数理解析研究所講究録
第 493 巻 1983 年 20-38

Normal forms for vectorfield singularities

京大数養部 宇敷 重広 (Shigehiro Ushiki)

§0. 研究の背景

分岐理論の観点から，様々な非線型現象の大域的な分岐ダイアグラムを調べる研究が，近年盛んに行なわれている。非線型常微分方程式系，あるいはベクトル場が，ストレンジ・アトラクタ等の，複雑な挙動を伴なう解をもつとき，そうしたシステムの分岐は極めて複雑であり，従来の数学的手法によっては大域的分岐像の把握が困難である。この困難の一因として，ベクトル場の分岐に関する，「普遍開折」の理論が整備されていないことがあげられる。この方向での研究に関して，すでに様々な困難が指摘されている。第一に，関数および写像の分岐理論（特異点の理論）において基本的な役割を果した，いわゆる Thom-Mather の理論に見られるような『代数化』がうまくゆかないこと。第二に，いわゆる『有限決定性』が一般には成立しないこと。そして第三に，べ

クトル場の分岐には，局所的な解析に持ち込みえない，大域的構造にかかわる諸現象が関係する場合が多いことである。

しかしながら，ベクトル場の，とくに多次元空間内における，退化した特異点について，何らかの意味での標準形と，解析の理論を構築することは，理論的にも，応用上からも必須の問題である。以下において，ベクトル場の特異点を，座標変換によって，できるだけ簡単な形に変形する，という問題について考察するが，その前に，ひとつだけ，この研究をすすめる途上で気のついたことを述べておきたい。

たとえば，ベクトル場の特異点の線型部の固有値がひと組の純虚数と，ひとつの零を持つ場合を考えよう。こうした特異点は，$\mathbb{R}^n$上のベクトル場の分岐問題において，余次元2の特異性である。すなわち，2パラメータの族においては，摂動によって解消することのできないものである。しかるに，（少なくともC^∞-級の同値関係のもとで考えるとして）この特異点は，余次元無限大でもある。いま，「余次元」という語を不用意に2通りに使ったが，それはつぎのような意味である。線型部の固有値だけに着目した場合，上記のような固有値となるもののなす集合が，ベクトル場全体の集合の中で余次元が2である。また，特異点の近傍での，C^∞-局所微分同相によって変換可能なものを同値と見なすような分類のも

とでは，こうした特異点はすべて余次元無限大であって，「普遍開折」はつねに無限個の開折パラメータを含むのである。その意味で，この特異点は余次元無限大なのである。

この例からもわかるように，特異点を開折するパラメータがたくさんあるとき，そうしたパラメータのうちでも，ある意味で，その重要さが異なると考えられる場合もあるのである。開折パラメータの寄与を評価し，位置づけることは容易ではないが，さしあたって，開折にかかわる摂動分の次数をその目安と考えることにした。これはひとつの作業仮説である。

§1. ベクトル場のジェットとリー群の作用

$\mathbb{R}^n$（あるいは $\mathbb{C}^n$）の，原点の近傍で定義された，なめらかなベクトル場の芽のなすリー代数を $\mathfrak{X}$ で表わす。$\mathfrak{X}$ に属する，ふたつのベクトル場の芽 $\tilde{X}, \tilde{Y}$ に対して，それらのリー・ブラケット積は，代表元をえらんで，

$$[X, Y] = XY - YX$$

の定める芽として与えられる。以下において，リー・ブラケットの計算が重要な役割をになうことになるので，あえて，成分による表示をここに記しておきたい。簡単のため，∂_i によって，ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ をあらわす。X および Y が

原点の近傍において，それぞれ $x=(x_1,\cdots,x_n)$ の関数 f_i，g_i によって，

$$X=\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\partial_i \quad , \quad Y=\sum_{i=1}^{n} g_i(x)\partial_i$$

