数理解析研究所講究録
第493巻 1983年 1-6

Stractural stability of Contracting smooth mappings

京大理　中居　功　(Isao Nakai)

以下に、可微分写像の図式の安定性の問題に対して、図式がサイクリックな場合の定理を示す。可微分な自己写像 $f: M \to M$ の構造安定性の問題は この特殊な場合として含まれることを始めに注意しておく。

向きづけられたグラフとは組 $G=(V, L, \alpha, \beta)$ のことを言う。ここで V, L は集合、$\alpha, \beta: V \to L$。V の要素を頂点、L の要素を辺と呼び、$l: \alpha(l) \to \beta(l)$ と書く。$M=(M_v)_{v\in V}$ を可微分多様体の組とする、(ここで M_v に角を許す)。$C^\infty(G, M) = \prod_{l\in L} C^\infty(M_{\alpha(l)}, M_{\beta(l)})$ とし、Whitney位相から定まる強位相を(box topology)を入れる。$f=(f_l)_{l\in L} \in C^\infty(G, M)$ を G 上(或いは (G, M) 上)の可微分写像と呼ぶ。

定義　$f=(f_l)_{l\in L}$, $g=(g_l)_{l\in L} \in C^\infty(G, M)$ が C^r-同値であるとは、M_v の角の index を保つ C^r-同値 $\varphi_v: M_v \to M_v$, $v\in V$ が存在して $\varphi_{\beta(l)} \circ f_l = g_l \circ \varphi_{\alpha(l)}$, $l \in L$ となることを言う。

定義　$f\in C^{\omega}(G,M)$ が C^r-安定 であるとは、f の C^r-同値類が f の $C^{\omega}(G,M)$ の中での近傍をなすことをいう。

今、一般的な次の問題について考える。

問題　C^r-安定な写像は $C^{\omega}(G,M)$ の中で稠密か。

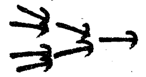
グラフ G がサイクルを含まない場合は Dufour, Nakai により調べられている。以下では G がサイクルの場合に考察する。

長さ k のサイクルとは向きづけられたグラフ $G=(V,L,\alpha,\beta)$、$V=\{v_1,\dots,v_k\}$, $L=\{l_1,\dots,l_k\}$, $(\alpha(l_i),\beta(l_i))=(v_i,v_{i+1})$, $(v_{k+1}=v_1)$ のことをいう。以下で $M=(M_i)_{i=1,\dots,k}$, $\dim M_i=m$, M_i : コンパクトとする。

定義　$f\in C^{\omega}(G,M)$ が C^r-強安定とは f の近傍 $\mathcal{V}\subset C^{\omega}(G,M)$ が存在し任意の自然数 n に対して次の性質 P_n を満たすことをいう: P_n: 任意の $f^i=(f^i_1,\dots,f^i_k)\in\mathcal{V}$, $i=1,\dots,n$ に対して f^i を合成した長さ nk のサイクル $(f^1,\dots,f^n): M_1\to\cdots\to M_k\to M_1\to\cdots\to M_k\to\cdots\to M_k$ は $\overbrace{(f,\dots,f)}^{n}\in C^{\omega}(G^n,M^n)$ と C^r-同値になる。ここで $G^n=(V^n,L^n)$, $V^n=\{v^i_j\mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,k\}$, $L^n=\{l^i_j\mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,k\}$, $l^i_j: v^i_j\longrightarrow v^i_{j+1}$

($v^{i}_{k+1} = v^{i+1}_{1}$, $v^{n}_{k+1} = v^{1}_{1}$).

$f\in C^\infty(G,M)$ の位相構造は、主に f の軌道の位相的構造と、f の軌道に沿った特異性の合成の位相的構造とに分けることができる。前者は特別な場合に力学系、iteration の問題として古くから調べられている。また後者の問題に対しては、有限の長さの軌道の場合に [N1, N2, N3] の中で用いられた合成写像に関する基本的手法をそのまま適用することができる。これらを組み合せた考察は f の位相的構造に対して多くの結果を産むと思われる。

$f\in C^\infty(G,M)$ が contracting とは、ある M_i 上のリーマン計量と $1>\lambda_i>0$ に対して $d(f^k(x),f^k(y))<\lambda_i\, d(x,y)$, $x,y\in M_i$, $i=1,\dots,k$ となることをいう。ここで $f^k(x)=f_{k+i-1}\circ\cdots\circ f_i(x)$, ($f_{k+j}=f_j$), $x\in M_i$。f が contracting のとき、f の軌道構造は比較的単純となり、f の位相的性質は、f の軌道に沿った特異性の位相的性質によってほぼ決定されている。
一般のグラフ G の場合、G が有限、連結で  の型の時、頂点 $v\in T$ に置かれた多様体 M_v の次元が矢線の方向に沿って増加ならば、C^∞ 安定性が $C^\infty(G,M)$ の中で generic に成立する ([N1, N2, N3])。また f がサイクルで contracting ならば、f の枝(branch)はすべて有限木となる。これらのことを

