数理解析研究所講究録
第 492 巻 1983 年 55-65

擬逆作用素の2，3の応用

富山大 教育 泉野佐一 (Saichi Izumino)

1．序． Hilbert（あるいはBanach）空間上の有界線形作用素は一般に可逆でないが逆作用素の代用として種々の擬逆作用素が定義される。 たとえばHilbert空間H, Kの間の作用素 $T \in B(H,K)$ に対して

(1) $TXT = T$

(2) $XTX = X$

(3) $(TX)^* = TX$

(4) $(XT)^* = XT$

を満たす $X \in B(K,H)$ が存在するとき，このようなXは一意的であり $X = T^\dagger$ と書かれる。 Tの Moore-Penrose inverse（MP-inverse）と呼ばれている[3]，[11]． 関係式(1)－(4)の全部を満たさなくてもこの一部例えば(1)，(2)，(3)を満たすようなXが存在するときはこれを便宜的に $X = T^{(1,2,3)}$ などと表わしTの(1,2,3)-inverseと呼ぶ。 MP-inverse $T^\dagger$ の存在は条件(1)

あるいはこれと同値なことであるがTの値域ran Tが閉部分空間なることである。ran Tが閉なることを簡単に$T\in(CR)$とかくことにする。$T\in(CR)$のとき$T^*\in(CR)$であり(1)−(4)から$TT^\dagger$, $T^\dagger T$はそれぞれran T, ran T^* $(=(\ker T)^\perp)$への(orthogonal) projectionなることがわかる。

MP-inverse以外の擬逆作用素として，adjointの定義されないBanach空間上での作用素に対してDrazin inverseが考えられる[3]。これは

$$TX=XT,\quad X^2T=X,\quad XT^{k+1}=T^k\quad(\exists\text{最小整数}\ k\geq 0)$$

で定義されるもので存在すれば一意的である。$X=T^D$などと書かれ指数kのDrazin inverseと呼ばれている。しかし，ここでは取り扱わない。

2\. MP-inverseの応用。$T\in B(H,K)$, $y\in K$に対して方程式

$$(2.1)\qquad Tx=y$$

を考える。Tが可逆でないときは一般に一意解はないが，$T\in(CR)$のとき$x_0=T^\dagger y$とおくとき

$$(2.2)\qquad \|Tx_0-y\|\leq\|Tx-y\|\qquad\forall\ x\in H$$

また(2.2)で等号の成り立つのは

$$(2.3)\qquad x=x_0+(1-T^\dagger T)z\qquad\forall\ z\in H$$

不等式(2.2)から(2.3)の x は方程式(2.1)の最小2乗解などと呼ばれている。(2.3)より容易にわかることであるが，任意の最小2乗解 x に対して $\|x_0\| \leqq \|x\|$ となる。これは x_0 が(2.1)の最小ノルム最小2乗解なることを示している。この特性は MP-inverse が多方面において応用される理由となっている。Nashed [11] (1976) には MP-inverse に関連の厖大な参照文献が示されている。ここでは最近の2つの応用を紹介する。

(1) Abstract spline ([10])． $T \in B(H, K)$, M は H の閉部分空間．$x \in H$ に対して，条件

$$y - x \in M, \quad \|Tx\| = minimum$$

を満たす y が存在するときこれを x の (T, M)-abstract spline (a.p.) という。P_M を M への projection として，$y = x - Pz$ とおく．

$$\|Ty\| = \|T(x - Pz)\| = \|Tx - TPz\| = minimum$$

ということから，このときの z は方程式 $(TP)z = Tx$ の最小2乗解にとればよいことがわかる($TP \in (CR)$ と仮定する．)よって(2.3)から $z = (TP)^{\dagger}Tx + \{1 - (TP)^{\dagger}(TP)\}w \quad (w \in H)$ と表わされ，従って

$$\begin{aligned} y &= x - P(TP)^{\dagger}Tx - P\{1 - (TP)^{\dagger}(TP)w\} \\ &= \{1 - (TP)^{\dagger}T\}x + w_1 \quad (w_1 \in \ker T \cap M) \end{aligned}$$

の形に表わされることがわかる。 de Boor [4] では $T \in (C R)$, $\ker T \cap M = \{0\}$ の条件の下で a.s. を取り扱っており，この場合は MP-inverse は使わなくても済む。しかし $\ker T \cap M = \{0\}$ を仮定しないときは MP-inverse を使うと便利であり，a.s. の収束問題を考えるときなどに都合がよい。

(2) Hardy space H^2 における minimum interpolation [5].