と表われるとする。このとき，$[X,Y]$ は，

$$[X,Y]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[\,f_i(x)\partial_i,\ g_j(x)\partial_j]$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\Big(f_i(x)\cdot(\partial_i g_j)(x)\,\partial_j - g_j(x)\cdot(\partial_j f_i)(x)\partial_i\Big)$$

となる。

つぎに，ベクトル場のジェットのなすリー環を考える。$\mathcal{X}$ の部分集合

$$\mathfrak{m}_k=\{X\in\mathcal{X} \mid X=O(|x|^k)\} \qquad k=1,2,\cdots$$

を考える。$\mathfrak{m}_k$ はすべて $\mathcal{X}$ の部分リー環となる。

<u>命題</u> $\mathfrak{m}_k$ は $\mathfrak{m}_1$ のリー・イデアルである。

なぜなら，$X\in\mathfrak{m}_k$，$Y\in\mathfrak{m}_1$ のとき，$[X,Y]=-[Y,X]\in\mathfrak{m}_k$ となるからである。もっと一般に，$X\in\mathfrak{m}_k$ $Y\in\mathfrak{m}_l$ のとき，$[X,Y]\in\mathfrak{m}_{k+l-1}$ となる。

<u>定義</u> $H^k=\mathfrak{m}_1/\mathfrak{m}_{k+1}$.

H^k は商リー代数である。H^k に自然に定義されるリー・ブラケットを $[\ ,\ ]^k$ と書くことにする。H^k の元 X^k は，原点において零となるベクトル場の k-次のジェットである。ジェット空間のなす，自然なファイブレーションの列

$$0 \leftarrow H^1 \leftarrow H^2 \leftarrow H^3 \leftarrow \cdots \leftarrow H^k \leftarrow H^{k+1} \leftarrow \cdots$$

がある。このファイブレーション $H^k \to H^{k-1}$ のファイバーを H_k であらわす。R^nの座標を固定して考えると，H_kは，k次の斉次多項式によって定義されるベクトル場のなす線型空間と同一視することができる。

$$H^k = H_1 \oplus \cdots \oplus H_k$$

と分解される。

R^n（あるいは C^n）の，原点を原点にうつす局所微分同相写像のk次のジェットのなすリー群を $\mathcal{D}^k$ であらわそう。$\mathcal{D}^1$ は $GL(R^n)$（あるいは $GL(C^n)$）にほかならない。リー群の準同型の列

$$\mathcal{D}^1 \leftarrow \mathcal{D}^2 \leftarrow \mathcal{D}^3 \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{D}^k \leftarrow \cdots$$

がある。これら準同型写像の核はすべて可換群である。H^kは$\mathcal{D}^k$ のリー環である。

$X \in \mathcal{X}$ に対して，そのk-jetを X^k であらわし，k次の斉次部分を X_k であらわそう。φが，原点を動かさない，R^n（C^n）の局所可微分同相写像であるとする。φ^kを，そのk次のジェットとする。ベクトル場 X は，座標変換 φ によって，ベクトル場

$$\varphi_* X = d\varphi(X(\varphi^{-1}))$$

に変換される。これらのk次のジェットをとることによって，$\mathcal{D}^k \ni \varphi^k$, $H^k \ni X^k$ に対して，ベクトル場のkジェット

$$Ad^k(\varphi^k)X^k(x) = d(\varphi^k)(X^k((\varphi^k)^{-1}(x)))$$

が，$k+1$次以上の高次の項を無視すれば，定まってくる。こうして，リー群 $\mathcal{D}^k$ が，ベクトル空間 H^k に作用していると考える。

ベクトル場のkジェット $X^k \in H^k$ に対して，$\mathcal{D}^k$ の作用による軌道を $\mathcal{D}^k(X^k)$ と書くことにする。

$$\mathcal{D}^k(X^k) = \{Ad^k(\varphi^k)X^k \mid \varphi^k \in \mathcal{D}^k\}$$

である。この集合は，H^k の部分多様体である。$X \in \mathcal{X}$ をひとつ固定し，そのジェットを考えれば，$X^i \in H^i$ について，ジェットの自然な射影によって，

$$X^1 \leftarrow X^2 \leftarrow X^3 \leftarrow \cdots \leftarrow X^k \leftarrow X^{k+1} \leftarrow \cdots$$

