数理解析研究所講究録
第 492 巻 1983 年 28-35

Riesz bundle について

富山大理 平野正之 (Masayuki Hirano)
富山大理 久保文夫 (Fumio Kubo)

1. Introduction. 考える Banach space は全て無限次元，複素のものとする． Banach space X 上の bounded linear operator 全体のつくる Banach algebra を $B(X)$ で表わす． $B(X)$ の中の compact operator 全体のつくる closed two sided ideal を $C(X)$ で，$B(X)$ の $C(X)$ による quotient algebra を $A(X)$ で表わし，natural homomorphism を $\pi: B(X) \to A(X)$ で表わす．

non-zero scalor λ と $T \in C(X)$ により $V = \lambda I - T$ と書ける operator V は Riesz と Schauder を始め多くの人達により研究された． このような operator V の range $\mathcal{R}(V)$ と kernel $\mathcal{N}(V)$ とについては，次のような事実が知られている：

1° $\mathcal{R}(V^k)$: closed subspace of X $(k = 1, 2, \cdots)$,

2° $\operatorname{codim} \mathcal{R}(V^k) < \infty$ (〃),

3° $\dim \mathcal{N}(V^k) < \infty$ (〃),

4° decreasing chain $X = \mathcal{R}(V^0) \supset \mathcal{R}(V) \supset \mathcal{R}(V^2) \supset \cdots\cdots$ は

$\exists n \in \mathbb{N};\ \mathcal{R}(V^n) = \mathcal{R}(V^{n+1}) = \cdots$ なる有限性条件をみたす，

5° ascending chain $\{0\} = \mathcal{N}(V^0) \subset \mathcal{N}(V^1) \subset \mathcal{N}(V^2) \subset \cdots$ は $\exists n \in \mathbb{N};\ \mathcal{N}(V^n) = \mathcal{N}(V^{n+1}) = \cdots$ なる有限性条件をみたす．

また $T \in C(X)$ の spectre $\sigma(T)$ について次の事実も良く知られている：

6° $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T)$ で $\sigma(T)$ の accumulation point は 0 しかない．

$V = \lambda I - T$ がこれらの特性を持つ operator T は，compact operator に限らない．実際，すべての quasinilpotent operator T もこれらの特性を持っている．これら 1°～7° の特性をみたす operator T の class を研究した Ruston はこのような operator を Riesz operator と名付けた．この class の characterization は Ruston を始め数人の人達によって与えられた．

定理 A．$B(X) \ni T$ が Riesz operator である必要十分条件は，任意の $\lambda \neq 0$ に対し $\mathcal{R}(\lambda I - T)$ が closed で

$$\forall \lambda \neq 0;\quad \begin{cases} \operatorname{codim} \mathcal{R}(\lambda I - T) < \infty \\ \dim \mathcal{N}(\lambda I - T) < \infty \end{cases}$$

をみたすことである．

この characterization が λ についての一次の polynomial についての陳述であることに注目して，本講演では，高次の

operator を係数に持つ polynomial について上のような有限性条件を考える．

2. Riesz bundle. $B(X) \ni T_0, T_1, \cdots T_{n-1}$ を係数にもつ polynomial

$$\mathcal{L}(\lambda) = \lambda^n I - \lambda^{n-1} T_{n-1} - \cdots - \lambda T_1 - T_0$$

を <u>polynomial bundle</u> と呼ぶ．$\mathcal{L}(\lambda)$ の <u>companion matrix</u> $\mathbb{L}$ は通常の polynomial の場合に同じく

$$\mathbb{L} = \begin{bmatrix} T_{n-1} & T_{n-2} & T_{n-3} & \cdots & T_2 & T_1 & T_0 \\ I & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & I & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられる direct sum space $X^{(n)} = \sum^{\oplus n} X$ 上の bounded linear operator である．

[定義] Polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ が，任意の $\lambda \neq 0$ に対し $\mathcal{R}(\mathcal{L}(\lambda))$ が closed で

$$\operatorname{codim} \mathcal{R}(\mathcal{L}(\lambda)) < \infty$$

$$\dim N(\mathcal{L}(\lambda)) < \infty$$

をみたす時，Riesz bundle と呼ぶ．

この呼称は，次の定理から妥当と思われる．

[定理]．Polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ の companion matrix を $\mathbb{L}$

とすると，$\mathcal{L}(\lambda)$ が Riesz bundle であるための必要十分条件は $\mathbb{L}$ が $X^{(m)}$ 上の Riesz operator となることである．