H^2 は円板 $D: |z|<1$ 上の解析函数 f で

$$\|f\|^2 = \lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} |f(z)|^2 |dz| < \infty$$

なるものの全体。内積を定義して Hilbert 空間となる。

$$\{z_i\}_{i=0}^{m} \subset D, \quad z_i \neq z_j \ (i \neq j), \qquad \{y_i\}_{i=0}^{m} \subset \mathbb{C}$$

なる $m+1$ 個の data に対して

$$f(z_i) = y_i \quad (i=0, \cdots, m)$$

$$\|f\| = \text{minimum}$$

となるような $f \in H^2$ を見出すというのが問題である。このような解 f は 1920 年代すでに Takenaka によって見出され

$$f_0(z) = \sum_{k=0}^{m} y_k \cdot \frac{B_m(z)}{(z-z_k) B_m'(z_k)}$$

で与えられた。ここで $B_m(z) = \prod_{j=0}^{m} \frac{z-z_j}{1-\bar{z}_j z}$, つまり $z_0, \cdots, z_m$ についての Blaschke product である。Chang [5] によれば $f \in H^2$ に対して

$$\Lambda_m f = (f(z_0), \cdots, f(z_m))$$

とおくと，$\Lambda_m \in B(H^2, \mathbb{C}^{m+1})$ となり

$$X_m(y_0, \cdots, y_m) = f_0(z)$$

によって定まる X_m はちょうど Λ_m の MP-inverse $\Lambda_m^\dagger$ となることを定義式(1)－(4)を実際計算して示した。data $\{z_i\}$, $\{y_i\}$ の個数が無限となる *infinite interpolation* の問題も収束の条件等を適当につけ加えることによって同じような結果が得られることも示した。

3. MP-inverse の収束，連続性．記述を簡単にするため以後 $H=K$，従って取り扱う作用素は $B(H)=B(H,H)$ の中の元とする。$A, B \in (CR)$ に対して次の不等式が知られている。([9], [10], [13] etc.)

(3.1) $\|(AB)^\dagger\| \leqq \|A^\dagger\| \|B^\dagger\| \|(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger\|$

(3.2) $\|A^\dagger - B^\dagger\| \leqq 3 \max\{\|A^\dagger\|^2, \|B^\dagger\|^2\} \|A-B\|$

(3.3) $\|AA^\dagger - BB^\dagger\| < 1$, $\|A-B\| < 1$ のとき

$$\|B^\dagger\| \leqq 2\|A^\dagger\| (1 - \|A^\dagger\| \|A-B\|)^{-1}$$

(3.4) $\|AA^\dagger - BB^\dagger\| \leqq \max\{\|A^\dagger\|, \|B^\dagger\|\} \|A-B\|$

(3.5) $\|(AA^\dagger - BB^\dagger)x\|^2 \leqq \|A^\dagger\|^2 \|(A^* - B^*)(1-BB^\dagger)x\|^2 + \|(A-B)B^\dagger x\|^2$

A_n が A にノルム(強)収束するとき $A_n \xrightarrow{u} A$ ($A_n \xrightarrow{s} A$) と書くことにする。このとき

Lemma 3.1. $A, A_n \in (CR)$, $A_n \xrightarrow{u} A$ とする。このとき次の条件は同値である。

(1) $A_n^+ \xrightarrow{u} A^+$

(2) $\sup_n \|A_n^+\| < \infty$

(3) $A_n A_n^+ \xrightarrow{u} AA^+$

(4) $A_n^+ A_n \xrightarrow{u} A^+A$

これらは(3.1)−(3.4)を用いて示すことができる。強収束については一様有界性の定理と上の(3.5)などを用いて

Lemma 3.2. $A, A_n \in (CR)$, $A_n \xrightarrow{s^*} A$ ($A_n \xrightarrow{s} A$ かつ $A_n^* \xrightarrow{s} A^*$) とする。このとき次の条件は同値である。

(1) $A_n^+ \xrightarrow{s^*} A^+$

(2) $\sup_n \|A_n^+\| < \infty$

応用として，まず前節の a. s. に関連して，

Theorem 3.3 [10]. $T \in (CR)$, $\{P_n\}$ を projection の列で $TP_n \in (CR)$ とする。$S_n = 1 - (TP_n)^+ T$ とおくとき

$$S_n \xrightarrow{s} 1 \iff \sup_n \|S_n\| < \infty \text{ かつ } P_n T^+ T \xrightarrow{s} 0.$$

またこれから

Theorem 3.4 [4]. 前の定理で $\dim \ker T < \infty$ のとき，

$$P_n \xrightarrow{s} 0 \implies S_n \xrightarrow{s} 1$$

$\mathfrak{M}(H)$ によって H の閉部分空間の全体を表わす。$M \in \mathfrak{M}(H)$ に対応する projection P_M を identify することにより $\mathfrak{M}(H)$ に

