

擬斉次特異点の位相型について

横浜国大 教育 吉永 悦男 (Etsuo Yoshinaga)

擬斉次多項式 $f(z)$ で定義される孤立特異点芽の位相型は、 $f(z)$ の weights を決定するであろうか。ただし、 $X \equiv \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z) = 0\}$ とおくとき、位相空間の対 (\mathbb{C}^n, X) を芽 X の位相型という。

これは、岡睦雄氏の定理の逆命題を問うものである。これについては、次のことが知られている。

定理 1 ([7]) 平面曲線芽については肯定的である。

定理 2 ([4]) 3変数 ($n=3$) の場合については肯定的である。この場合には、対 (\mathbb{C}^3, X) の位相型ではなく、単に芽 X の位相型だけで、 $f(z)$ の weights が決定される。

定理 3 ([7]) Brieskorn-Pham 型の特異点については肯定的である。

さて、多項式 $f(z)$ の Milnor fibration に付随する特性多項式を $\Delta_f(t)$ とすると、これは位相不変量であり ([1])、次が成り立つ：

定理 4

$$\text{divisor } \Delta_f(t) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i} \Lambda_{b_i} - 1 \right)$$

ただし、 $(a_1/b_1, \dots, a_n/b_n)$ を $f(z)$ の weights とし、 $\Lambda_b \equiv \text{divisor}(t^b - 1) = \langle 1 \rangle + \langle \omega \rangle + \langle \omega^2 \rangle + \dots + \langle \omega^{b-1} \rangle$ とする。 $\omega \equiv \exp(2\pi\sqrt{-1}/b)$

この小稿では、次の定理 5 を証明することが目的である。擬斉次多項式 $g(z)$ の weights を $(c_1/d_1, \dots, c_n/d_n)$ とし、 \mathbb{C}^n の原点で孤立特異点を持つものとする。

定理 5 特性多項式 $\Delta_f(t)$ と $\Delta_g(t)$ とが等しくなるための必要十分条件は、次の (1), (2) が成り立つことである。

$$(1) \quad \{2, b_1, b_2, \dots, b_n\} = \{2, d_1, d_2, \dots, d_n\}$$

$$(2) \quad \text{任意の元 } b \in \{2, b_1, b_2, \dots, b_n\} \text{ について}$$

$$\prod_{b_i=b} \left(1 - \frac{b_i}{a_i} \right) = \prod_{d_i=b} \left(1 - \frac{d_i}{c_i} \right)$$

直接の系として、次を得る。

系 6

- (1) 集合 $\{2, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ は位相不変量である。
 (2) 各 b について、 $\prod_{b_i=b} (1 - \frac{b_i}{a_i})$ は位相不変量である。

系 7 (= 定理 3) 多項式 $f(z)$, $g(z)$ が Brieskorn-Pham 型で、特異点系 $X_f \equiv \{z \in \mathbb{C}^n \mid f(z) = 0\}$ と X_g の位相型が等しいならば、 $f(z)$ と $g(z)$ の weights は順序を除いて、等しい。

証明 特性多項式が位相不変量であるので、 $\Delta_f(t) \equiv \Delta_g(t)$ である。Brieskorn-Pham 型であるから、 $a_i = c_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とおき、定理 5 (2) を用いる。 $b > 2$ とすると、

$$\prod_{b_i=b} (1 - b_i) = \prod_{d_i=b} (1 - d_i)$$

$$\therefore \#\{i \mid b_i = b\} = \#\{i \mid d_i = b\}$$

従って、 $b = 2$ についても $\#\{i \mid b_i = 2\} = \#\{i \mid d_i = 2\}$ となり、順序を除いて、 $(b_1, b_2, \dots, b_n) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ が証明された。

注意 8 [5] により、孤立特異点を持つ擬斉次多項式 $f(z)$ の weights (r_1, r_2, \dots, r_n) は、 $0 < r_i \leq \frac{1}{2}$ と仮定してよく、また、そのとき一意的である。

補題 9

n_i, g_j ; integers s.t.

