数理解析研究所講究録
第 492 巻 1983 年 1-12

Decomposable and Spectral Operators on Hilbert Spaces

東北薬科大学　棚橋浩太郎 (Kôtarô Tanahashi)
東北大・教養　吉野　崇 (Takashi Yoshino)

§1. 序

Dunford が研究した，スペクトル分解をもつ spectral operator の1つの拡張として，Foias は decomposable operator を，また更に広いクラスとして Jafarian は weak decomposable operator を提唱した。ここでは，この間の関係を調べるのが目的である。

Wadhwa [8] は，複素ヒルベルト空間上の decomposable operator は条件 (I) をもてば spectral operator であることを示した。ここでは，この結果を利用して，weak decomposable operator が spectral operator となる必要十分条件がえられたのでそれを報告する。なお，spectral operator については [3]，decomposable operator については [2]，weak decomposable operator については [5] を参照してほしい。

§1. 準備

複素ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素の全体を $B(H)$ とおく。$T \in B(H)$ のスペクトルを $\sigma(T)$, また, その不変部分空間の全体を $\mathrm{Lat}(T)$ とかく。

定義 1. $Y \in \mathrm{Lat}(T)$ が *spectral maximal* とは

$$Z \in \mathrm{Lat}(T),\ \sigma(T|Z) \subset \sigma(T|Y) \Rightarrow Z \subset Y$$

がなりたつときをいう。T の *spectral maximal space* の全体を $SM(T)$ とかく。

定義 2. $T \in B(H)$ が *decomposable* とは, 任意有限個からなる $\sigma(T)$ の *open covering* $\{G_1, \cdots, G_n\}$ に対し, ある *spectral maximal space* の系 $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ が存在して (i) $H = Y_1 + \cdots + Y_n$ (ii) $\sigma(T|Y_i) \subset G_i$ をみたすときをいう。また, この定義で, (i) の代りに (i)′ $H = \overline{Y_1 + \cdots + Y_n}$ ($\overline{}$ は閉包を表わす) をみたすとき, T は *weak decomposable* であるという。

定義 3. $T \in B(H)$ が条件 (A) をもつとは

$$f : \text{analytic} \quad (z - T) f(z) \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$$

が成立するときをいう。このとき, すべての $x \in H$ に対して, $(z - T) x(z) \equiv x$ となる *analytic* $x(z)$ が存在するような最大の開集合 $\rho_T(x)$ が定まる。この

とき，x の局所スペクトルを $\sigma_T(x) = \rho_T(x)^c$ と定める。また，集合 $E \subset \mathbb{C}$ に対し，$H_T(E) = \{x \in H \mid \sigma_T(x) \subset E\}$ とおく。$H_T(E)$ は T-不変な線形集合であるが，閉，つまり部分空間とは限らない。

定義 4. (A) をもつ T が条件 (B) をもつとは

$$\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \phi \Rightarrow \|x\| \leqq K \|x + y\|$$

をみたす定数 $K > 0$ が存在するときをいう。

定義 5. (A) をもつ T が条件 (C) をもつとは，すべての閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $H_T(F)$ が閉となるときをいう。

定義 6. (A), (C) をもつ T が条件 (I) をもつとは，$\sigma_T(P_F x) \subset \sigma_T(x)$ がすべての閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ とすべての $x \in H$ に対し成り立つときをいう。ただし P_F は $H_T(F)$ への *orthogonal projection* である。

注意 1. *weak decomposable operator* は条件 (A) をもち，*decomposable operator* は (A), (C) をもつことが知られている（[2], [5]）。また $T \in B(H)$ が (A), (C) をもつとき，すべての閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して，$H_T(F) \in SM(T)$ で，また，$\sigma(T \mid H_T(F)) \subset F$ がなり立つ（[2]）。

§3. 結果

まず，Lemma を3つ準備する。

Lemma 1. $T\in B(H)$ が weak decomposable でそのすべての spectral maximal space が T を reduce するなら，T は (C) をもつ。