は B(H) からのノルム位相，強位相などが定義される。$T\in B(H)$ に対して $\mathfrak{M}(H)$ から $\mathfrak{M}(H)$ の中への map

$$\varphi_T(M)=\overline{TM}\ (=\overline{TP_M H})$$

が考えられる。これは T の subspace map と呼ばれる。Longstaff [12] は φ_T が $\mathfrak{M}(H)$ 上でノルム（強）連続となるための必十条件は T が left-invertible なることを示している。φ_T の 1 点 $M_0\in\mathfrak{M}(H)$ でのノルム連続については不等式(3.1)や Lemma 3.1 などを用いて次のことを示すことができる。

Theorem 3.5. $T\in(CR)$, $Q=T^\dagger T$, $\mu=\min\{\|Q^\perp P_{M_0}\|,\ \|QP_{M_0}^\perp\|\}$ とする。このとき

(1) $\mu<1$ ならば φ_T は M_0 で連続，

(2) $TP_{M_0}\in(CR)$ と仮定すれば(1)の逆がいえる。

subspace map φ_T の "Lipschitz constant" に関して(3.1)などを用いて

Proposition 3.6. $\mathfrak{M}_T(H)=\{M\in\mathfrak{M}(H): P_M Q=QP_M\}$ とする。このとき

$$\sup\left\{\frac{\|P_{\varphi_T(M)}-P_{\varphi_T(N)}\|}{\|P_M-P_N\|} : M,N\in\mathfrak{M}_T(H),\ M\neq N\right\}=\|T\|\|T^\dagger\|.$$

4. $\lambda\mapsto(T-\lambda)^\dagger$ の連続性，解析性。 スカラー λ を動かすとき MP-inverse $(T-\lambda)^\dagger$ がどのような振舞をするかということについて少し考えたい。 Apostol [1], Apostol-Clancey

[2] (cf. Herrero [7]) などにおいて, kernel projection $P_{\ker(T-\lambda)}$ の連続性や, right (あるいは left) resolvent $R(\lambda)$ (right resolvent は $(T-\lambda)R(\lambda)=1$, $R(\lambda)-R(\mu)=(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)$ を満たすもの) の存在が論じられている。$T-\lambda\in(CR)$ のとき $P_{\ker(T-\lambda)}=1-(T-\lambda)^{+}(T-\lambda)$ なること, また $R(\lambda)=(T-\lambda)^{(1,2,3)}$ なることからこれらの議論は擬逆作用素と関連の深い話題であることがわかる。

実際これらに関するいくつかの議論は MP-inverse を用いてある程度見通しのよい説明ができるように思われる。ここでは 2, 3 の例を示したい。まず $T-\lambda\in(CR)$ となる λ の集合を考えねばならない。例えば擬 resolvent set

$$\rho_g(T)=\{\lambda:\ T-\lambda\in(CR)\}$$

などを考えてみることもできる [8] がこれは必ずしも開集合とならずあまり扱いやすくない。T が Fredholm や semi-Fredholm のとき閉値域をもつことから Apostol [1] のようにもっぱら

$$\rho_F(T)=\{\lambda:\ T-\lambda \text{ は Fredholm}\}$$

$$\rho_{SF}(T)=\{\lambda:\ T-\lambda \text{ は semi-Fredholm}\}$$

の上で $T-\lambda$ を取り扱うことにする。$\rho_l(T)$, $\rho_r(T)$ はそれぞれ T の left-, right-resolvent set とする。Apostol に従って, $\mu\in\rho_{SF}(T)$ において函数 $\lambda\to P_{\ker(T-\lambda)}$ が連続のとき, μ を T の正則点と呼ぶ。T の正則点全体を $\rho_{SF}^{r}(T)$ とかく。また不

連続点をTの特異点と呼びその全体を$\rho_{SF}^{s}(T)$と書く。正則点に関して Apostol [1] は次のことを示している。

Theorem 4.1. $\mu \in \rho_{SF}(T)$とする。次の条件は同値である。

(1) μはTの正則点

(2) $\ker(T-\mu) \subset \bigvee_{\lambda \neq \mu} \ker(T-\lambda)$ ($\bigvee$は closed linear span)

(3) $\lambda \to \mathrm{min\,ind}(T-\lambda)$は$\lambda=\mu$で連続

$(\mathrm{min\,ind}(T-\lambda) = \min\{\dim\ker(T-\lambda), \dim\ker(T-\lambda)^*\})$

先に示したように$P_{\ker(T-\lambda)} = 1-(T-\lambda)^\dagger(T-\lambda)$であり，これと Lemma 3.1 等から上の(1)−(3)は更に次の(4)−(6)と同値なることがわかる。