$$2 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k, \quad 2 \leq g_1 < g_2 < \dots < g_l$$

c_i, r_j ; integers

m_i, p_j ; positive rational numbers s.t.

$$m_i n_i + (-1)^{c_i} \neq 0, \quad p_j g_j + (-1)^{r_j} \neq 0$$

$$(*) \quad \prod_{i=1}^k (m_i \Lambda_{n_i} + (-1)^{c_i}) = \prod_{j=1}^l (p_j \Lambda_{g_j} + (-1)^{r_j})$$

$$\sum_{i=1}^k c_i \equiv \sum_{j=1}^l r_j \pmod{2}$$



$$k = l, \quad n_i = g_i, \quad m_i = p_i, \quad c_i \equiv r_i \pmod{2}$$

証明 数学的帰納法によって証明する。

$$\langle \text{第 1 段階} \rangle \quad n_1 = g_1, \quad m_1 = p_1, \quad c_1 \equiv r_1 \pmod{2}$$

$$\textcircled{\text{⊙}} \quad \Lambda_a \Lambda_b = (a, b) \Lambda_{[a, b]} \quad (1: \text{より},$$

$(a, b) \equiv a \text{ と } b \text{ の最大公約数}, [a, b] \equiv a \text{ と } b \text{ の最小公倍数})$ に注意して, $(*)$ の式を展開すると, 次のように一意的に書ける。

$$(*) \text{ の左辺} = \alpha_1 \Lambda_{\beta_1} + \dots + \alpha_s \Lambda_{\beta_s} \quad (\beta_1 < \dots < \beta_s)$$

ここで, $\beta_1 = n_1, \alpha_1 = m_1 \cdot (-1)^{c_2 + \dots + c_k}$ であるから

第 1 段階の証明を終える。

第 $i-1$ 段階まで証明されたものとする。

<第 i 段階> $n_i = g_i, m_i = p_i, c_i \equiv r_i \pmod{2}$

⊙ 帰納法の仮定により, 任意の $\beta < n_i$ (or g_i) に対して, 等式(*)の両辺における Λ_β の係数は互に等しい。従って, $n_i = g_i$ 。次に,

$$\begin{aligned}
 & \text{(*) の左辺における } \Lambda_{n_i} \text{ の係数} \\
 &= (-1)^\alpha m_i \prod_{\substack{n_j | n_i \\ n_j \neq n_i}} (m_j n_j + (-1)^{c_j}) \\
 &+ \sum_{\substack{[n_{i_1}, \dots, n_{i_g}] = n_i \\ n_{i_1} < \dots < n_{i_g} < n_i}} (-1)^{\alpha_I} m_{i_1} m_{i_2} \dots m_{i_g} (n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_g})
 \end{aligned}$$

↖ 最小公倍数

$$\text{ただし, } \alpha \equiv \sum_{n_j \nmid n_i} c_j, \quad \alpha_I \equiv \sum_{j \notin I} c_j, \quad I \equiv \{i_1,$$

$$i_2, \dots, i_g\} \subset \{1, 2, \dots, i-1\}$$

この式の第2項は, 帰納法の仮定により, 同じ形の項が Λ_{g_i} の係数にもあらわれる。よって, Λ_{n_i} と Λ_{g_i} の係数を比較することにより, 次の等式を得る:

$$\begin{aligned}
 & (-1)^\alpha m_i \prod_{\substack{n_j | n_i \\ n_j \neq n_i}} (m_j n_j + (-1)^{c_j}) \\
 &= (-1)^\beta p_i \prod_{\substack{p_j | p_i \\ p_j \neq p_i}} (p_j g_j + (-1)^{r_j}) \quad \left(\beta \equiv \sum_{g_j \nmid g_i} r_j \right)
 \end{aligned}$$

