数理解析研究所講究録
第 493 巻 1983 年 134-155

Parametrised contact equivalence について

奈良女子大理　泉屋　周一　(Shyūichi Izumiya)

§1. 序. $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を C^∞ 写像芽とする時, 任意の $u\in\mathbb{R}^r$ に対して "varieties" の芽 $f_u^{-1}(0)$ が定まる. ここでは, $f_u^{-1}(0)$ の分岐について, ある同値関係を写像芽の集合に定義して, それに関して得られた結果を報告する. 動機や従来のカタストロフ理論との関係等については ([3]) を参照してほしい.

定義(1.1)　$f,g:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を C^∞ 写像芽とするとき, f,g が P-K-同値 (resp. S.P-K-同値) とは, $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)$ 上の微分同相芽で $\Phi(x,u)=(\Phi_1(x,u),\phi(u))$ (resp. $\Phi(x,u)=(\Phi_1(x,u),u)$) の形をしたものが存在して, $\Phi^*(I(f))=I(g)$ をみたす事とする. ここで $I(f)$ は $f_1,\cdots,f_p$ で生成される $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$ のイデアルで Φ^* は Φ から自然に導かれる環同型である. (ただし, $f=(f_1,\cdots,f_p)$. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)=\{h\mid h:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to\mathbb{R}:C^\infty\}$.)

この時, $f\sim_{P\text{-}K}g$ (resp. $f\sim_{S.P\text{-}K}g$) と書く.

さて，任意の C^∞ 写像芽 $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して，分岐写像芽 $\pi_f:(f^{-1}(0),0)\to(\mathbb{R}^r,0)$ を $\pi_f(x,u)=u$ で定義する．

定義 (1.2)．$f,g:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を C^∞ 写像芽とする時，π_f と π_g が $\mathcal{A}$－同値 (resp. $\mathcal{R}$－同値) とは，$(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)$ 上の微分同相芽 Φ で $\Phi(f^{-1}(0))=g^{-1}(0)$ をみたすものと，$(\mathbb{R}^r,0)$ 上の微分同相芽 ϕ (resp. $\phi=id_{\mathbb{R}^r}$) が存在して $\phi\circ\pi_f=\pi_g\circ\Phi$ をみたすことである．($\pi_f\sim_{\mathcal{A}}\pi_g$ と書く)

注意 i) f,g が P-$\mathcal{K}$－同値 (S.P-$\mathcal{K}$－同値) $\Rightarrow\pi_f\sim_{\mathcal{A}}\pi_g$ ($\pi_f\sim_{\mathcal{R}}\pi_g$)．

ii) $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して，$D_f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ を $D_f(x,y)=f(x)-y$ と定義する．この事によって，P-$\mathcal{K}$－同値の理論は，Mather による $\mathcal{A}$－同値の理論の一般化である事がわかる．(cf. [4], [5])．

iii) $r=1$ の場合，この同値関係は M. Golubitsky と D. Schaeffer によって研究された (cf. [1])．しかし，$r\geq 2$ の場合と $r=1$ の場合では situation がまったくちがうことがわかる．(§3 参照)

§2. 陰函数定理．我々の立場からみると，陰函数定理とは，写像芽とその同値関係に対して，特異性 (i.e. 非特異性) を決定するものである．i.e. 陰函数定理によって今考えてい

る同値関係により簡単な形に書きかえられるものが非特異であり，書きかえられないものが特異であると考える．

C^∞写像芽 $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して，

$$df_x : T_0(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)\longrightarrow T_0\mathbb{R}^p$$

を，$df_x(v_1,\cdots,v_n,w_1,\cdots,w_r)=\left(\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(0),\cdots,\sum_{i=1}^n v_i\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(0)\right)$，

$$df_u : T_0(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)\longrightarrow T_0\mathbb{R}^p$$

を，$df_u(v_1,\cdots,v_n,w_1,\cdots,w_r)=\left(\sum_{i=1}^r w_i\frac{\partial f_1}{\partial u_i}(0),\cdots,\sum_{i=1}^r w_i\frac{\partial f_p}{\partial u_i}(0)\right)$

で定義する．この時，$\mathrm{Ker}\,df_x\supset T_0(0\times\mathbb{R}^r)$ であり

$$df_u^K=\pi\circ df_u|\mathrm{ker}\,df_x : \mathrm{ker}\,df_x\longrightarrow \mathrm{Coker}\,df_x$$

が well-defined である．（ただし，$\pi: T_0\mathbb{R}^p\to \mathrm{Coker}\,df_x$ を canonical projection とする）．

定義（2.1）． i) f が原点で $\underline{\Sigma_s^k\text{-type}}$ をもつとは，

$\mathrm{rank}\,df_x=\min(n,p)-k$ かつ $\mathrm{rank}\,df_u^K=\min(r,p-\mathrm{rank}\,df_x)-s$

なる事である．

ii) f が<u>非特異</u>であるとは，f が原点で Σ_0^0-type をもつ時にいう．

この時，我々は，以下の命題を得る．

命題（2.2）． $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ が $\mathrm{rank}\,df_x=s$ かつ，$\mathrm{rank}\,df_u^K=q$ をみたす時．