(4) $\lambda \to (T-\lambda)^\dagger$は$\lambda=\mu$で連続

(5) $\limsup_{\lambda\to\mu} \|(T-\lambda)^\dagger\| < \infty$

(6) $M = \bigvee_{\lambda \neq \mu} \ker(T-\lambda)$, $T = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$を$M \oplus M^\perp$についての matrix 表現とすれば $\mu \in \rho_r(A) \cap \rho_l(B)$

(5), (6) から直ちにわかることとして

Corollary 4.2. $\rho_{SF}^{r}(T^*) = \rho_{SF}^{r}(T)^*$ ($=\rho_{SF}^{r}(T)$の元の複素共役全体)

Corollary 4.3. $\rho_{SF}^{r}(T)$は開集合

Apostol は特異点修正の定理([1, Theorem 4.5])として，

$\forall\, T \in B(H)$に対して$\exists$ compact $K \in B(H)$で

$$\mathrm{min\,ind}(T+K-\lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \rho_{SF}(T) (= \rho_{SF}(T+K))$$

を示している。これは先の定理からわかるように$\lambda \to (T+K-\lambda)^\dagger$

がすべての $\lambda \in \rho_{SF}(T)$ に対して連続となるように適当な K が選べることを示している。解析的な性質に関しては [1] の中に次のような結果が示されていることは注意したい。

Proposition 4.5. Ω を $\rho_r(T)$ の連結成分, $x \in H$, $\{\lambda_n\}$ は Ω の中の点列で Ω 内に集積点をもつとする。このときもし

$$P_{\ker(T-\lambda_n)} x = 0 \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

ならばすべての $\lambda \in \Omega$ に対して $P_{\ker(T-\lambda)} x = 0$。

この事実は μ を $\{\lambda_n\}$ の一つの集積点として, $|\lambda - \mu| < \|(T-\lambda)^+\|^{-1}$ に対して $R(\lambda) := (T-\mu)^+\{1-(\lambda-\mu)(T-\mu)^+\}^{-1}$ が T の right resolvent となり解析的なることからも説明できる。right resolvent の存在について Apostol-Clancey [2] は次のことを示した。

「$\forall \varepsilon > 0$ に対して適当な countable $S_\varepsilon \subset \rho_r(T) \cap \{\lambda : \mathrm{dist}(\lambda, \partial\rho_r(T)) \leqq \varepsilon\}$ を選べば, T の right resolvent が $\Omega_\varepsilon := \rho_F(T) \cap \rho_r(T) \setminus S_\varepsilon$ 上に存在する。」

5. 附記。 T が normal のとき, $0 \in \sigma(T)$ かつ 0 が $\sigma(T)$ の孤立点なるときは, $T \in (CR)$ で, ある invertible な S を用いて $T = 0 \oplus S$ と(直交)直和分解できる。これに対して, T が decomposable で $0 \in \sigma(T)$ かつ 0 が $\sigma(T)$ の孤立点なるときは T は quasinilpotent Q と invertible S を用いて $T = Q \oplus S$ と直和分解できることを Erdelyi [6] は示している。

References

[1] C. Apostol, The correction by compact perturbations of the singular behavior of operators, Rev. Rom. Math. Pures et Appl. 21 (1976),155-175.

[2] C. Apostol and K. Clancey, On generalized resolvents, Proc. Amer. Math. Soc. 58 (1976), 163-168.

[3] A. Ben-Israel and T. N. E. Greville, "Generalized Inverses: Theory and Applications", Wiley, New York, 1974.

[4] C. de Boor, Convergence of abstract splines, J. Approx. Theory 31 (1981), 80-89.

[5] E. Chang, The generalized inverses and interpolation theory, in "Recent Applications of Generalized Inverses" (S. L. Campbell, Ed.), Pitman, New York, 1982.

[6] I. Erdelyi, Spectral decomposition for generalized inversions, ibdem.

[7] D. A. Herrero, "Approximation of Hilbert Space Operators", Pitman, Boston and London, 1982.

[8] S. Izumino, Inequalities on operators with closed range, Math. Japon. 25 (1980), 423-429.

[9] S. Izumino, The product of operators with closed range and an extension of the reverse law, Tôhoku Math. J. 34 (1982), 43-52.

[10] S. Izumino, Convergence of generalized inverses and spline projectors, J. Approx. Theory, to appear.

[11] M. Z. Nashed (Ed), "Generalized Inverses and Applications", Academic Press, New York and London, 1976.

[12] W. E. Longstaff, Subspace maps of operators on Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), 195-201.

[13] G. W. Stwart, On the perturbations of pseudo-inverses, projections, and linear squares problems, SIAM Rev. 19 (1977), 634-662.