ところが, 帰納法の仮定により, 点線で囲った部分は

互に等しい。

$$\therefore m_i = p_i, \quad c_i \equiv \varepsilon_i \pmod{2}$$

第 i 段階の証明終り。

補題の証明終り。

定理 5 の証明

定理 5 は補題 9 に、たゞちに従うのだが、そこに出てくる数達 n_i, c_i, m_i を次のように与える。

$$\{n_1, \dots, n_k\} \equiv \{b_1, \dots, b_n\}$$

$$c_i \equiv \#\{j \mid b_j = n_i\}$$

$$m_i \equiv \frac{1}{n_i} \left\{ \prod_{b_j = n_i} \left(\frac{b_j}{a_j} - 1 \right) - (-1)^{c_i} \right\}$$

とおく。すぐわかるように

$$m_i n_i + (-1)^{c_i} \neq 0$$

$$\prod_{b_j = n_i} \left(\frac{1}{a_j} \Delta_{b_j} - 1 \right) = m_i \Delta_{n_i} + (-1)^{c_i}$$

となる。 $n_i = 2$ のときの $m_i = 0$ となり、更に

$$\begin{aligned} \operatorname{divisor} \Delta_f(t) &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{a_i} \Delta_{b_i} - 1 \right) \\ &= \prod_{i=1}^k (m_i \Delta_{n_i} + (-1)^{c_i}) \end{aligned}$$

であるから、 $\operatorname{divisor} \Delta_f(t) = \operatorname{divisor} \Delta_g(t)$ に、補題 9 を適用することが出来、定理 5 の主張が証明された。

定理 5 の証明終り。

Examples 10

$$(1) \quad f(z, w) \equiv z_1^2 + \dots + z_n^2 + w_1^3 + w_2^{2p}$$

$n = \text{even}$, $(3, p) = 1$ について,

$$\Delta_f(t) = \frac{t^{4p} + t^{2p} + 1}{t^2 + t + 1} \quad \therefore \Delta_f(1) = 1$$

$$(2) \quad f(z, w) \equiv z_1^2 + \dots + z_n^2 + w_1^3 + w_2^p$$

$n = \text{odd}$, $(2, p) = (3, p) = 1$ について

$$\Delta_f(t) = \frac{(t+1)(t^{3p}+1)}{(t^3+1)(t^p+1)} \quad \therefore \Delta_f(1) = 1$$

この Examples から, $n = 1$ を除いて, $K \equiv S^{2n+3} \cap X_f$ は topological sphere であることが知られる。
 X_f が K の cone であることを憶えば, 冚 X_f の位相
 だけからでは, $f(z, w)$ の weights が決定出来ないこ
 とがわかり, 3変数の場合 (定理2) が唯一の例外で
 あることが知られる。

(3)

$$f \equiv x^2 + y^2 + z^2 + w^{13} \quad \text{of type } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{13}\right)$$

$$g \equiv x^2 + y^3z + z^2w + yw^2 \quad \text{of type } \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, \frac{5}{13}\right)$$

について

$$\Delta_f(t) = \Delta_g(t) = \frac{(t-1)(t^{26}-1)}{(t^2-1)(t^{13}-1)} = \frac{t^{13}+1}{t+1}$$

Brieskorn-Pham type $f(x, y, z, w)$ とそうでないもの $g(x, y, z, w)$ とに対し, その特性多項式が互に等しく, 共に, 超球とその切り口 K が topological sphere であることが知られる。

References

- [1] Lê Dũng Tráng : Topologie des singularites des hypersurfaces complexes. Asterisque 7 et 8, 171-182 (1972)
- [2] Milnor, J. : Singular Points of complex hypersurfaces. Princeton Univ. Press, 1968
- [3] Milnor, J., Orlik, P. : Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. Topology 9, 385-393 (1970)
- [4] Orlik, P. : Weighted homogeneous polynomials and fundamental groups. Topology 9, 267-273 (1970)
- [5] Saito, K. : Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Inventiones math. 14, 123-142 (1971)
- [6] Yoshinaga, E., Suzuki, M. : On the topological types of singularities of Brieskorn-Pham type. Sci. Rep. Yokohama National Univ. 37-43 (1978)
- [7] Yoshinaga, E., Suzuki, M. : Topological types of quasi-homogeneous singularities in C^2 . Topology 18, 113-116 (1979)
- [8] Yoshinaga, E. : Topological types of isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials. (to appear in J. Math. Soc. Japan)