となっている。ジェットの自然な射影と，群 $\mathcal{D}^k$ の作用とは可換なので，サブマージョンの列

$$\mathcal{D}^1(X^1) \leftarrow \mathcal{D}^2(X^2) \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow \mathcal{D}^k(X^k) \leftarrow \cdots\cdots$$

が得られる。

<u>定義</u>　軌道空間 $H^k/\mathcal{D}^k$ の代表元のなす集合を，k次の標準形と呼ぶ。

標準形のとり方は一意的ではない。H^1 は，$n \times n$ 型行列

全体のなす集合と同型である。ジョルダン標準形全体のなす集合は1次の標準形である。k次の標準形を $N^k \subset H^k$ とすれば，明らかに，つぎの形の定理が成り立つ。

<u>定　理</u>　任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して，原点のまわりの座標変換 φ で，$Ad^k(\varphi^k)X^k \in N^k$ となるようなものが存在する。φ のとり方は一意的ではないが，$Ad^k(\varphi^k)X^k$ は，X に対して一意的に定まる。

つぎに，バーサル・ファミリィについて述べる。

<u>定　義</u>　Λ を，有限次元のユークリッド空間（$\mathbb{R}^r$ あるいは $\mathbb{C}^r$）の原点の近傍とする。$A : \Lambda \to H^k$ を，なめらかな写像で $A(0) = X^k$ となるものとする。A が X^k において $\mathcal{D}^k(X^k)$ に横断的に交わるとき，A は X^k のk次のバーサル・ファミリィであるという。

k次のバーサル・ファミリィについて，つぎの形の定理が成り立つ。

<u>定　理</u>　$A : \Lambda \to H^k$ を X^k のk次のバーサル・ファミリィであるとする。このとき，X の任意の変形 $X_\mu = X + Y_\mu$，$\mu \in \mathbb{R}^m$ (or $\mathbb{C}^m$)，$Y_0 = 0$ に対して，連続写像 $\gamma : (\mathbb{R}^m, 0) \to (\Lambda, 0)$ と，μ に連続的に依存する局所微分同相写像の族 $\varphi_\mu : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$，$\varphi_0 = id.$ が存在して，$Ad^k(\varphi_\mu^k)X_\mu^k = A(\gamma(\mu))$ となる。

§2. Jordan標準形とアーノルドのバーサル・ファミリィ

ベクトル場の標準形の理論の観点から，行列のジョルダン標準形の理論と，その一般化であるアーノルドのバーサル・ファミリィの理論をふりかえってみよう。すでに述べたように，H^1 は行列全体のなすベクトル空間と同一視することができ，$\mathcal{D}^1$ は GL と同型である。H^1 上への，$\mathcal{D}^1$ の作用は，

$$Ad^1 : \mathcal{D}^1 \times H^1 \longrightarrow H^1$$

と表わすことができる。$P \in \mathcal{D}^1$, $X^1 \in H^1$ に対して，$Ad^1(P, X^1) = Ad^1(P)X^1 = PX^1P^1$ となっている。

$X^1 \in H^1$ をひとつ固定して，$\mathcal{D}^1$ の作用による X^1 の軌道 $\mathcal{D}^1(X^1)$ を考えよう。この多様体は，サブマージョンの像

$$Ad^1(*, X^1) : \mathcal{D}^1 \to H^1 \supset \mathcal{D}^1(X^1)$$

である。X^1 における $\mathcal{D}^1(X^1)$ の接空間は，導写像

$$ad^1(*, X^1) : H^1 \to H^1$$

の像 $ad^1(H^1, X^1)$ に一致する。ここで H^1 は $\mathcal{D}^1$ のリー環と考えている。$Y^1 \in H^1$ に対して，$ad^1(Y^1, X^1) = [Y^1, X^1] = Y^1X^1 - X^1Y^1$ によって線型写像 $ad^1(*, X^1)$ が定義されているのである。この線型写像の核は，X^1 と可換な線型ベクトル場から成る。これを $\Sigma^1(X^1)$ と書く。この線型写像の像を $B^1(X^1)$ で表わそう。$B^1(X^1)$ は，X^1 におけ

