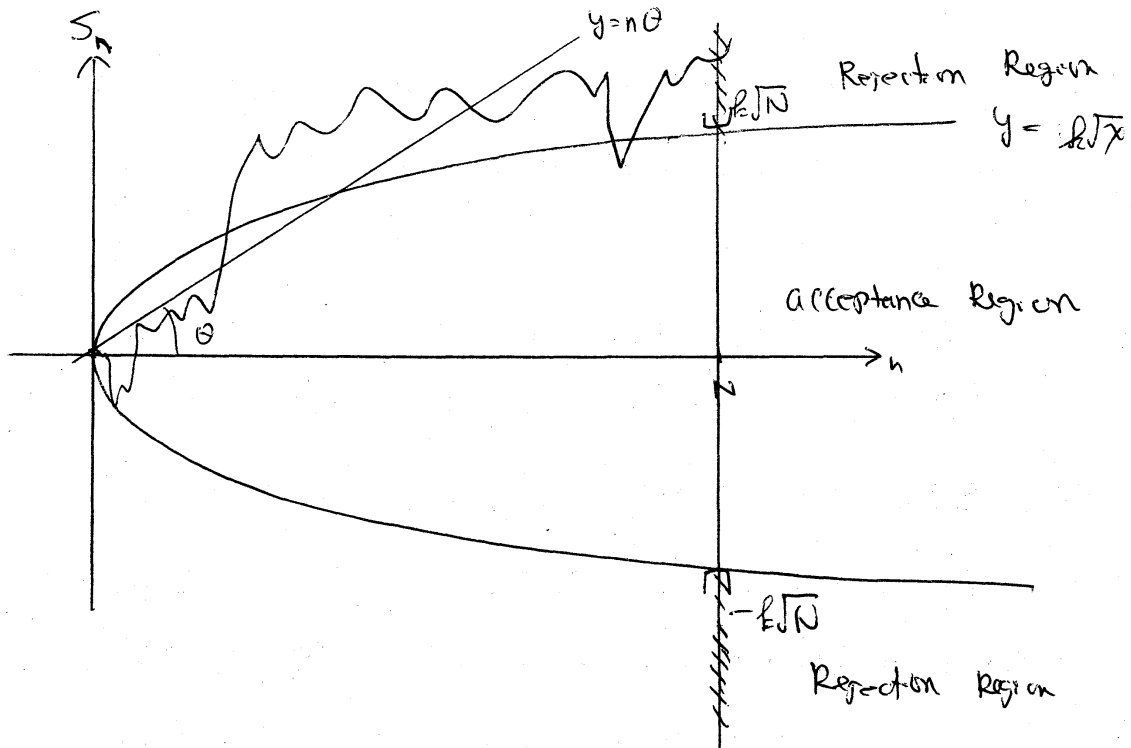


図 1.

ニニてもしもサンプリングの初期の段階で H_0 の非妥当性が明らかになる時それ以上のサンプリングには (A) 経済上又 (B) 倫理上の問題が生じる。一方 N 個の標本を全部取らなければ伝統的方法はその最適性を保持し得るりののである。数学的には第一種の過誤確率 ($P\{\text{Type I}\}$) α_0 と標本数 N を所与として、第二種の過誤確率 ($P\{\text{Type II}\}$) を最小にする決定方式を探すのが伝統的方法であった。一般に $P\{\text{Type II}\}$ は θ と N の関数である場合 $P\{\text{Type II}\}$ は $|\theta|$ と N に関して減少関数である。もしも α_0 を許容できる最大の $P\{\text{Type II}\}$ であるならば θ を固定した時 N を減らす事は可能である。即ち α_0, α_1 を所与とした時 N は (ニニは確率変数)。

最少にする様な決定方式を探すわけである。以上が逐次検定
 即ち、 H_0 を採択又は棄却するのに十分な情報が集まる、在所で
 サンプルングを中止する合理的な方法への動機づけである。よ
 り詳しくは Armitage (1975), Wald (1947) 及び
 Wallis (1980) 等を参照されたい。

§2. WALD SPRT. 本節では Wald (1947) により開
 発された SPRT について、出来る限り直観的に (数学的
 には若干粗雑に) 述べてゆく。前節と同様 X_1, X_2, \dots を
 $N(\theta, 1)$ からの i.i.d. r.v. として単純ゼロ仮説, 単純対
 立仮説の検定問題を考える。

$$(4) \quad H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta = \theta_1$$

ここで例えば $Y_i = X_i - \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1)$ と置くことにより, 一般
 性を失うことなく $\theta_1 = -\theta_0 > 0$ と仮定できる。さて H_0 が
 正しい時 S_n の値は $\theta_0 n$ に近い値を取るであろう。したが
 り $a < 0 < b$ をある定数として停止時間 (S.T.) t を

$$(5) \quad t = \inf \{ n \geq 1; S_n \notin (a, b) \}, \quad \inf \emptyset = \infty$$