1) f は以下の形の germ に S.P-K-同値である；

$f':(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{n-s}\times\mathbb{R}^r,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{p-s},0)$ $f'(x^1,x^2,u)=(x^1,\bar{f}(x^2,u))$

2) f は以下の形の germ に P-$\mathcal{K}$-同値である：

$$f' : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{r-q}, 0) \to (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{p-(s+q)}, 0)$$

$$f'(x^1, x^2, u^1, u^2) = (x^1, u^1 + g_1(x^2, u^1, u^2), g_2(x^2, u^1, u^2)),$$

ただし，$x^1 = (x_1, \dots, x_s)$，$x^2 = (x_{s+1}, \dots, x_n)$，$u^1 = (u_1, \dots, u_q)$，$u^2 = (u_{q+1}, \dots, u_r)$，$g_i(x^2, u^1, u^2) \in \mathfrak{m}^2_{n-s+r}\theta(g_i)$ $(i=1,2)$．

［証明］ 1) もし必要ならば，$(\mathbb{R}^n, 0)$ と $(\mathbb{R}^p, 0)$ の座標をとりかえることにより

$$df_x = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline \ast & 0 \end{array}\right) \qquad \text{——— } (*)$$

と仮定してよい．

この時，$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{p-s}, 0)$ の components を $f(x, u) = (f_1(x, u), f_2(x, u))$ と書く．さて，我々は以下の写像芽を定義する： $\Phi : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^r, 0)$ by $\Phi(x^1, x^2, u) = (f_1(x^1, x^2, u), x^2, u)$．仮定(*)から Φ は局所微分同相であり，その局所逆写像を $\Phi^{-1}(x^1, x^2, u) = (\phi(x^1, x^2, u), x^2, u)$ とおく．この時，明らかに，$f \circ \Phi^{-1}(x^1, x^2, u) = (x^1, f_2 \circ \Phi^{-1}(x^1, x^2, u))$ となりさらにこれは $(x^1, f_2\Phi^{-1}(0, x^2, u))$ に$\mathcal{K}$-同値である．

2) 1)から，$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$，$\operatorname{rank} df_x = 0$　$\operatorname{rank} df_u = q$ と仮定してよい．この時 $(\mathbb{R}^r, 0)$ の座標を変換して

$$df_u^K = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} q & r-q \end{matrix} \\ & \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & \\ \hline & \end{array}\right) \end{array}$$

としてよい．

今, $f=(f_1, f_2)$: $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^{p-q}, 0)$ と成分表示する時. $\mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^{r-q} \longrightarrow \mathbb{R}^q\times\mathbb{R}^{r-q}$ を $(u_1, u_2)\mapsto(f_1(0, u_1, u_2), u_2)$ と定義すると, この写像は原点で rank r この逆を Φ とおき.
$\Phi(u_1, u_2) = (\phi(u_1, u_2), u_2)$ とかくと,

$$f\circ(1_{\mathbb{R}^n}\times\Phi)(x, u_1, u_2) = (f_1(x, \phi(u_1, u_2), u_2), f_2(x, \phi(u_1, u_2), u_2))$$
$$= (f_1'(x, u_1, u_2), f_2'(x, u_1, u_2)) \quad \text{とおくと},$$

$f_1'(0, u_1, u_2) = u_1$ で f_1' の1次の項は u_1 のみである.

[証明終り]

この命題 (2.2). の系として以下の定理が得られる.

定理 (2.3). (P-$\mathcal{K}$-同値に対する陰函数定理).

f : $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を非特異写像芽とする.

1) $n \geq p$ の時, f は $(x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_r) \mapsto (x_1, \cdots, x_p)$ に S.P-$\mathcal{K}$-同値.

2) $n < p$ かつ $r \leq p-n$ の時, f は $(x_1, \cdots x_n, u_1, \cdots u_r) \longmapsto (x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_r, 0, \cdots 0)$ に P-$\mathcal{K}$-同値.

3) $n < p$ かつ $r \geqq p-n$ の時, f は $(x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots u_r) \mapsto (x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_{p-n})$ に P-$\mathcal{K}$-同値.

証明略.

この様に, 非特異写像芽については標準型が決定でき,かつ原点における variety の分岐がおこらない事もわかる. では, 特異写像芽についてはいかに分類のアルゴリズムをあたえる

べきか?

§3. 有限確定性. この節では, 通常の意味での有限確定性と, $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r$ の2種類の変数を分離させた意味での有限確定性について考察する.

定義 (3.1). $f, g : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽とする時,

(i) $k \in \mathbb{N}$ に対して, $f \underset{k\text{-jet}}{\sim} g \Leftrightarrow (f^*-g^*)(\mathfrak{m}_p) \subset \mathfrak{m}_{n+r}^{k+1}$

(ii) $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して, $f \underset{(k_1,k_2)\text{-jet}}{\sim} g \Leftrightarrow (f^*-g^*)(\mathfrak{m}_p) \subset (\mathfrak{m}_n^{k_1+1}+\mathfrak{m}_r^{k_2+1})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$.