る, $\mathcal{D}'(X')$ の接空間であり, 線型空間として $H'/\mathcal{B}'$ と同型である。

H^1の各点において, $\mathcal{D}'(X')$ の接空間 $B'(X')$ を考えることができる。したがって, 双一次形式

$$ad^1 : H^1 \times H^1 \longrightarrow H^1$$

は, H'のすべての点 X' において, H'の接空間の部分空間 $B'(X')$ が対応する, ある種の部分空間の場を定義していると考えることができる。$\mathcal{D}'$ の軌道は, 各点において, この部分空間を接空間とするような, いわば積分多様体と見なせる。この双一次形式を計算すれば, 容易に(低次元の場合)ジョルダン標準形が得られる。また, アーノルドによる, 1次のバーサル・ファミリィも, X^1 において $B^1(X')$ に横断的な族を構成することによって得られるのである。

ここで述べた, 1次の標準形(=ジョルダン標準形)と, 1次のバーサル・ファミリィ(=アーノルドのバーサル・ファミリィ)は, われわれの高次の標準形および高次のバーサルファミリィの理論の雛形である。以下において, 順次計算を遂行するための手順を述べよう。

§3. 標準形のファイブレーション

ジェット空間のあいだの自然な射影と, ジェット空間への

リー群$\mathcal{D}^k$の作用とは可換である（下の可換図式をみよ。図において右向きの矢印は群の作用を表わし，下向きの矢印はkジェットを$l+1$次以上の項を無視してlジェットと見なす自然な射影からえられる写像である）ので，X^kの$\mathcal{D}^k$に

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^k \times H^k & \longrightarrow & H^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{D}^l \times H^l & \longrightarrow & H^l \end{array}$$

よる軌道$\mathcal{D}^k(X^k)$はX^lの$\mathcal{D}^l$による軌道$\mathcal{D}^l(X^l)$にうつされる。標準形を，軌道空間と同一視すれば，写像の列

$$H^1/\mathcal{D}^1 \longleftarrow H^2/\mathcal{D}^2 \longleftarrow H^3/\mathcal{D}^3 \longleftarrow \cdots$$

がえられることになる。

1次の標準形N^1はジョルダン標準形として良く知られている。$(k-1)$次の標準形N^{k-1}が既知であるとして，k次の標準形N^kを求めよう。$N^{k-1}\subset H^{k-1}$，$N^k \subset H^k$，

$$N^{k-1} \approx H^{k-1}/\mathcal{D}^{k-1} \longleftarrow H^k/\mathcal{D}^k \approx N^k$$

である。$X^{k-1} \in N^{k-1}$とし，この射影によってX^{k-1}にうつされるファイバーを$N^k(X^{k-1})$と書くことにする。$(k-1)$ジェットがX^{k-1}に等しい，ベクトル場のkジェット全体は，

$$X^k = X^{k-1} + X_k \quad , \quad X_k \in H_k$$

の形をしている。$\mathcal{D}^{k-1}$ の元のうち，X^{k-1} を動かさないもの，すなわち，$\varphi^{k-1}\in\mathcal{D}^{k-1}$ で，$Ad^{k-1}(\varphi^{k-1})X^{k-1}=X^{k-1}$ となるようなもののなす部分群を $\Delta^{k-1}(X^{k-1})$ で表わそう。自然な射影 $\mathcal{D}^{k}\to\mathcal{D}^{k-1}$ によって $\Delta^{k-1}(X^{k-1})$ にうつされる元からなる，$\mathcal{D}^{k}$ の部分群を $\Delta^{k}(X^{k-1})$ と書く。