で定義して

$$S_t \leq a \quad \Rightarrow \quad H_0 \text{ を採択}$$

$$S_t \geq b \quad \Rightarrow \quad H_1 \text{ を採択}$$

なる検定方法を考えれば合理的と思われた。しかしながら以

下 (A) ~ (D) の問題に対する答は必要がある。

(A) $P_{\theta_i} \{ t < \infty \} = 1 \quad i = 0, 1$. 即ち確率 1 でサンプルリテイクを終了するかどうか。

(B) 与えられた α_0, α_1 , (第一種過誤確率, 第二種過誤確率の上限) を実現する a, b の選択が可能か否か
又もし可能ならばその決定方法。

(C) $E_{\theta_i} \{ t \} = ? \quad i = 0, 1$.

(D) 最適性の定義と SPRT の最適性。

これらの問題を考えたときの基本的な定理を述べる。

定理 1. (大数の強法則). Y_1, Y_2, \dots を平均 μ の i.i.d. r.v.

$S_n = Y_1 + \dots + Y_n \quad n \geq 1$ とする. この時

$$(6) \quad n^{-1} S_n \xrightarrow{q.e.} \mu \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

定理 2. (Fundamental Identity of Sequential Analysis). t を任意

の (\mathcal{F}_n) 停止時間. $\mathcal{F}_t = \{ A \in \mathcal{F}; [t=n] A \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \}$

Q, P を \mathcal{F} 上の確率測度で $Q^{(n)}, P^{(n)}$ はそれぞれ \mathcal{F}_n への制限。 t と $t+n$ での n に対し $Q^{(n)}$ と $P^{(n)}$ は互いに絶対連続で

$L_n = dQ^{(n)} / dP^{(n)}$ と書く. この時任意の $A \in \mathcal{F}_t$ に対し

$$(7) \quad \begin{aligned} Q\{A[t < \infty]\} &= \sum_{n=1}^{\infty} Q\{A[t=n]\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A \in \mathcal{F}_n} [dQ^{(n)} / dP^{(n)}] dP = \int_{A \in \mathcal{F}_t} L_t dP. \end{aligned}$$

定理 3. (Wald Equation). Y_1, Y_2, \dots を平均 μ (有

限) の i.i.d. r.v. $S_n = Y_1 + \dots + Y_n$ $n \geq 1$, $S_0 = 0$ とする。

尤も任意の (\mathcal{F}_n) 停止時間で $E\{T\}$ が有限であると仮定する。

この時^{*}

$$(8) \quad E\{S_T\} = E\{T\} \cdot E\{Y_1\}.$$

定理 1 の証明及意味は至る所で論じられてゐるので、ここでは省く。定理 2 は L_n が P のもとで Martingale である事をもち、簡単に証明できる (Chow-Robbins-Siegmund, 1971, P 33) 形式的には Q のもとでのある事象の確率を他の確率 P のもとで計算する方法である。証明及定理の平易さから、その意味する所は非常に大きい。定理 3 は逐次分析の中で最も重要な有名な定理で、その一般化及各種の証明方法が出版されてゐる (Feller, 1971, Chow et al 1971, Chow-Teicher, 1978) もしも c が定数又は Y_1, Y_2, \dots と独立であれば (8) は自明である。多くの場合 (8) の証明には $\{t > n\}$ が Y_{n+1}, Y_{n+2}, \dots と独立である事を利用する方法かとされてゐる。定理中、 $\epsilon - \delta$ 条件は無限和の順序交換正当化のため必要とされる。最も一般的有形での定理はその証明は Chow-Robbins-Teicher (1965) により Martingale をつかひ行われてゐる。

(*) $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ と仮定しておく。

α 以下 (A) ~ (D) を考え α の簡潔のため $\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha$ とする。

(A) 定理 1 より S_n は平均 $\mu = 0$ で近似される。又サトフーリシフ領域は $y = a$ 及び $y = b$ で決定される上下に有界な領域故 $\alpha < \infty$ $a, b \in (P_{\theta_i}, i=0,1)$ は明らかである。実際 Stein は θ_i がある $c > 0$ と $0 < p < 1$ が存在して十分大きな n に対し

$$P_{\theta_i} \{ |x| > n \} < c p^n \quad (i=0,1)$$

なる事を証明した (Feller, 1971 P.601)。したがって $\alpha > 0$ に対し $E_{\theta_i} \{ |x| \} < \infty$ $(i=0,1)$ である。