これらは, 明らかに同値関係であり　　　　　f をもつ同値類をそれぞれ $j_0^k f$ ($j_0^{(k_1,k_2)} f$) で表わす.

定義 (3.2). 写像芽 $f : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ が k-determined (resp. (k_1, k_2)-determined) relative to $\mathcal{G}$ とは, $j_0^k f = j_0^k g$ (resp. $j_0^{(k_1,k_2)} f = j_0^{(k_1,k_2)} g$) なる任意の写像芽 $g : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ は $f \underset{\mathcal{G}}{\sim} g$ なる事とする. ただし, $\mathcal{G} = P\text{-}\mathcal{K}$ or $S.P\text{-}\mathcal{K}$.

f が有限確定とは, ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して, f が k-determined であるとする.

注). f が有限確定 $\Leftrightarrow$ $\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ s.t. $f : (k_1, k_2)$-det.

f が有限確定であるための必要充分条件は, J. Mather の仕事と同様にできる; $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ を $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \to \mathbb{R}^p$ C^∞ 写像芽全体のなす $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$-加群とする. 任意の写像芽 $f : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して,

$$T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^r)} + f^*(\mathfrak{m}_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

$$T_e(SP\text{-}\mathcal{K})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)} + f^*(\mathfrak{m}_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p),$$

$$T(P\text{-}\mathcal{K})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathfrak{m}_{n+r}} + \left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial u_r} \right\rangle_{\mathfrak{m}_r} + f^*(\mathfrak{m}_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p),$$

$$T(SP\text{-}\mathcal{K})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\rangle_{\mathfrak{m}_{n+r}} + f^*(\mathfrak{m}_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$

とおく.

定理 (3.3) (Characterization theorem). 以下は同値.

1) f : finitely determined rel to $P\text{-}\mathcal{K}$ (resp. $SP\text{-}\mathcal{K}$).

2) $\exists k \in \mathbb{N}$ s.t. $\mathfrak{m}_{n+r}^k C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)$ (resp. $T_e(SP\text{-}\mathcal{K})(f)$)

3) $\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ s.t. $(\mathfrak{m}_n^{k_1} + \mathfrak{m}_r^{k_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)$ (resp. $T_e(SP\text{-}\mathcal{K})(f)$)

4) $\dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) / T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) < +\infty$

(resp. $\dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) / T_e(SP\text{-}\mathcal{K})(f) < +\infty$).

証明略.

さて, このように有限確定性は特徴づけられたが, 分類のためには, その $P\text{-}\mathcal{K}$ - 同値類 (又は $S.P\text{-}\mathcal{K}$-同値類) を決定する k-jet や (k_1, k_2)-jet の次数を具体的に評価する必要がある. 特に計算できる量からの評価が望まれる. ここでは, (k_1, k_2)-determinacy の jet の次数の評価をいくつかあたえる.

定理 (3.4). $f : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽とする.

1) D を $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ の $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$ - submodule として

$D \subset T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) + (\mathfrak{m}_n^{s_1} + \mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ と

$(\mathfrak{m}_n^{s_1} + \mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(SP\text{-}\mathcal{K})(f) + \mathfrak{m}_r D + \mathfrak{m}_{n+r}(\mathfrak{m}_n^{s_1} + \mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$

を満たすならば，f は (s_1, s_2)-determined rel to P-$\mathcal{K}$ である．

2) $r=1$ の時，$(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_1^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, \mathbb{R}^p) \subset T(S, P\text{-}\mathcal{K})(f)+$
$\mathfrak{m}_{n+1}(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_1^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$ ならば f は (s_1, s_2)-determined rel to SP-$\mathcal{K}$.

証明の概略．

2) は 1) と同様（むしろやさしい）に証明できるので，1) のみを証明する．

この証明のためには以下の2つの Lemma を必要とする．

補題 (3.5). R を可換環，E を R-加群，Z を R の部分環とする．($Z \ni 1$ でもよい)．$k \in \mathbb{N}$，$Z^k E = 0$ をみたしているとする．

もし，$E = ZE \Rightarrow E = 0$.

[証明]. $E = ZE$ とすると，$ZE = Z^2E = \cdots = Z^kE = 0$
i.e. $E = 0$. QED

補題 (3.6). $f : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を (l_1, l_2)-determined relative to P-$\mathcal{K}$ とする．$(k_1, k_2) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ を $k_1 \leq l_1$ かつ $k_2 \leq l_2$ とする．この時，以下は同値．

1) $f : (k_1, k_2)$-determined rel to P-$\mathcal{K}$.