$(k-1)$ ジェットが X^{k-1} であるような k 次標準形の集合 $N^{k}(X^{k-1})$ は，軌道空間

$$(X^{k-1}+H_k)/\Delta^{k}(X^{k-1})$$

に同型である。したがって，群作用

$$\Delta^{k}(X^{k-1})\times(X^{k-1}+H_k)\longrightarrow(X^{k-1}+H_k)$$

について，その軌道を考えればよい。

前節で述べたのと同様にして，線型空間 $X^{k-1}+H_k$ 上に，部分空間の場が，線型・アファイン写像

$$(\Sigma^{k-1}(X^{k-1})\oplus H_k)\times(X^{k-1}+H_k)\to H_k$$

によって定義される。ここで，

$$\Sigma^{k-1}(X^{k-1})=\{Y^{k-1}\in H^{k-1}\mid[Y^{k-1},X^{k-1}]^{k-1}=0\}$$

であり，$\Sigma^{k-1}(X^{k-1})\oplus H_k$ は $\Delta^{k}(X^{k-1})$ のリー環である。また，この写像の値域は $X^{k}=X^{k-1}+X_k$ に対する，$X^{k-1}+H_k$ の接空間である。写像は，$Z^{k-1}+Y_k$，$X^{k-1}+X_k$ に対して，リー・ブラケットによって，

$$[Z^{k-1}+Y_k,X^{k-1}+X_k]^{k}=[Y_k,X_1]+\sum_{i=2}^{k-1}[Z_i,X_{k-i+1}]$$

$$+[Z_1, X_k]$$

によって定義される。こうして定義される部分空間場を簡単化していって標準形が計算できる。上の式を見て，すぐに気がつくのは，$Y_k \in H_k$ に対しては，他に何の制限もつかないので，$X^k = X^{k-1} + X_k$ における Δ^k の軌道は，X_k によらないで，その接空間がつねに一定の部分空間

$$B_k(X') = [H_k, X_1]$$

を含んでいることである。それゆえ，標準形を考察するとき，この部分空間の場のかわりに，$B_k(X')$ を法としてえられる商空間 $X^{k-1} + H_k / B_k(X')$ の上で定義される部分空間の場について考察をすすめることができる。

この他にも，部分空間の場が簡約できる場合がいくつかある。これらを次節でまとめておこう。

§4. <u>部分空間場とその簡約</u>

V, W を有限次元の線型空間とし，$U: V \times W \to W$ を双一次写像とする。$w \in W$ に対し，$U(V, w)$ は W の部分空間を定める。これによって定まる W 上の部分空間場は，W の各点に対して，接空間が $U(V, w)$ に一致するような「積分多様体」が存在するとき，積分可能であるという。U が W 上の積分可能な部分空間場を与えるとき，積

分多様体の集合を W/U で表わそう。

<u>命題</u> 双一次形式 $U: V\times W \to W$ が積分可能であるための必要十分条件は，V の元 v を $U(v,*): W\to W$ によって W から W への線型写像と見なし，V を $L(W, W)$ の部分空間と考えて，V が Lie-部分代数であることである。

<u>定義</u> $V=V'\oplus V''$, $W=W'\oplus W''$ と直和分解されていて，双一次形式 $U: V\times W \to W$ が積分可能であり，かつ，$U=U'\oplus U''$ と成分表示したとき，

$$U'(V''\times W)=0,\quad U'(V\times W'')=0$$

が成り立つとき，U は<u>分解可能</u>であるという。このとき，

$$U^*: V'\times W' \longrightarrow W'$$

を，$U^*(v',w')=U'(v'\oplus 0, w'\oplus 0)$ で定義し，これを U の<u>部分場</u>と呼ぼう。

<u>定理</u> $U: V\times W \to W$ を，分解可能な，積分可能双一次形式とし，$U^*: V'\times W' \to W'$ を，その部分場とする。$p: W\to W'$ を射影としたとき，これは写像