(B) 定理 2 で $Q = P_{\theta_0}, P = P_{\theta_1}$ とし $S = A = \{S_1 \geq b\}$ とおく。(A) より $P_{\theta_0} \{ |x| < \infty \} = 1$ 又 $L_n = \exp\{-2\theta_1 S_n\}$

$$\begin{aligned} \alpha &= P_{\theta_0} \{ S_1 \geq b \} = \int_{S_1 \geq b} L_1 dP_{\theta_0} \\ &\leq e^{-2\theta_1 b} P_{\theta_1} \{ S_1 \geq b \} = e^{-2\theta_1 b} \{ 1 - \alpha \} \end{aligned}$$

上式中不等式は $S_1 \geq b$ かつ θ_1 生ずる。ここで S_1 は必ず θ_1 を越えて (overshoot) する事を無視し $S_1 \approx b$ とする事により

$$\alpha \approx e^{-2\theta_1 b} / (1 + e^{-2\theta_1 b})$$

又は $b \approx \frac{1}{2\theta_1} \log \frac{\alpha}{1-\alpha} \approx -a$ 有り関係式を得る。

(C) 定理 3 と近似式

$$E_{\theta_0} \{ S_1 \} = b P_{\theta_0} \{ S_1 \geq b \} - b P_{\theta_0} \{ S_1 \leq -b \} \quad (c=1)$$

より

$$E_{\theta_0} \{ T \} = (2\theta_1^2)^{-1} (2\alpha - 1) \log(\alpha / (1-\alpha)) \quad c=0.1$$

特に

$$E_{\theta_0} \{ T \} \sim -(\log \alpha) / 2\theta_1^2 \quad \alpha \downarrow 0$$

尚同じ $P\{\text{Type I}\}$, $P\{\text{Type II}\}$ をもつよう有固定サンプル数検定で必要としたサンプル数は $-(2 \log \alpha) / \theta_1^2$ であるが SPRT の場合は 4 倍にあたる

(d) まず最適性を "与えられた α_0, α_1 に対し $P\{\text{Type I}\} \leq \alpha_0, P\{\text{Type II}\} \leq \alpha_1$ を満たすすべての逐次検定方法の中で $E_{\theta_0} \{ T \}$ を最小にするもの" と定義する。問題は Wald SPRT がこの意味で最適かどうかである。歴史的には Wald による予想 (Wald, 1947 p. 197) に始まり Wald-Wolfowitz (1948), Arrow-Blackwell-Girshick (1949) 等により与えられた証明の誤りを正す方向で発展してきた。この最適停止問題の理論は Chow-Robbins-Siegmund (1971) で一応の完結を見るが、その間逐次分析は Martingale の発展にはたしな役割は大きい。やや直観的な証明は Lehmann (1959) CH3, Ferguson (1967) CH7 に又厳密な証明は Chow-Robbins-Siegmund, (1971) CH4~5 に与えられている。以下 Martingale との関係を非常に難しくはあらず述べて行く。

S_n を n 番目の観測値を得たあとで決定を行う時生ずるであろう損失又 $c > 0$ をサンプル一つを取るときに必要有費用とする。と

$$W_n = S_n + cn \quad n=1, 2, \dots \quad \text{H}$$

n 時点までサンプリングを停止、決定を下した時の損失である。
 問題は $E\{W_n\}$ を最小にする様を ①各時点 n に決けた
 δ_n を最小にする決定方法の発見と ②しかなるの $E\{W_n\}$
 を最小にする停止時間 τ の発見にある。①については
 標準的な検定方法 (尤度比検定, Bayes 検定) がその解であ
 る事が比較的容易に示された。②についてはまず δ_n, C_n
 はそれぞれ n についての減少関数, 増加関数である。し
 たがって、適当な条件下で δ_n は Supermartingale, C_n は Sub-
 martingale で近似されるであろう。特に n が小さい時は δ_n が又
 大きい時は C_n が小さい W_n で優性, 即ち W_n は n が大き
 くなるにつれて Supermartingale から Submartingale にその性格を
 変える。したがって $E\{W_n\}$ を最小にするには、その変化点
 を探す必要がある Adaptive な方法を見なければいけない。
 (cf. Backward Induction)。

§3. SPRT の問題点とその後の発展.

前節では H_0 と H_1 が十分はなれている時, SPRT は $E\{W_n\}$ を
 最小にする仮説のもとで最小にするという意味で最適であった。し
 たがって真の状態が H_0 と H_1 の中間にある場合最適性について
 何らかの保障はない。実際前節の問題でも $\theta = 0$ であ
 ると $H_0: \theta = -\theta_1$ vs $H_1: \theta = \theta_1$ に対する SPRT の停