証. 任意の閉集合 $F\subset\mathbb{C}$ に対して，開集合 $G\supset F$ をとる。すると $\{F^c, G\}$ は $\sigma(T)$ の open covering だから

$$H=\overline{Y_1+Y_2}\ ,\ \sigma(T|Y_1)\subset F^c,\ \sigma(T|Y_2)\subset G$$

となる $Y_1, Y_2\in SM(T)$ が存在する。任意の $x\in H_T(F)$ を固定する。すると

$$x=\lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)}+x_n^{(2)})$$

となる $x_n^{(1)}\in Y_1$, $x_n^{(2)}\in Y_2$ が存在する。ここで Y_1 への orthogonal projection を P とおくと、仮定から，$PT=TP$ だから，

$$\sigma_T(Px)\subset\sigma_T(x)\cap\sigma(T|Y_1)\subset F\cap F^c=\phi$$

従って $Px=0$ となる。よって

$$0=Px=\lim_{n\to\infty}(Px_n^{(1)}+Px_n^{(2)})=\lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)}+Px_n^{(2)})$$

よって

$$x=\lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)}+x_n^{(2)})-\lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)}+Px_n^{(2)})=\lim_{n\to\infty}(x_n^{(2)}-Px_n^{(2)})$$

となる。ここで Y_2 は hyperinvariant（[2, Proposition 1.3.2]）だから，$x \in Y_2$ となる。よって

$$H_T(F) \subset Y_2 \subset H_T(\sigma(T|Y_2)) \subset H_T(G)$$

となるが，$G \supset F$ は任意だったので，

$$H_T(F) \subset \cap Y_2 \subset \cap H_T(G) = H_T(\cap G) = H_T(F)$$

となる。従って $H_T(F) = \cap Y_2$ は閉である。

Lemma 2. $T \in B(H)$ が weak decomposable で (B) をもち，すべての閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $\overline{H_T(F)}$ が T を reduce するなら，T は (C) をもつ。

証．任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して，開集合 $G \supset F$ をとる。すると $\{F^c, G\}$ は $\sigma(T)$ の open covering だから，

$$H = \overline{Y_1 + Y_2}, \quad \sigma(T|Y_1) \subset F^c, \quad \sigma(T|Y_2) \subset G$$

となる $Y_1, Y_2 \in SM(T)$ が存在する。任意の $x \in H_T(F)$ を固定する。すると

$$x = \lim_{n\to\infty} (x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$$

となる $x_n^{(1)} \in Y_1$, $x_n^{(2)} \in Y_2$ が存在する。ここで $\overline{H_T(F)}$ への orthogonal projection を P とおくと，仮定から $PT = TP$ で

$$x = Px = \lim_{n\to\infty}(Px_n^{(1)} + Px_n^{(2)})$$

となる。 ここで Y_1 は T で hyperinvariant だから,

$$Px_n^{(1)} \in Y_1 \cap \overline{H_T(F)} \subset H_T(F^c) \cap \overline{H_T(F)}$$

である。 実は $H_T(F^c) \cap \overline{H_T(F)} = \{0\}$ を示そう。もし $y \in H_T(F^c) \cap \overline{H_T(F)}$ なら $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ となる $y_n \in H_T(F)$ が存在する。 ここで,

$\sigma_T(x) \cap \sigma_T(-y_n) \subset F^c \cap F = \phi$ より条件 (B) から

$$\|y\| \leqq K\|y - y_n\| \longrightarrow 0 \quad (n \to 0)$$

, よって $y = 0$ である。 従って $Px_n^{(1)} = 0$ より $x = \lim_{n\to\infty} Px_n^{(2)}$ となるが, Y_2 は T で hyperinvariant だから, $x \in Y_2$, よって $H_T(F) \subset Y_2 \subset H_T(G)$ となる。 以下は Lemma 1 の証明と同じである。