2) $j_0^{(k_1,k_2)}f = j_0^{(k_1,k_2)}g$ なる任意の $g : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して，

$$(\mathfrak{m}_n^{k_1+1}+\mathfrak{m}_r^{k_2+1})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \subset T(P\text{-}\mathcal{K})(g)+(\mathfrak{m}_n^{l_1+1}+\mathfrak{m}_r^{l_2+1})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p).$$

証明は [5] のアナロジーであるので省略する．

[定理(3.4)の証明]

$j_0^{(s_1,s_2)}g = j_0^{(s_1,s_2)}f$ なる $g:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して，簡単な計算から．

$$(1)\quad D \subset T_e(\mathcal{P}-\mathcal{K})(g) + (\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)$$

かつ

$$(2)\quad (\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T(S.\mathcal{P}-\mathcal{K})(g)+\mathfrak{m}_r D + \mathfrak{m}_{n+r}(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)$$

が成立することがわかる． $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r)$ −加群

$$E=\frac{T(S.\mathcal{P}-\mathcal{K})(g)+\mathfrak{m}_r D+(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)}{T(S.\mathcal{P}-\mathcal{K})(g)+\mathfrak{m}_r D+\mathfrak{m}_{n+r}^k(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)}$$

(ただし，$k=2l+s+2$ & $s=\min(s_1,s_2)$)

について，(2)より $ZE=E$ (ただし $Z=\mathfrak{m}_{n+r}$).

従って，補題(3.5)から $E=0$. i.e.

$$(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T(S.\mathcal{P}-\mathcal{K})(g)+\mathfrak{m}_r D+\mathfrak{m}_{n+r}^k(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)$$

Dに(1)式を代入すると．

$$(3)\quad (\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T(\mathcal{P}-\mathcal{K})(g)+\mathfrak{m}_r(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) + \mathfrak{m}_{n+r}^k(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p).$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^r)$ − module

$$E'=\frac{T(\mathcal{P}-\mathcal{K})(g)+(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)}{T(\mathcal{P}-\mathcal{K})(g)+\mathfrak{m}_{n+r}^k(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)}$$

について，(3)より，$Z'E'=E'$ ($Z'=\mathfrak{m}_r$).

従って、補題 (3.5) から $E'=0$

故に、$(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T(P\text{-}\mathcal{K})(g) +$

$\mathfrak{m}_{n+r}^{k}(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p).$

今、$\mathfrak{m}_{n+r}^{k}(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2}) \subset \mathfrak{m}_{n+r}^{k}\mathfrak{m}_{n+r}^{s}$

$\subset (\mathfrak{m}_n^{l+s+1}+\mathfrak{m}_r^{l+1}) \subset (\mathfrak{m}_n^{l+1}+\mathfrak{m}_r^{l+1}).$

i.e.

$(\mathfrak{m}_n^{s_1}+\mathfrak{m}_r^{s_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T(P\text{-}\mathcal{K})(g) + (\mathfrak{m}_n^{l+1}+\mathfrak{m}_r^{l+1})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p).$

補題 (3.6) より成立. Q.E.D.

この定理 (3.4) の系として以下の命題が成立する.

系 (3.7) (1) $(\mathfrak{m}_n^{k_1}+\mathfrak{m}_r^{k_2-1})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) +$
$(\mathfrak{m}_n^{k_1+l}+\mathfrak{m}_r^{k_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)$ かつ

(2) $\mathfrak{m}_{n+r}^{l}C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T_e(S,P\text{-}\mathcal{K})(f) + \mathfrak{m}_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) +$

$(\mathfrak{m}_n^{k_1+l}+\mathfrak{m}_r^{k_2})C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)$

$\Rightarrow$ f : (k_1+l, k_2)-determined relative to P-$\mathcal{K}$.

系 (3.8) $\mathfrak{m}_{n+r}^{k}C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) \subset T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f) \Rightarrow f : (S(k,r), S(k,r)-k)$
-determined relative to P-$\mathcal{K}$.

ただし
$$S(k,r) = \begin{cases} k(r+1) & \text{if } \operatorname{rank}(df_n) = p \\ k(r+2) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

系 (3.9) $C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) = T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)$

$\Rightarrow$ f : $(r+1, 1)$-determined relative to P-$\mathcal{K}$.

注 : 系 (3.9) は Mather の定理 (stable germ は $(r+1)$-determined

に対応している（の一般化となっている）.

さて，ここで S.P-$\mathcal{K}$-同値について考えてみる. 次の命題は $r \geq 2$ の場合と $r=1$ の場合のちがいをあらわしている.

命題 (3.10). $f:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽で $r \geq 2$ とする. 次は同値

1) f : finitely determined relative to S.P-$\mathcal{K}$.

2) f : S.P-$\mathcal{K}$-equivalent to $(x_1, \cdots x_n, u_1, \cdots u_r) \mapsto (x_1, \cdots x_p)$.

（証明略）

(注) Golubitsky - Schaeffer は以下の評価を得ている：$r=1$ のとき，"$\mathfrak{m}_{n+r}^k C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^p) \subset T(S.P\text{-}\mathcal{K}) \Rightarrow f$: k-determined rel to P-$\mathcal{K}$". 今，$r \geq 2$ の場合，定理 (3.3) と命題 (3.10) から，上記左辺の条件をみたすような写像芽は 1-determined rel to S.P-$\mathcal{K}$ となり，上記の評価は意味をなさない.

§4. Versal deformations.

$f:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ の s-parameter deformation とは，C^∞ 写像芽 $F:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ で $F|\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times 0 = f$ なるものである. f の deformation の versality 等については他の場合と同様に定義される.