止時間大は $E_0\{t_1\} \sim (\log \alpha)^2 / 4\theta_1^2$ であり α の
 即ち固定サンプル検定と比べ $(-\log \alpha) / \theta$ 倍のサンプル数
 を(平均で)必要とする。この欠点を多少とも軽減するたの
 Sobel & Wald (1949) は $H_1: \theta = -\theta_1$, $H_0: \theta = 0$, $H_2: \theta = \theta_1$
 なる "3-decision" 問題を考え H_1 vs H_0 と H_0 vs H_2 に対応する
 2つのSPRTを組み合わせた事により $(-\theta_1, \theta_1)$ の区間内でもあ
 まりサンプル数の大きくなる事有り検定法を案出した。(図2)

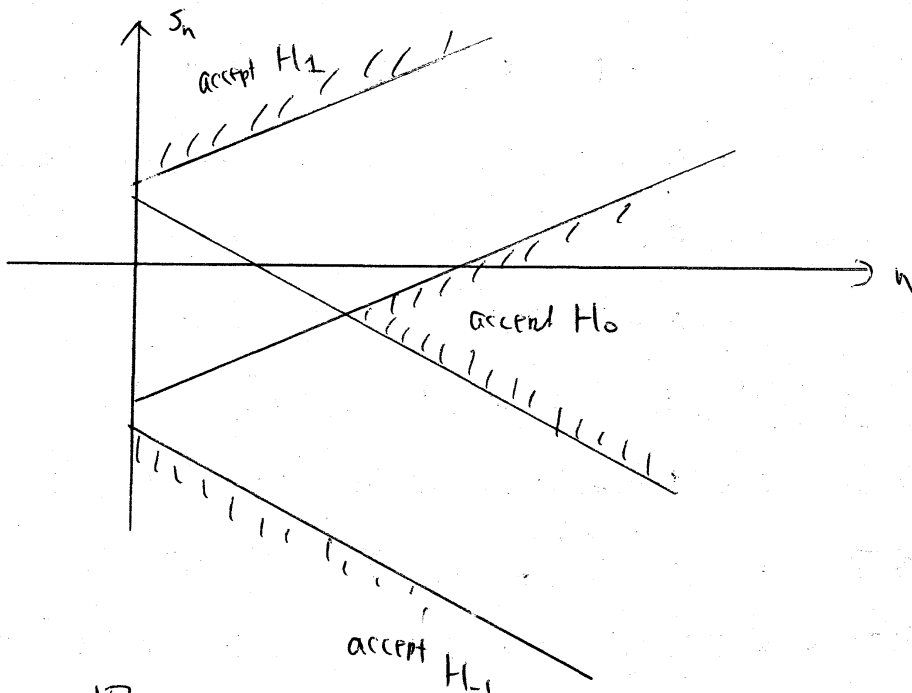


図 2

しかしながら応用上、その確率1で有界である場合、いくつかの不都合が生じる(例へば予算の問題)。即ち、実際上はSPRTの様に開いた計画ではなく、閉じた計画の方が望ましいとされている(Armistead, (1975))。その他、複合仮説の問題等SPRTには多くの問題がある。以下それらを紹介して行く。

以下 1節を考えた $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta \neq 0$ を考える。この問題に対する関心は逐次検定法として H. Schneiderman & Armitage (1962), Anderson (1960), Cornfield (1966), Robbins (1970) 等数多くの研究があるがここでは以下の二つの研究を紹介するにとどめる。

(A) Armitage の Repeated Significance Test. (以下 RST と書く)

これはある意味で一番自然な逐次検定と云える。即ち上で考えた Z -検定を各時点で行う検定方式である。今仮りに $n-1$ 時点までテストが中止された場合、その時 X_n を観測し $S_n = X_1 + \dots + X_n$ を計算し、もし $|S_n| > k\sqrt{n}$ であればテストを中止し H_0 を棄却する。ここで k は

$$P_0 \left\{ \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} > k \right\} = 2 [1 - \Phi(k)] = \alpha_0$$

で定められる定数。もし論重複対数の法則により、たとえ H_0 が正しくとも確率 1 で $|S_n| > k\sqrt{n}$ なる事象はいつか起こり、したがってこの検定法が意味を持つためにはある正数 N_0 をあらかじめ決めておく。時点 N_0 までに H_0 を棄却するかどうかを問わなければ意味がない (Robbins, 1952)。以上をふまえて Armitage は次の検定法を提唱した。" $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: \theta \neq 0$ に対し検定するのち、ある定数 $a > 0$, $c \geq 0$, $N_0 \geq 0$ に対し停止時間 T を

$$(9) \quad T = \inf \{ n \geq 1 : |S_n| \geq \sqrt{2a(n+c)} \}$$

で定義する. $c = c_2$

$$(10) \quad \begin{aligned} t &\leq N_0 && \Rightarrow H_0 \text{ を棄却} \\ t &> N_0 && \Rightarrow H_0 \text{ を採択} \end{aligned}$$