Lemma 3. $T \in B(H)$ が weak decomposable で (C), (I) をもつなら, T は decomposable である。

証. 任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し, $H =$

$H_T(F) + H_T(\overline{F^c})$ となることを示せば T が decomposable であることが容易にわかる。 ここで、$H = H_T(F) \oplus H_T(F)^\perp$ だから $H_T(F)^\perp \subset H_T(\overline{F^c})$ を示せばよい。 開集合 $G \supset F$ を任意にとると $\{F^c, G\}$ は $\sigma(T)$ の open covering だから

$$H = \overline{Y_1 + Y_2},\quad \sigma(T|Y_1) \subset F^c,\ \sigma(T|Y_2) \subset G$$

となる $Y_1, Y_2 \in SM(T)$ が存在する。 さて $x \in X_T(\overline{G})^\perp$ を任意にとると $x = \lim(x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$ となる $x_n^{(1)} \in Y_1$, $x_n^{(2)} \in Y_2$ が存在する。 よって

$$0 = P_{\overline{G}}\, x = \lim_{n\to\infty}(P_{\overline{G}}\, x_n^{(1)} + P_{\overline{G}}\, x_n^{(2)}) = \lim_{n\to\infty}(P_{\overline{G}}\, x_n^{(1)} + x_n^{(2)})$$

, 従って

$$x = \lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) - \lim_{n\to\infty}(P_{\overline{G}}\, x_n^{(1)} + x_n^{(2)}) = \lim_{n\to\infty}(x_n^{(1)} - P_{\overline{G}}\, x_n^{(1)})$$

となる。 ここで

$$\sigma_T(P_{\overline{G}}\, x_n^{(1)}) \subset \sigma_T(x_n^{(1)}) \subset \sigma(T|Y_1) \subset F^c$$

だから $x_n^{(1)} - P_{\overline{G}}\, x_n^{(1)} \in H_T(\overline{F^c})$, 従って $x \in H_T(\overline{F^c})$ である。 よって $H_T(\overline{G})^\perp \subset H_T(\overline{F^c})$ だから, $H_T(\overline{G}) \supset H_T(\overline{F^c})^\perp$ となるが $G \supset F$ は任意なので

$$H_T(F) = H_T(\cap \overline{G}) = \cap H_T(\overline{G}) \supset H_T(\overline{F^c})^\perp$$

, 従って $H_T(F)^\perp \subset H_T(\overline{F^c})$ となる。

Theorem. $T \in B(H)$ に対し次は同値である。

(1) $T = N + Q$ となる normal operator N と N と可換な quasinilpotent operator Q が存在する。

(2) T は weak decomposable で (C), (I) をもつ。

(3) T は weak decomposable で，すべての spectral maximal space は T を reduce する。

(4) T は weak decomposable で (B) をもち，任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $\overline{H_T(F)}$ は T を reduce する。

証. (1) ⇒ (4) ⇒ (2) ⇒ (1)，(1) ⇒ (3) ⇒ (2) となることを示す。

(1) ⇒ (4), (3). この証明は知られているが，簡単に示す。詳しくは [2], [3] をみてほしい。(1) より T は scalar part が normal な spectral operator であることがわかるので，T は decomposable で (A), (B), (C) をもつ。$E(\ )$ を N のスペクトル分解とすると，任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し

$$H_T(F) = H_N(F) = E(F)H$$

なので $H_T(F)$ は T を reduce する。また任意の $Y \in SM(T)$ は $Y = H_T(\sigma(T|Y))$ と表わせるので，Y は T を reduce する。

(4) ⇒ (2). Lemma 2 より T は (C) をもつことが分る。 また任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し、$P_F T = T P_F$ となることから，T が (I) をもつことが容易に分る。

(2) ⇒ (1). Lemma 3 より T は decomposable operator で (I) をもつことがわかる。 従って Wadhwa [7] より $T = N + Q$ となる。