$$p_*: W/U \longrightarrow W'/U^*$$

を誘導する。

<u>定理</u>（商部分空間場）S を R^r 上の，積分可能な部分空間場とする。B を，R^r 上の定部分空間場とする。$x\in R^r$

において，これらによって与えられる部分空間をそれぞれ S_x,
B_x とすれば，つぎのことが成り立つ。すべての $x \in \mathbb{R}^r$ に対して $S_x \supset B_x$ であれば，積分多様体の空間について，

$$\mathbb{R}^r/S \approx (\mathbb{R}^r/B)/(S/B)$$

となる。

ただし，$\mathbb{R}^r/B$ は，線型空間 $\mathbb{R}^r$ を，部分空間 B_x で割った商空間であり，S/B は，この商空間上の部分空間場であって，各点における部分空間が S_x/B_x によって与えられるものである。

定理（部分空間場の分解） $U: V \times W \to W$ を分解可能な双一次形式とし，$U^*: V' \times W' \to W'$ をその部分場とする．$w' \in W'$ に対し，U^* によって定まる，w' を含む積分多様体を $U^*(w') \in W'/U^*$ で表わそう。もし，$U^*(w')$ が単連結であり，かつ，

$$\dim(U^*(V', w')) = \dim(V')$$

ならば

$$P_*^{-1}(U^*(w')) \approx W''/U''_*(w')$$

となる。ただし，$U''_*(w') : V'' \times W'' \to W''$ は，$v'' \in V''$, $w'' \in W''$ に対して，

$$U''_*(w')(v'', w'') = U''(0 \oplus v'', w' \oplus w'')$$

によって与えられる，線型・アファイン写像である。

定義 写像 $A: V\times W \to W$ は，$U: V\times W\to W$ を双一次形式，$R: V\to W$ を線型写像として，

$$A(v,w) = U(v,w) + R(v)$$

と表されるとき，アファイン・線型形式と呼ぶ。

定理（消去定理） $W = W'\times W''$ とし，$A: V\times W \longrightarrow W$ をアファイン・線型形式とする。Aは，

$$A(v,w) = U(v,w) + R(v)$$

の形で双一次形式と線型写像の和の形に書けるが，これをさらに，$A = A' + A''$，$A': V\times W\to W'$，$A'': V\times W \to W''$ と，ふたつのアファイン・線型写像の成分に分解し，それぞれ，双一次写像と線型写像の和として，

$$A'(v,w) = U'(v,w) + R'(v)$$
$$A''(v,w) = U''(v,w) + R''(v)$$

と書ける。もし，第二成分 A'' が，v にだけしか依存しない場合，すなわち，$R''_*: V''\longrightarrow W''$ を線型写像として，

$$A''(v'\oplus v'', w'\oplus w'') = R''_*(v'')$$

の形で表わすことができ，しかも $R''_*: V''\to W''$ が同型写像であれば，アファイン・線型形式 $A^*: V'\times W' \to W'$ を，$A^*(v',w') = A'(v'\oplus 0, w'\oplus 0)$ によって定めれば，

$$W/A \approx W'/A^*$$

となる。

§5. 簡単な部分空間場

つぎに, 最も簡単な, いくつかの例について, 部分空間場の軌道空間を求めてみよう。

例1　$V=W=\mathbb{R}$, $\mho(v,w)=avw$, $a\neq 0$.

このとき, $W/\mho \approx \{-1,0,1\}$.

例2　$V=W=\mathbb{C}$, $\mho(v,w)=avw$, $a\neq 0$.

このとき, $W/\mho \approx \{0,1\}$

例3　$V=\mathbb{R}$, $W=\mathbb{R}^2$, $\mho(v,(w_1,w_2))=(vw_1,vw_2)$.