定義 (4.1) $F:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ を $f:(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ の deformation とする時.

F : infinitesimally $\mathcal{S}$-versal $\Leftrightarrow$.

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p) = T_e(\mathcal{S})(f) + V_F \ ,$$

ただし，$\mathcal{S} = P\text{-}\mathcal{K}$ or $S.P\text{-}\mathcal{K}$ かつ $V_F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial u_1}\Big|\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times 0, \cdots, \frac{\partial F}{\partial u_s}\Big|\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r\times 0\right\rangle_{\mathbb{R}}$.

この時以下の定理が得られる．

定理 (4.2)　$\mathcal{S} = P\text{-}\mathcal{K}$ or $S.P\text{-}\mathcal{K}$ とする時．次は同値．

1)　F : $\mathcal{S}$-versal deformation of f.

2)　F : infinitesimally $\mathcal{S}$-versal deformation of f.

（証明略）

この定理の 2.3の応用を示す．

A)．$f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ C^∞写像芽に対して，

$D_f : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $D_f(x,y) = f(x) - y$，

$G_f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p, 0)$ を $G_f(x) = (x, f(x))$

で定義する．この時，

補題 (4.3)．$(G_f)^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p) \longrightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ は surjective であり，$\mathrm{Ker}\,(G_f)^* = \langle f_1(x)-y_1, \cdots, f_p(x)-y_p\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^p)}$ となる，ただし，$f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x))$．　　(trivial)

任意の $f : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して

$$T(\mathcal{A})(f) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} + f^*(C_0^\infty(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p))$$ とおくと

定理 (4.4)（Gomosov [2]）．　$F : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を s-parameter deformation of f．とするとき．

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) = T(\mathcal{A})(f) + V_F \Rightarrow F : \mathcal{A}\text{-versal deformation}$$

of f.

[proof]. 補題 (4.3) から surjective homo

$(G_f)^* : C_0^\infty(R^n \times R^p, R^p) \longrightarrow C_0^\infty(R^n, R^p)$ がある. 定義から,

$(G_f)^*(T(P\text{-}K)(D_f)) = T(A)(f)$, $V_{D_F} = V_F$.

$\mathrm{Ker}(G_f)^* = D_f^*(m_p)\, C_0^\infty(R^n \times R^p, R^p)$, なので, F が infinitesimally

A-versal $\Longleftrightarrow$ D_F が infinitesimally P-K-versal. QED

B). $(\mathbb{C}^n, 0) \xrightarrow{g} (\mathbb{C}^p, 0)$ という system を考える. (f, g: hol).

$\downarrow f$

$(\mathbb{C}, 0)$

$(\mathbb{C}^n, 0) \xrightarrow{g_i} (\mathbb{C}^p, 0)$ $\quad i = 1, 2$ に対して.

$\downarrow f_i$

$(\mathbb{C}, 0)$

$f_1|g_1^{-1}(0)$ と $f_2|g_2^{-1}(0)$ が Right-同値とは,

$\exists\ \Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$: biholomorphic germ s.t. $\Phi^*(I(g_1)) = I(g_2)$

s.t. $f_2 \circ \Phi | g_1^{-1}(0) = f_1 | g_1^{-1}(0)$ とする.

i.e. complex variety 上の holomorphic function germs の右同値とは上記の様に定義するのが自然であろう. この時, この右同値関係を我々の立場から以下のように解する.

$(\mathbb{C}^n, 0) \xrightarrow{g} (\mathbb{C}^p, 0)$ に対して

$\downarrow f$

$(\mathbb{C}, 0)$ $\qquad K_{(f,g)} : (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}, 0) \longrightarrow (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^p, 0)$

を $K_{(f,g)}(x, y) = (f(x) - y,\ g(x))$ と定義する.

定理 (4.5)

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^s,0) \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"] & (\mathbb{C}^p,0) \\
(\mathbb{C},0) &
\end{tikzcd}
\quad と \quad
\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^n,0) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & (\mathbb{C}^p,0) \\
(\mathbb{C},0) &
\end{tikzcd}
$$

の s-parameter deformation とする．

$$\underbrace{{}_n\mathcal{O}\times\cdots\times{}_n\mathcal{O}}_{p}\oplus{}_n\mathcal{O} = (T_e\mathcal{K}(g))\oplus\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}, g_1,\cdots g_p\right\rangle_{{}_n\mathcal{O}}\right) + V_G\oplus V_F$$

ならば， $F|G^{-1}(0)$ は $f|g^{-1}(0)$ の Right-versal deformation である．（証明は定理(4.4)と同様）．

㊟ この定理は，どのような意味（重要性）をもつかは，筆者にはわからない．ただ，non-singular な object 上の函数の話から一歩進んで，singular な object (ie variety) 上の函数の研究のためには有効であろうと期待する．