とする. これを Armitage の RST と呼び (Armitage 1975)。

(B) Bayes 解. この問題に関する Bayesian 接近法は Kiefer & Weiss (1957) 以後いくつかの結果があるが $c = c_2$ は Schwarz (1962, 1968) による最適 Bayes 解のサトワリシグ領域の極限形に於いて述べられる. $c = c_2$.

$$(11) \quad \Lambda_n^0 = S_n^2 / (2n), \quad \Lambda_n^1 = [(nS - S_n^*)^2] / (2n)$$

をそれぞれ

$$(12) \quad H_0: \theta = 0 \quad \text{vs} \quad H_1: |\theta| \geq \delta$$

を検定する尤度比とする. $c = c_2$ $x^+ = \max\{0, x\}$, $\delta > 0$ は与えられた正定数 $(-\delta, \delta)$ を indifference region と呼び (Wald 1947, p134). Schwarz の結果によれば サトワリシグ領域の極限に於ける形は

$$(13) \quad \max \{ \Lambda_n^0, \Lambda_n^1 \} \leq \log \frac{1}{\epsilon} = c$$

で決まる. $c = c_2$ $c = (\text{サトワリシグ領域の長さ}) / (\text{設けた決定に対するコスト})$

の極限は $c \rightarrow 0$ の意味である. Schwarz の検定法は (1) のサポートが $|\theta| \geq \delta$ であるようなすべての先験確率分布に対し Asymptotic の意味で Bayes である. また (2) これはすべての Bayesian 逐次検定に於いて c をとりうるが 閉じた計画となる

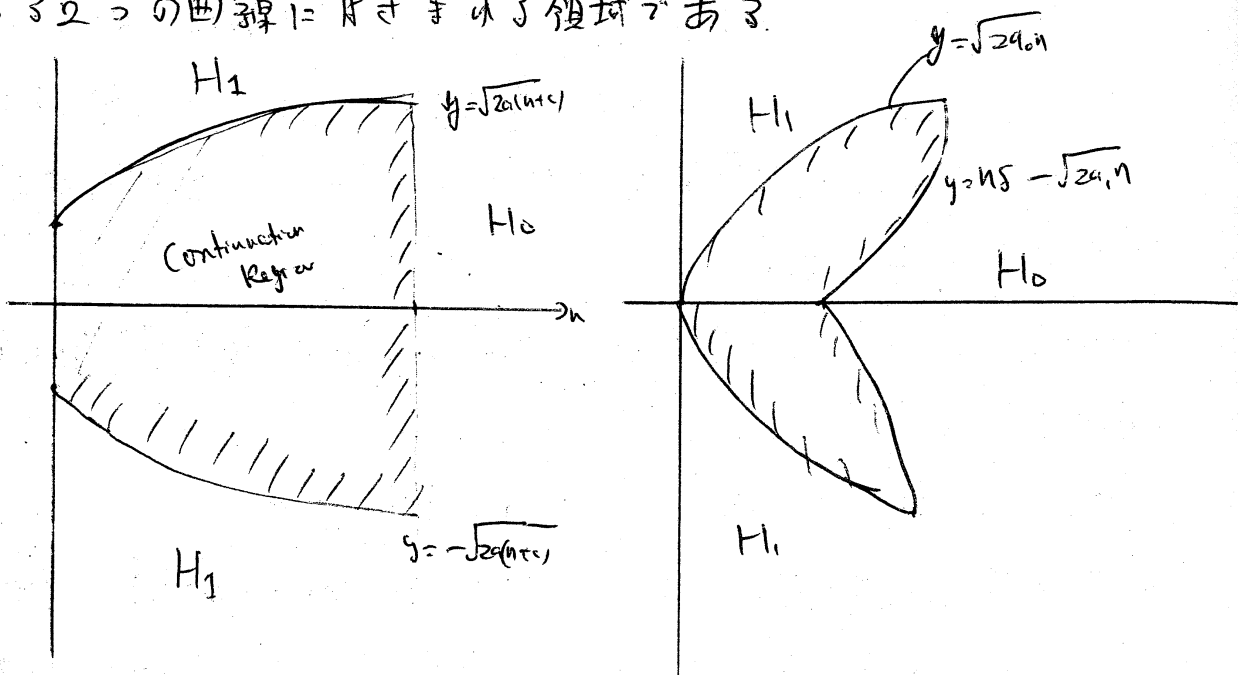
2. 応用上は若干の修正を加え サンプル領域を

$$(14) \quad \Delta_n^{(i)} \leq Q_i \quad i = 0, 1$$

とする。この時サンプル領域は $(n, |S_n|)$ 空間では

$$U: y = \sqrt{2\alpha_0 n}, \quad L: y = (nS - \sqrt{2\alpha_1 n})^T$$

とる2つの曲線に挟まれた領域である。



RST

図 3

Schwarz test

図 4

以上の検定法で RST はその使いやすさ、又 Schwarz 検定は
その Bayesian 性によりともに優れた方法といえる。問題はそれ
らの Frequentist 性質、即ち $P\{Type\ I\}$, $P\{Type\ II\}$, $E\{M\}$ 等
の計算が非常に難かしい事にあつた。(したがつて a, c, N_0, \dots 等の
パラメータの選択がほぼ不可能であつた)。若干
異なる検定法ではあるが、この問題を解くため Anderson (1960)