このとき $W/\mho \approx \{0\}\cup S^1$. ただし, S^1は$\mathbb{R}^2$内の単位円周をあらわす。場合によっては, 標準形として,

$$W/\mho \approx \{w_2=\pm 1\}\cup\{(\pm 1,0)\}\cup\{(0,0)\}$$

ととることもある。

例4　$V=\mathbb{C}$, $W=\mathbb{C}^2$, $\mho(v,(w_1,w_2))=(vw_1,vw_2)$.

このとき　$W/\mho \approx \{0\}\cup CP^1$

例5　$V=\mathbb{R}$, $W=\mathbb{R}^2$, $\mho(v,(w_1,w_2))=(vw_1,-vw_2)$

このとき, $W/\mho \approx \{w_2=\pm 1\}\cup\{(\pm 1,0)\}\cup\{(0,0)\}$

例6　$V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^2$, $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ として,

$$\mho((v_1,v_2),(w_1,w_2))=((a_1v_1+a_2v_2)w_1,\ (b_1v_1+b_2v_2)w_2).$$

このとき, $W/\mho \approx \{(w_1,w_2)\mid w_1,w_2=0,\pm 1\}$

例7.　$V=W=\mathbb{R}^p$, $\mho(v,w)=\left(\left(\sum_{j=1}^{p}a_{1j}v_j\right)\cdot w_1,\cdots,\left(\sum_{j=1}^{p}a_{pj}v_j\right)w_p\right)$

$\det(a_{ij})\neq 0$.　このとき, $W/\mho=\{(w_1,\cdots,w_p)\mid w_1,\cdots,w_p=0,\pm 1\}$.

§6. 高次のバーサル・ファミリィの構成法

第3節で述べたように，ファイブレーションの列

$$H^1/\Delta^1 \leftarrow H^2/\Delta^2 \leftarrow \cdots\cdots \leftarrow H^k/\Delta^k \leftarrow \cdots$$

の各段階でのファイバーを計算することによって，順次，高次の標準形を求める方針を考えることができた。（実際の計算は必ずしも容易でないし，この方法で常に計算可能かどうかもわかっていない）これと同様に，順次，バーサルファミリィについても構成してゆくことができる。

$X \in \mathcal{X}$ に対して，X^{k-1} のバーサル・ファミリィが，

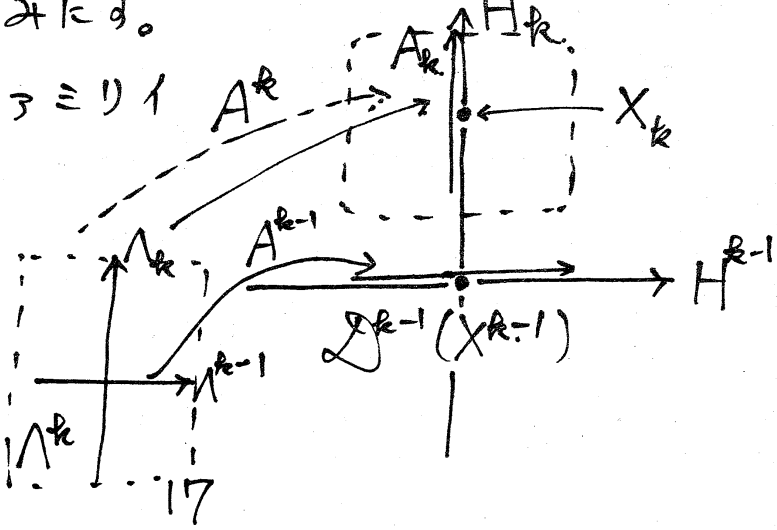
$$A^{k-1}: \Lambda^{k-1} \longrightarrow H^{k-1}, \quad A^{k-1}(0) = X^{k-1}$$