さらに，定理(4.2)は以下のように一般化することができる： $f, g : (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して，

f, g が $(r_1,\cdots,r_k)$-P-$\mathcal{K}$-同値であるとは，

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d] & (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0) \arrow[d] \\
(\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0) \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d] & (\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
(\mathbb{R}^{r_k},0) \arrow[r, "\phi_k"] & (\mathbb{R}^{r_k},0)
\end{tikzcd}
\quad : 可換
$$

とするような，local diffeos が存在して，

$$\Phi^*(I(f)) = I(g)$$

が成立する事とする．

この時，$(r_1,\cdots,r_k)$-P-K-同値に対応する versality theorem とは次のものである．

定理 (4.2)′ $F:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k}\times\mathbb{R}^s,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ を s-parameter deformation of $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ とする．

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},\mathbb{R}^p)=\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k})}+\left\langle\frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots\frac{\partial f}{\partial u_{r_1}}\right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k})}$$
$$+\cdots+\left\langle\frac{\partial f}{\partial v_1},\cdots\frac{\partial f}{\partial v_{r_k}}\right\rangle_{C_0^\infty(\mathbb{R}^{r_k})}+f^*(m_p)C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},\mathbb{R}^p)+V_F$$

ならば，F は $(r_1,\cdots,r_k)$-P-K-versal deformation of f である．

注 F が f の $(r_1,\cdots r_k)$-P-K-versal deformation であるとき，$F^{-1}(0)$ は $(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k}\times\mathbb{R}^s,0)$ の smooth submanifold である事がわかる．しかも

$$F^{-1}(0)\xrightarrow{\pi|}(\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0)\xrightarrow{\pi_1}\cdots\xrightarrow{\pi_k}(\mathbb{R}^{r_k},0)$$

は composed map として安定であることも示される．逆に，

$$(\mathbb{R}^n,0)\xrightarrow{f_1}(\mathbb{R}^{r_1},0)\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_k}(\mathbb{R}^{r_k},0)\xrightarrow{f_{k+1}}(\mathbb{R}^s,0)$$ を安定な composed map germ とするとき，

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k}\times\mathbb{R}^s,0)&\longrightarrow&(\mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{R}^{r_2}\times\cdots\times\mathbb{R}^s,0)\\ \psi & & \\ (x,y_1,\cdots y_k,z)&&(f_1(x)-y_1,f_2(y_1)-y_2,\cdots f_{k+1}(y_{k+1})-z)\end{array}$$

は
$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k},0)&\longrightarrow&(\mathbb{R}^{r_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{r_k}\times\mathbb{R}^s,0)\\ \psi&&\\ (x,y_1,\cdots y_k)&\longmapsto&(f_1(x)-y_1,f_2(y_1)-y_2,\cdots,f_{k+1}(y_k))\end{array}$$

の $(r_1,\cdots,r_k)$-P-K-versal deformation であることがわかる．

この事は，安定合成写像芽の研究が微分方程式の定常解の研究に役立つ事を示し，逆に，P-K-同値の研究が安定合成

写像芽の研究に有効であろうことを示している.

§5 分類. ここでは, codimension が低い場合の, P-$\mathcal{K}$-同値による写像芽の族の分類を行なう.

$\iota : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0)$ を canonical inclusion とする. この時 $\iota^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ が定義されるが, ι^* は surjection でありかつ $\ker \iota^* = m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$ である.

$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ に対して, $f_0 := f|\mathbb{R}^n \times 0$ と定義する.

補題 (5.1) $\iota^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \to C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ は $\mathbb{R}$-isomorphism

$$\tilde{\iota}^* : C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \Big/ T_e(SP\text{-}\mathcal{K})(f) + m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p)$$
$$\cong C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \Big/ T_e \mathcal{K}(f_0)$$

を誘導する.

定義 (5.2)

$$P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \Big/ T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)$$
$$\mathcal{K}\text{-codim}(f_0) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \Big/ T_e \mathcal{K}(f_0)$$

と定義する.

(注) 補題 (5.1) から

$$\mathcal{K}\text{-codim}(f_0) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p) \Big/ T_e(SP\text{-}\mathcal{K})(f) + m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, \mathbb{R}^p).$$

補題(5.3)　$f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^p,0)$ に対して，

i)　$\mathcal{K}\text{-codim}(f_0) \le P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f)+r$.

ii)　$\operatorname{rank}(df_x)=s$，$\operatorname{rank}(df_u^k)=q$

$$\Rightarrow \quad P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) \ge p-(s+q).$$

証明　i)　$\mathcal{K}\text{-codim}(f_0) = \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)\big/ T_e(S.P\text{-}\mathcal{K})(f)+m_r C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)$

$$\le \dim_{\mathbb{R}} C_0^\infty(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^p)\big/ T_e(S.P\text{-}\mathcal{K})(f)+m_r\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_r}\right\rangle$$

$$= P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f)+\dim_{\mathbb{R}}\frac{T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)}{T_e(S.P\text{-}\mathcal{K})(f)+m_r\left\langle \frac{\partial f}{\partial u_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial u_r}\right\rangle}$$

$$\le P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f)+r.$$

ii)　命題(2.2)の1)より，

$$f:(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{n-s}\times\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{p-s},0)$$

$$f(x^1,x^2,u) = (x^1,\bar{f}(x^2,u))$$

と仮定してよい．

$$\pi: C_0^\infty(\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{n-s}\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^{p-s})\to C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-s}\times\mathbb{R}^r,\mathbb{R}^{p-s})$$

をcanonical projectionとすると，$\pi(T_e(P\text{-}\mathcal{K})(f)) = T_e(P\text{-}\mathcal{K})(\bar{f})$.