S_n を Brown 運動で近似し Doob (1949) の方法で数値解を求めた。又 Schneiderman - Armitage (1962) は Brown 運動で近似するたため非常に複雑なサンプリング領域を考えている。また McPherson & Armitage (1971) は RST に於いて高速コンピュータを使う種々の数値計算を行い各種 a, c, N_0 のコンビネーションに対応する過渡確率、期待サンプル数の正確な値を求めた。(想像を超える CPU time)

この困難は最近の Woodroffe (1976a, b), Lai & Siegmund (1977, 1979) による非線形再帰理論の発展により大幅に解決された。即ち RST に於いては $a^{-1}N_0$ が有界な正数になる様に a と N を増やす時非常に正確な近似解を与えてくれる。ただ c の値が大きいつつ Schwarz 推定の場合、数値的に若干問題がある。左がこれらも Takahashi & Woodroffe (1980, 1982) により $X_{T_{n+1}}$ の漸近展開を与えそれより正確な近似が可能となることである。いくつかの技術的問題はこの漸近展開にあらわれる定数の計算が非常に複雑な事がある。いくつかの場合(特に RST にあいて) Siegmund (1977) は Brown 運動を用い漸近展開の高次項を推定してはいるが机上計算機で計算出来る程簡単な定数を含む Siegmund の結果がいくつかの場合 Woodroffe & Takahashi (1982) の近似を数値的に凌駕してはいる。

より基本的な問題としてこれは極限のとり方であろう。上での

議論は、 H_0 と H_1 とを固定している。一方標本数が増えれば H_0 と H_1 とを識別する力は強くなるであろう。したがって、この際より "近い仮説" の検定を考えるのが自然であろう。例へば $H_0: \theta = 0$ vs $H_1: |\theta| \geq \delta_n$ で $\delta_n \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$ があるもの (より厳密には Contiguous 仮説を考える) を考える。この時 Brown 運動による近似が数値的にも非常によい結果を与える事が Segmund (1979) 5 により示されている。以下次節では、Brown 運動による近似の重要性と又有限サンプルの場合よりよい近似を得るため、最近の話題から Ferber の Martingale について述べる。

§4 Brown 運動と Boundary Crossing 問題。 Brown 運動がある

境界を越える確率又は初めて越えるまでの平均時間を求めるのに今まで Doob (1947) を始め、Robbins + Segmund (1970), (1973) Daniels (1982) 等数多くの方法が案出されているが、本節では RST 及 Schwarz 検定との関連において筆者が興味を持っている Ferber (1982) の結果について簡単に述べて行く。

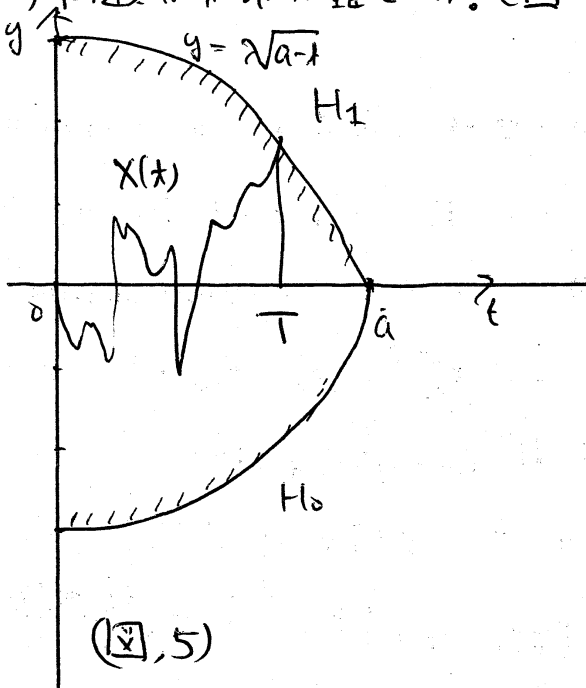
$X(t)$ を $(0,0)$ を出発点とする drift θ の Brown 運動とする。