(3) ⇒ (2). Lemma 1 より T は (C) をもつから，任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し、$H_T(F) \in SM(T)$ となる。 従って $P_F T = T P_F$ だから T は条件 (I) をもつことが分る。

ここで、$T \in B(H)$ が spectral operator となる必要十分条件は，この定理の (1) をみたす $S \in B(H)$ と similar になることだから，次が得られる。([3])

Corollary. $T \in B(H)$ が spectral operator となる必要十分条件は，T が定理の (1)～(4) のいずれかをみたす $S \in B(H)$ と similar になることである。

注意 2. 条件 (I) は Wadhwa [8] で導入された。Jafarian [6] は定理の (2) ⇒ (1) を，T が reductive という条件の下で示した。また Tanahashi [7] は、定理の (3) ⇒ (1) を T が reductive という条件の下で示した。

注意 3. 複素バナッハ空間 $X = L^{\infty}[0,1]$ 上で、かけざん作用素 $T \in B(H)$

$$(Tx)(t) = t\,x(t) \quad , \ t \in [0,1], \ x \in X$$

を考える。すると [4, P 106] と同じようにして，T は decomposable operator で，$x \in X$ に対し $\sigma_T(x) = \text{ess.sup}\, x$ であることが示される。ここで、通例のように閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して $H_T(F)$ を $X_T(F)$ と表わすとする。すると任意の閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対し $\chi_F(t)$ を F の特性関数とするとき，

$$(P_F\, x)(t) = \chi_F(t)\, x(t) \quad , \ t \in [0,1]$$

で定められる作用素 $P_F \in B(X)$ は $X_T(F)$ への projection で $P_F T = T P_F$ をみたす。（もちろん P_F は self-adjoint ではないが。）従って $X_T(F)$ は T を reduce し，T は (I) をもつことがわかる。しかも，もし $\sigma_T(x) \cap \sigma_T(y) = \phi$ なら，

$$|x(t)+y(t)| = |x(t)|+|y(t)| \quad \text{a.e. } [0,1]$$

だから，$\|x+y\| \geqq \|x\|$，つまり T は (B) をもつ。しかし，T は spectral operator ではない。なぜなら，T が spectral operator なら，その spectral measure $E(\ )$ を考えると，すべての $x \in X$ に対し

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad ,\text{但、} x_n = E(\{0\} \cup [\tfrac{1}{n}, 1])x$$

となるはずである。$x(t) \equiv 1$ を考えよう。すべての閉集合 $F \subset \mathbb{C}$ に対して $E(F)X = X_T(F)$ となるので

$$\sigma_T(x_n) = \text{ess. supp } x_n \subset \{0\} \cup [\tfrac{1}{n}, 1]$$

となる。従って，すべての n に対して

$$\|x - x_n\| = 1$$

となって，これは，矛盾である。従って，この場合には定理に対応する結果が成立しない。

参考文献

[1] E. Albrecht, A characterization of spectral operators on Hilbert Spaces, Glasgow Math. J. 23 (1982) 91-95.

[2] I. Colojoară and C. Foiaş, Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach,

New York, 1971.

[3] N. Dunford and J. Schwartz, Linear operators part III: spectral operators, Wiley-Interscience, New York, 1968.

[4] I. Erdelyi and R. Lange, Spectral decomposition on Banach spaces, Lecture Note in Math. 623, Springer, Berlin, 1977.

[5] A. A. Jafarian, Weak and quasi-decomposable operators, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 22 (1977) 195-212.

[6] A. A. Jafarian, On reductive operators, Indiana University Math. J. 23 (1974) 607-613.

[7] K. Tanahashi, Reductive weak decomposable operators are spectral, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983) 44-46.

[8] B. L. Wadhwa, Decomposable and spectral operators on a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973) 112-114.

[9] B. L. Wadhwa, A note on reductive operators, Acta Sci. Math. 38 (1976) 187-189.