と我々は，$\operatorname{rank}(df_x)=0$と仮定してよい．

さらに，命題(2.2)の2)からfの形が制限され，上記の評価式が得られる．　[証終]

この時，$P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f)=0$のものは，以下の様に分類することができる．

定理(5.4)　$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) = 0$ なる map-germ とする．もし，$\mathrm{rank}(df_x) = s$，$\mathrm{rank}(df_u^k) = q$ とする時，$p = s + q$ であり，$g : (\mathbb{R}^{n-s}, 0) \to (\mathbb{R}^q, 0)$ with $\mathrm{rank}(dg) = 0$ かつ $\mathcal{K}\text{-codim}(g) \leq r$ という高々 $(r+1)$-次の多項式写像芽が存在して，f は以下のものに $P\text{-}\mathcal{K}$- 値である：

$$f' : (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{n-s} \times \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^{r-q}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^q, 0)$$

$f'(x^1, x^2, u^1, u_{q+1}, \cdots, u_r) = (x_1, u^1 + g(x^2) + \sum_{i=1}^{r-q} u_{q+i}\xi_i(x^2))$，ただし，$\xi_1, \cdots, \xi_{r-q}$ は $\mathbb{R}$-vector space $\mathfrak{m}_{n-s} C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-s}, \mathbb{R}^q) / Te(\mathcal{K})(g)$ の生成元である．　　（証明略）

次に，$r = 1$ の場合に $P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f)$ が低いものの分類をおこなう．

補題(5.5)．$f : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$　$(n \geq p)$ について，

If.　$P\text{-}\mathcal{K}\text{-codim}(f) \leq k$

$\Rightarrow$　f は Σ_0^i-type $(0 \leq i \leq k+1)$ か Σ_1^j-type $(1 \leq j \leq k)$ をもつ．

[証明]，補題(5.3)から，$k \geq p - (s+q)$（ただし，$\mathrm{rank}(df_x) = s$，$\mathrm{rank}(df_u^k) = q$）．$r = 1$ なので，$q = 0$ 又は 1，もし $q = 0 \Rightarrow p - s \leq k$，もし $q = 1$ ならば，$p - s \leq k + 1$　　[証終]

さて，$f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ で P-$\mathcal{K}$-$\mathrm{codim}(f)\leq 3$ なるものを分類してみよう．補題(5.5)から，fは $\Sigma^0_0, \Sigma^1_0, \Sigma^2_0, \Sigma^3_0, \Sigma^4_0, \Sigma^1_1, \Sigma^2_1, \Sigma^3_1$，の各typeをもちうる．また，補題(5.3)から $f/\mathbb{R}^n\times 0$ の $\mathcal{K}$-codim は4以下である．ie $h:(\mathbb{R}^k,0)\to(\mathbb{R}^k,0)$ $(k\leq 4)$ で $\mathcal{K}$-$\mathrm{codim}(h)\leq 4$ なるものは，$(\mathbb{R}^l,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^l,0)$ $(l\leq 8)$ なるstable mapの分類と同じとなる．ところが，これは，Matherの"nice range"の中なのですべてのstable mapはdiscrete algebra typeである，従って Damon [ ] の分類表が使用できる．このDamonの分類表にあらわれるgermの$\mathcal{K}$-versal deformationを構成してやると，$(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ はすべてそれらからのひきもどしになるはずである．それらに，分離的有限確定性のjetの次数の評価を適用してやると以下の定理が得られる．

定理(5.6) $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\longrightarrow(\mathbb{R}^n,0)$ を P-$\mathcal{K}$-$\mathrm{codim}(f)\leq 3$ とすると，Table-I に表われる写像芽のどれかにP-$\mathcal{K}$-同値となる．

同様にして，超曲面についても同様の結果が得られる．

定理(5.7) $f:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)\to(\mathbb{R},0)$ を P-$\mathcal{K}$-$\mathrm{codim}(f)\leq 4$ とすると，Table-II に表われる写像芽のどれかにP-$\mathcal{K}$-同値となる．

最後に，$r=2$ の時，i.e. $f:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2,0)\to(\mathbb{R},0)$ で $\mathcal{K}$-codim$(f_0)=1$ & P-$\mathcal{K}$-codim$(f)\leq 5$ のものは以下のように分類される．