証明．$\mathcal{L}(\lambda)$ と $\mathbb{L}$ の間の関係については次の事実が知られている：

$$B_1(\lambda) := I$$

$$B_2(\lambda) := (\mathcal{L}(\lambda) - \mathcal{L}(0))/\lambda$$

$$B_{k+1}(\lambda) := (B_k(\lambda) - B_k(0))/\lambda \qquad (k=2,3,\cdots n-1)$$

$$\mathbb{B}(\lambda) := \begin{bmatrix} -B_1(\lambda) & -B_2(\lambda) & \cdots & -B_{n-1}(\lambda) & -B_n(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C}(\lambda) := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおくと $\mathbb{B}(\lambda)$, $\mathbb{C}(\lambda)$ は λ の任意の値に対し可逆であり，

$$\lambda I_n - \mathbb{L} = \mathbb{B}(\lambda) \begin{bmatrix} \mathcal{L}(\lambda) & & & \\ & I & & O \\ & O & \ddots & \\ & & & I \end{bmatrix} \mathbb{C}(\lambda)$$

の関係をみたしている．この関係から次の range と kernel

の関係が導かれ，定理が証明される：

$$\forall\lambda \neq 0\ ;\ \begin{cases} \operatorname{codim} R(\mathcal{L}(\lambda)) = \operatorname{codim} R(\lambda I_m - \mathbb{L}) \\ \dim N(\mathcal{L}(\lambda)) = \dim N(\lambda I_m - \mathbb{L}). \end{cases} \qquad \square$$

3. Spectral properties. Operator の spectrum 及び point spectrum に類似して polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ の <u>spectrum</u> $\sigma(\mathcal{L}(\cdot))$ 及び <u>point spectrum</u> $\sigma_p(\mathcal{L}(\cdot))$ を定義する：

$$\sigma(\mathcal{L}(\cdot)) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mathcal{L}(\lambda) \text{ は } B(X) \text{ に逆を持たない}\}$$

$$\sigma_p(\mathcal{L}(\cdot)) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 \neq {}^{\exists}x \in X\ ;\ \mathcal{L}(\lambda)x = 0\}.$$

また，operator の essential spectrum の類似として polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ の <u>essential spectrum</u> $\sigma_e(\mathcal{L}(\cdot))$ を次のように定義する：

$$\sigma_e(\mathcal{L}(\cdot)) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \pi(\mathcal{L}(\lambda)) \text{ は } A(X) \text{ に逆を持たない}\}.$$

Riesz operator の種々の spectral property に対応して Riesz bundle の spectral property が得られる．

[定理] Polynomial bundle $\mathcal{L}(\lambda)$ が Riesz bundle であるためには次のいずれか1つをみたすことが必要十分である．

(1) $\sigma_e(\mathcal{L}(\cdot)) = \{0\}$,

(2) $\begin{rcases} \exists \mathcal{K} : \mathbb{C} \to \mathcal{C}(X) : \text{a function.} \\ \exists \mathcal{A} : \mathbb{C}\setminus\{0\} \to B(X) : \text{analytic} \end{rcases}\ ;\ \mathcal{L}(\lambda)^{-1} = \mathcal{K}(\lambda) + \mathcal{A}(\lambda) \quad (\lambda \notin \sigma(\mathcal{L}(\cdot)))$,

(3) $\sigma(\mathcal{L}(\cdot))$ は，0を除いて $\mathcal{L}(\lambda)^{-1}$ の有限位の極である，

(4) $\sigma(\mathfrak{L}(\cdot))$ の 0 でない任意の点 λ_0 は isolated point で operator $(1/2\pi i)\int_{\Gamma_0} \lambda^k \mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\, d\lambda$ $(k = 0, 1, \ldots, 2n-2)$ はすべて finite rank である．但し Γ_0 は λ_0 を spectre の他の部分から分離する積分路とする．

証明．これらの証明には，対応する Riesz operator の spectral property が用いられる．例として (4) を証明する．これに対応する property

(4′) $\sigma(T)$ の 0 でない任意の点 λ_0 は isolated point で

その spectral projection は finite rank である，

は operator T の Riesz 性を特徴付けている．前定理の証明に現れた $\mathfrak{L}(\lambda)$ と $\lambda I_n - \mathbb{L}$ の関係は $\sigma(\mathfrak{L}(\cdot)) = \sigma(\mathbb{L})$ を示しており，一方

$$\mathbb{B}(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} -B_1(\lambda) & -B_{n}(\lambda) & \cdots & -B_2(\lambda) \\ 0 & 0 & \cdots & I \\ \vdots & & \iddots & \\ 0 & I & & 0 \end{bmatrix}$$