ここで

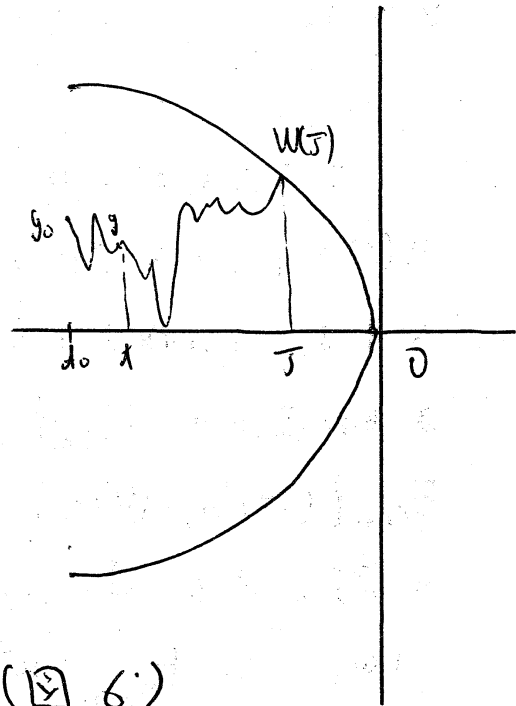
$$H_0: \theta \leq 0 \quad \text{vs} \quad H_1: \theta > 0$$

を検定するのに、停止時間

(15) $T = \inf\{t \geq 0 : |X(t)| = \lambda\sqrt{a-t}\} \quad \lambda > 0$
 を定義し “ $X(T) \geq 0$ 有る時, 又その時に限り H_0 を
 棄却する” という検定方式を考える。さて $P_\theta\{X(T) \geq 0\}$
 $E_\theta\{T^k\}$ 等を考える時, T の定義式 の非線型性及び二境界性
 により問題は非常に難しい。(図 5)



(図 5)



(図 6)

このために, まず $W(t)$ を (t_0, y_0) , $(t_0 < 0)$, を出発する標準 Brown 運動. $P_{(t_0, y_0)}$ を上記 $W(t)$ に対応する確率測度. $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(\rho) : t_0 \leq \rho \leq t\} \quad t \leq 0$, と書く。さて Z を標準正規確率変数, g を $E|g(\mu + \sigma Z)| < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$ 有る可測関数とし $G(\mu, \sigma) = E\{g(\mu + \sigma Z)\}$ と書く。
 定理 4. $t_0 \leq t \leq 0$ 有る t に対し $M(t) = G(W(t), \sqrt{-t})$ とする。この時

$\{M(t), \mathcal{F}_t, t_0 \leq t \leq 0\}$ は $P_{(t_0, y_0)}$ に関して
Martingale とする。

系 $k_n(x) = E\{(Z+x)^n\}$, $l_n(x) = E\{(Z+x)^n \frac{1}{2} \text{sgn}(Z+x)\}$ とす
る時 $(-t)^{\frac{n}{2}} k_n(W(t)/\sqrt{-t})$ 及 $(-t)^{\frac{n}{2}} l_n(W(t)/\sqrt{-t})$ は Martingale
となる。

さ $Z(t, y)$ を $|y| = \lambda\sqrt{-t}$ で定義されるポラの内点とし
 $W(t) = y$ なる条件のもとで $T = \inf\{t \geq 0; |W(t)| = \lambda\sqrt{-t}\}$
とする。 T は確率 1 で有界 (したがって Optional Stopping 定理
及上記系より) $E_{(t, y)}\{-T^n\} = (-t)^n k_{2n}(\mu) / k_{2n}(\lambda)$, 又
 $E_{(t, y)}\{(-T)^n \text{sgn} W(T)\} = (-t)^n l_{2n}(\mu) / l_{2n}(\lambda)$. $\therefore \mu =$
 $y/\sqrt{-t}$. さ $I_{[W(T) > 0]} = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn} W(T))$ より
(16) $E_{(t, y)}\{W^n(T) I_{[W(T) > 0]}\} = \left(\frac{\lambda^n}{2}\right) (-t)^{\frac{n}{2}} \left[\frac{k_n(W)}{k_n(\lambda)} + \frac{l_n(W)}{l_n(\lambda)}\right]$
を得る。以上 $\theta = 0$ 即ち Brown 運動の drift はゼロと仮
定して議論を進めてきたが、一般の場合 §2 の定理 2 より

$$P_{(t, y), 0}\{W(T) \geq 0\} = \int_{[W(T) > 0]} \frac{dP_{(t, y), \theta}^{(T)}}{dP_{(t, y), 0}^{(T)}} dP_{(t, y), 0} \\ = E_{(t, y), 0}\{I_{[W(T) > 0]} \left[\frac{e^{W(T)\theta - T\theta^2/2}}{e^{y\theta - t\theta^2/2}} \right]\}.$$

$$\text{一方 } \exp\{W(T)\theta - T\theta^2/2\} = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} \lambda^n k_n(\lambda) \theta^n W^n(T)$$