P-$\mathcal{K}$-codim(f)	germ	P-$\mathcal{K}$-versal deformation
0	$\pm x^2+u_1$	$\pm x^2+u_1$
1	$\pm x^2\pm u_1^2\pm u_2^2$	$\pm x^2\pm u_1^2\pm u_2^2+v_1$
2	$\pm x^2\pm u_1^2+u_2^3$	$\pm x^2\pm u_1^2+u_2^3+v_1+v_2u_2$
3	$\pm x^2\pm u_1^2\pm u_2^4$	$\pm x^2\pm u_1^2\pm u_2^4+v_1+v_2u_2+v_3u_2^2$
4	$\pm x^2+u_1^3-u_1u_2^2$	$\pm x^2+u_1^3-u_1u_2^2+v_1+v_2u_1+v_3u_1+v_4(u_1^2+u_2^2)$
	$\pm x^2+u_1^3+u_2^3$	$\pm x^2+u_1^3+u_2^3+v_1+v_2u_1+v_3u_2+v_4u_1u_2$
	$\pm x^2\pm u_1^2+u_2^5$	$\pm x^2\pm u_1^2+u_2^5+v_1+v_2u_2+v_3u_2^2+v_4u_2^3$
5	$\pm x^2\pm(u_1^2u_2+u_2^4)$	$\pm x^2\pm(u_1^2u_2+u_2^4)+v_1v_2u_1v_3u_2+v_4u_1^2+v_5u_2^2$
	$\pm x^2\pm u_1^2\pm u_2^6$	$\pm x^2\pm u^2\pm u^6+v_1+v_2u_2+v_3u_2^2+v_4u_2^3+v_5u_2^4$

(注) 上記において，$x^2+u_1^2+u_2^3$ という芽は T. Poston [ ] によって結晶スペクトルの分岐の研究に使われた．

又，$r\geq 2$ の時は，P-$\mathcal{K}$-codim(f) のみの違い方からの分類だけでは複雑になるので，$\mathcal{K}$-codim(f_0) と P-$\mathcal{K}$-codim(f) の両方を指針として分類するのが良いと思われる．

Table I

P-$\mathcal{K}$-codim(f)	germ
0	$(x_1,\ldots,x_{n-1},u\pm x_n^2)$
1	$(x_1,\ldots,x_{n-1},u+x_n^3)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-1},\pm u^2\pm x_n^2)$
2	$(x_1,\ldots,x_{n-1},u\pm x_n^4)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^3\pm ux_n)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^3\pm u^2)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-1},u^3\pm x_n^2)$
3	$(x_1,\ldots,x_{n-1},u+x_n^5)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-1},\pm u^2\pm x_n^4)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-1},u^3+x_n^3)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-1},x_n^4\pm ux_n)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-2},u\pm x_{n-1}x_n,x_{n-1}^2\pm x_n^2)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-2},\pm x_{n-1}x_n,u\pm x_{n-1}^2\pm x_n^2)$
	$(x_1,\ldots,x_{n-2},x_{n-1}^2\pm x_n^2\pm x_{n-1}x_n,u\pm x_{n-1}^2+x_n^2)$

Table II

P-$\mathcal{K}$-codim(f)	germ
0	$u+Q(x_1,\ldots,x_n)$
1	$u+x_1^3+Q(x_2,\ldots,x_n)$
	$\pm u^2+Q(x_1,\ldots,x_n)$
2	$u\pm x_1^4+Q(x_2,\ldots,x_n)$
	$\pm u^2+x_1^3+Q(x_2,\ldots,x_n)$
	$u^3+Q(x_1,\ldots,x_n)$
	$x_1^3\pm ux_1+Q(x_2,\ldots,x_n)$
3	$u+x_1^5+Q(x_2,\ldots,x_n)$
	$u\pm(x_1^3+x_2^3)+Q(x_3,\ldots,x_n)$
	$u\pm(x_1^3-x_1x_2^2)+Q(x_3,\ldots,x_n)$
	$u^4+Q(x_1,\ldots,x_n)$
	$x_1^4\pm ux_1+Q(x_2,\ldots,x_n)$
4	$u\pm x_1^6+Q(x_2,\ldots,x_n)$
	$u\pm(x_1^2x_2+x_2^4)+Q(x_3,\ldots,x_n)$
	$u^5+Q(x_1,\ldots,x_n)$
	$x_1^5\pm ux_1+Q(x_2,\ldots,x_n)$

Here, $Q(x_1,\ldots,x_n) = \pm x_1^2\pm \cdots \pm x_n^2$

文献

[1] Golubitsky, M. and Schaeffer, D. : A theory for imperfect bifurcation via singularity theory. Comm. Pure Appl. Math. 32, 21-98 (1979)

[2] Gomozov, E. P. : A versality theorem for a bilateral group of change of variables. Funct. Anal. Appl. 9, 332-333 (1975)

[3] 泉屋周一 ; Generic Bifurcations of Varieties I. 数理解析研究所講究録 "経済学と位相幾何学" 1982年6月

[4] Mather, J ; Stability of C^∞ mappings III Publ. Math. I.H.E.S 35 127-156 (1969)

[5] Mather, J : Stability of C^∞ mappings IV Publ. Math. I.H.E.S. 37 223-248 (1970)

[6] Poston, T. : Perturbed bifurcations and crystal spectra, In : Applications of non-linear Analysis in the Physical Sciences (ed. Aman, H. et al) Pitman, 77-91 (1981).

以上

(1982, 12. 10).