及び

$$\mathbb{C}(\lambda)^{-1} = -\begin{bmatrix} \lambda^{n-1}I & \lambda^{n-2}I & \lambda^{n-3}I & \cdots & I \\ \lambda^{n-2}I & \lambda^{n-3}I & & \iddots & \\ \vdots & & \iddots & & \\ I & & & & 0 \end{bmatrix}$$

の行表示及び列表示をそれぞれ,

$$\mathbb{B}(\lambda)^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1(\lambda) \\ Y_2(\lambda) \\ \vdots \\ Y_m(\lambda) \end{bmatrix} \quad 及び \quad \mathbb{C}(\lambda)^{-1} = [X_1(\lambda), \cdots X_m(\lambda)]$$

とすると

$$(\lambda I_m - \mathbb{L})^{-1} = \mathbb{C}(\lambda)^{-1} \begin{bmatrix} \mathfrak{L}(\lambda)^{-1} & & \\ & I & 0 \\ 0 & & \ddots \; I \end{bmatrix} \mathbb{B}(\lambda)^{-1}$$

$$= X_1(\lambda)\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}Y_1(\lambda) + \sum_{j=2}^{m} X_j(\lambda)Y_j(\lambda)$$

が得られ,積分すれば(第2項は analytic だから)

$$(1/2\pi i)\int_{\Gamma_0} (\lambda I_m - \mathbb{L})^{-1} d\lambda$$
$$= (1/2\pi i)\int_{\Gamma_0} X_1(\lambda)\,\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}\,Y_1(\lambda)\,d\lambda$$
$$= \begin{bmatrix} (1/2\pi i)\int_{\Gamma_0}\lambda^{m-1}\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}d\lambda & \cdots & (1/2\pi i)\int_{\Gamma_0}\lambda^{2m-2}\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}d\lambda \\ \vdots & & \vdots \\ (1/2\pi i)\int_{\Gamma_0}\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}d\lambda & \cdots & (1/2\pi i)\int_{\Gamma_0}\lambda^{m-1}\mathfrak{L}(\lambda)^{-1}d\lambda \end{bmatrix}\mathbb{T}$$

を得る.ここに $\mathbb{T} = \begin{bmatrix} I & -T_{m-1} & \cdots & -T_2 & -T_1 \\ 0 & I & \cdots & -T_3 & -T_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & I \end{bmatrix}$ は

可逆であるから,(4) が Riesz bundle の必要十分条件である

ことがわかる. □

[注意] 次のような Riesz bundle の十分条件は Riesz bundle の定義から明らかであることが，内山氏により講演中に指摘された：

(1) $^{\exists} j_0 \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$, $^{\exists} m \in \mathbb{N}$; $T_{j_0}^{m} \in C(X)$ でかつ
$^{\forall} j \in \{0, 1, \cdots, j_0-1, j_0+1, \cdots, n-1\}$; $T_j \in C(X)$

(2) $^{\forall} j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$; $^{\exists} m_j \in \mathbb{N}$; $T_{j}^{m_j} \in C(X)$ でかつ
$T_i T_j = T_j T_i \quad (i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\})$.

実際，どちらの場合でも

(*) $$\lambda^{n-1} T_{n-1} + \cdots + \lambda T_1 + T_0$$

は power compact 従って Riesz operator となるからである．

この事実は更に次のように一般化できる．

(1′) $^{\exists} j_0 \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$; T_{j_0} : a Riesz operator
$^{\forall} j \in \{0, \cdots, j_0-1, j_0+1, \cdots, n-1\}$; $T_j \in C(X)$

又は（もっと一般的に）

(2′) $^{\forall} j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$; T_j : Riesz operator
$T_i T_j \equiv T_j T_i \quad (i, j \in \{0, 1, \cdots, n-1\}) \quad (\mathrm{mod}\ C(X))$

ならば $\mathfrak{T}(\lambda)$ は Riesz bundle である．

実際，どちらの場合にも （(1′) は (2′) の special case）

(**) $$\pi(\lambda^{n-1} T_{n-1} + \cdots + \lambda T_1 + T_0)$$

は quasinilpotent element in $A(X)$ となるからである．