以上より

$$P_{(x,y),\theta} \{W(T) \geq 0\} \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp\left\{-y\theta + \frac{t\theta^2}{2}\right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(\lambda) \cdot h_n(\mu)}{h_n(\lambda)} \frac{(\theta\sqrt{t})^n}{n!}$$

参考文献

- Anderson, T.W. (1960) A modification of the sequential probability ratio tests to reduce the sample size. *Ann. Math. Statistics*. 31 165-197.
- Armitage, P. (1975) *Sequential Medical Trials*, Halsted, New York.
- Arrow, K. J., Blackwell, D. and Girshick, M. A. (1949) Bayes and minimax solutions of sequential decision problems, *Econometrica* 17, 213-244.
- Chow, Y. S., Robbins, H. and Siegmund, D. (1971) *Great Expectations* Houghton Mifflin, Boston.
- Chow, Y. S., Robbins, H. and Teicher, H. (1965) Moments of randomly stopped sums, *Ann. Math. Statistics*. 36 789-799.
- Chow, Y. S. and Teicher, H. (1978) *Probability Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Cornfield, J. (1966) A Bayesian test of some classical hypotheses with applications to sequential clinical trials. *JASA* 61 577-594.

- Daniels, H. E. (1982) Sequential tests constructed from images.
Ann. Statistics. 10 394-400.
- Doob, J. L. (1949) A heuristic approach to the Kolmogorov
Smirnov theorems. Ann. Math. Statistics. 20 393-403
- Feller, W. (1971) An Introduction to Probability Theory and Its
Applications II, John-Wiley New York.
- Ferebee, B. (1982) Tests with parabolic boundary for the
drift of a Wiener process. Ann. Statistics 10. 882-894.
- Ferguson, T. S. (1967) Mathematical Statistics, Academic Press.
- Kiefer, J. and Weiss, L. (1957) Some properties of generalized
sequential probability ratio tests, Ann. Math. Statistics 28
57-74.
- Lai, T. L. and Siegmund, D. O. (1977), A non-linear renewal
theory with applications to sequential analysis I. Ann Statistics
5, 946-954.
- Lai, T. L. and Siegmund, D. O. (1979) A non-linear renewal
theory with applications to sequential analysis, II Ann. Statistics
7, 60-76
- Lehmann, E. L. (1959) Testing Statistical Hypothesis. John Wiley
and Sons
- McPherson, C. K. and Armitage, P. (1971) Repeated significance

- tests on accumulating data when the null hypothesis is not true.
 Jo Roy, *Statists. Soc. Ser. A* 134 15-26.
- Robbins, H. (1952) Some aspects of the sequential design of experiments, *Bull. of American Math. Soc.* 58, 527-535.
- Robbins, H. (1970) Statistical methods related to the law of the iterated logarithm; *Ann. Math. Statists.* 41 1397-1409.
- Robbins, H. and Siegmund, D. (1970) Boundary crossing probabilities for the Wiener process and sample sums, *Ann. Math. Statists* 41. 1410-1429.
- Robbins, H. and Siegmund, D. (1973) Statistical tests of power one and the integral representation of solutions of certain partial differential equations. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica* 7, 93-120.
- Schwarz, G. (1962) Asymptotic shapes for Bayes sequential testing regions, *Ann. Math. Statists.* 33 224-236.
- Schwarz, G. (1968) Asymptotic shapes for sequential testing of truncation parameters. *Ann. Math. Statists.* 39. 2038-2043
- Siegmund, D. (1977) Repeated significance tests for a normal mean, *Biometrika* 64, 177-189.
- Siegmund, D. (1979) Corrected diffusion approximations in certain random walk problems, *Adv. Appl. Probab.* 11 701-719

- Sobel, M. and Wald, A. (1949) A sequential decision procedure for choosing one of three hypotheses concerning the unknown mean of normal distribution: *Ann. Math. Statists.* 20-502-522
- Takahashi, H. and Woodroffe, M. (1981). Asymptotic expansions in non-linear renewal theory. *Comm. Statist. A10* 2113-2135.
- Wald, A. (1947). *Sequential Analysis*, John Wiley & Sons, New York (also by Dover New York)
- Wald, A. and Wolfowitz, J. (1948) Optimum character of the sequential probability ratio tests, *Ann. Math. Statists.* 19 326-329
- Wallis, A. (1980) The statistical research group 1942-1945. *JASA.* 75 320-335.
- Woodroffe, M. (1976 a) A renewal theorem for curved boundaries and moments of first passage times, *Ann. Probab.* 4. 67-81
- Woodroffe, M. (1976 b) Frequentists properties of Bayesian sequential tests, *Biometrika* 63 101-110.
- Woodroffe, M. and Takahashi, H. (1982) Asymptotic expansions for the error probabilities of some repeated significance tests. *Ann. Statists.* 10 895-908.