考え合せれば，generic な contracting な $f\in C^\infty(G,M)$ が C^0-安定であることは極めて自然なことだろう。実際，我々は次の定理を得た。

定理　$C^\infty_{cont}(G.M)$ の中で強安定な写像は open dense な部分集合をなす。（ここで $C^\infty_{cont}(G.M)$ は contracting な写像のなす $C^\infty(G,M)$ の開部分集合を表す，また G はサイクル，$M=(M_i)_{i=1,\dots,k}$，$\dim M_i=m$，M_i：コンパクト）。

以下に簡単に証明の方法を示す。$X\subset\bigcup_{v\in V}M_v$ を部分集合とする。このとき自然に $f:x\longrightarrow f(x)$ を向きづけられた辺とみなすことにより $(X\cup\{f_e(x)\mid x\in X\cap M_{\alpha(e)}\},\{f_{e,x}\mid x\in X\cap M_{\alpha(e)}\})$ は有向グラフとなり，X を f の木と呼び $f_X=\{f_{e,x}\mid x\in X\cap M_{\alpha(e)}\}$ $(\in C^\infty(X,M_X))$ を f の X に沿った写と呼ぶ。f の stratification とは M_i の Whitney stratification $\mathcal{S}_i$ の組 $\mathcal{S}=(\mathcal{S}_i)$ で $f_i:(M_i,\mathcal{S}_i)\rightarrow(M_{i+1},\mathcal{S}_{i+1})$ が stratified map になるものをいう。$x\in M_{\alpha(e)}$ に対し $x^1\in M_{\beta(e)}$ を $f_e(x)$ で定義し，x^i, $i=1,\dots$ を $x^{i+1}=(x^i)^1$ で定義する。$fix_i(f)=\{x\in M_i\mid x^k=x\}$，$\widetilde{fix_i}(f)=\{x\in M_i\mid\exists\ell,\ \text{s.t.},\ x^{\ell+k}=x^\ell\}$。$f$ が contracting ならば $fix_i(f)$ は一点からなり，$\widetilde{fix_i}(f)$ は高々有限となる。$X_x=\{x'\in M_i,\ i=1,\dots,k\mid\exists\ell\geq 0,\ \text{s.t.},\ (x')^\ell=x\}$ とし，X_x を x 上の枝と

呼ぶ。 f が contracting ならば X_x はすべて有限となる。

Generic な $f \in C^\infty_{cont}(G,M)$ に対して，枝 X_x, $x \notin \mathrm{fix}_i(f)$, $i=1,\dots,k$ に沿った芽 f_{X_x} は stratification $\mathcal{S}(f_{X_x}) = (\mathcal{S}_{x'}(f_{X_x}))_{x' \in X_x}$ を持つ。 そして $\mathcal{S}_x(f_{X_x i})$, $x \notin \widehat{\mathrm{fix}_i}(f)$ は十分大きな $i \in \mathbb{N}$ に対して stable となる [N_1, N_2, N_3, N_4]，ここで $\mathcal{S}_{x'}(f_{X_x})$ は $M_{x'}$ の stratification の芽。 [N_4] によれば stable となる数を x に関係なく $H \in \mathbb{N}$ と評価できる。芽 $\mathcal{S}_x(f_{X_x H})$ は $M_i - \widehat{\mathrm{fix}_i}(f)$ の stratification $\mathcal{S}_i(f)$ を張り，これに関して f は stratified map となる。 今 f に対してある種の横断正則性を仮定すれば $\mathcal{S}_i(f)$ は f の摂動 f_t に対して trivial となり Thom, Mather の isotopy の方法を用いて f_t の自明化を作ることができる。 このことから f の安定性が従う。 強安定性も同様に考察される。

[F] J. E. Franke: Structural Stability of Smooth Contracting Endomorphisms on Compact Manifolds Astérisque 31 (1976).

[N_1, N_2] I. Nakai: Structural Stability of composed mappings I.II. Preprint.

[N3] —— : Structural Stability of Composed mappings on manifolds with corners. In preparation.

[N4] —— : Structural Stability of Smooth contracting endomorphisms. Preprint.