によって与えられているとしよう。A^{k-1} は X^{k-1} において，H^{k-1} の中で $\Delta^{k-1}(X^{k-1})$ に横断的である。$X^k = X^{k-1} + X_k$ であり，$X^{k-1} + H_k$ 内での，X^k を通る $\Delta^k(X^{k-1})$ の軌道に横断的な（次元が最小の）族 $A'_k : \Lambda_k \to X^{k-1} + H_k$ をとる。$A_k : \Lambda_k \to H_k$ を $A_k = A'_k - X^{k-1}$ とすれば，$A_k(0) = X_k$ をみたす。

k次のバーサル・ファミリィ A^k は，

$$A^k = A^{k-1} + A_k$$

によって与えられる。



§7. 低次元の，退化した線型部をもつ特異点の標準形

この節においては，$\mathbb{R}^2$ および $\mathbb{R}^3$ の上の，線型部が退化したジョルダン標準形をもつような特異点の標準形について述べる。

定理 原点で零となる $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 X で，その線型部分が，$X_1 = y\partial_x$ となっているものの4次の標準形は，

$$y\partial_x \pm x^2\partial_y + uxy\partial_y + wx^3\partial_y + gx^3y\partial_y$$

あるいは，

$$y\partial_x \pm xy\partial_y + w_1x^3\partial_y + w_2x^2y\partial_y + gx^3y\partial_y + rx^4\partial_y$$

あるいは，

$$y\partial_x + w_1x^3\partial_y + w_2x^2y\partial_y + gx^3y\partial_y + rx^4\partial_y$$

$$(w_1^2 + w_2^2 = 1)$$

のいずれかによって与えられる。パラメータ u, w, g, r は，もとのベクトル場から一意的に定まる。

ほとんどすべての X に対しては，上の最初の標準形となる。以下では，主要な標準形だけを述べるにとどめる。

定理 1ジェットが $X_1 = -y\partial_x + x\partial_y$ で与えられる $\mathbb{R}^3$ 上のベクトル場の5次の標準形は $r = \sqrt{x^2+y^2}$，$\theta = \arctan\frac{y}{x}$ として，$\partial_\theta = -y\partial_x + x\partial_y$，$r\partial_r = x\partial_x + y\partial_y$ とおけば，

$$\partial_\theta + azr\partial_r + bz\partial_\theta \pm r^2\partial_z \pm z^2\partial_z + ez^3\partial_z$$

$$+ f z^2 r \partial_r + h z^2 \partial_\theta + j r^5 \partial_r + k r^4 \partial_\theta$$

で与えられる。ただし $afd(d-2a) \neq 0$ とする。パラメータ a, b, e, f, h, j, k はXから一意的に定まる。

<u>定理</u> $\mathbb{R}^3$上のベクトル場Xが1ジェット $X_1 = y\partial_x$ をもつとき，3次の標準形は，

$$y\partial_x \pm x^2\partial_y + bxy\partial_y + gxz\partial_z \pm z^2\partial_y + dyz\partial_y$$
$$+ hz^2\partial_z + ix^3\partial_y + jx^3\partial_z + kxz^2\partial_z + l z^3\partial_z$$
$$+ mxy\partial_y + n yz^2\partial_y$$

で与えられる。パラメータ $b, g, d, h, i, j, k, l, m, n$ はXから一意的に定まる。

<u>定理</u> $\mathbb{R}^3$上のベクトル場Xの1ジェットが $X_1 = y\partial_x + z\partial_y$ のとき，3次の標準形は，

$$y\partial_x + z\partial_y \pm x^2\partial_z + bxy\partial_z + cxz\partial_z + dxz^2\partial_z$$
$$+ ex^2y\partial_y + fx^3\partial_z$$

である。パラメータ b, c, d, e, f はXから一意的に定まる。

§8. Acknowledgement

この研究および計算において，京都大学の國府寛司，岡宏枝，柴山健伸三氏の協力をえた。ここに感謝の意を表したい。