数理解析研究所講究録
第 496 巻 1983 年 66-85

関数値の超越性に関するMahlerの問題について。

奈良女子大学 西岡久美子 (Kumiko Nishioka)

§1 序.

以下では、Ωは成分がすべて非負有理整数である(n, n)行列で、次をみたすとする。

(0) Ωの固有多項式は$\mathbb{Q}$上既約で、その固有値を$\rho_1, \cdots, \rho_n$とするとき、$\rho_1 > 0$ かつ $\rho_1 > |\rho_2| \geqq \cdots \geqq |\rho_n|$。

(A_{ij})は$\Omega - \rho_1 E$ (E は単位行列) の余因子行列の転置行列とする。$\Omega^k = (o_{ij}^{(k)})$ $(0 \leqq k \in \mathbb{Z})$ とおく。変数$z = (z_1, \cdots, z_n)$に対して、

$$T^k z = (z_1^{(k)}, \cdots, z_n^{(k)}), \quad z_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{n} z_j^{o_{ij}^{(k)}}$$

と定義する。Fを有限次代数体とし、$f(z)$ はFに係数をもつ巾級数とする。Mahler (1929) は次の定理を証明した。

定理 (Mahler) $f(z)$が$\overline{\mathbb{Q}}(z_1, \cdots, z_n)$上超越的で、関数方程式

$$f(Tz)=\frac{\sum_{i=0}^{m} a_i(z) f(z)^i}{\sum_{i=0}^{m} b_i(z) f(z)^i}, \quad a_i(z), b_i(z) \in \overline{\mathbb{Q}}[z_1, \cdots, z_n]$$

をみたし，$m<\rho_1$ とする。$\Delta(z)$ で $\sum_{i=0}^{m} a_i(z) u^i$ と $\sum_{i=0}^{m} b_i(z) u^i$ の u に関する終結式を表わす。このとき，$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$ が

$\alpha_1 \cdots \alpha_n \neq 0$，$\sum_{j=1}^{n} |A_{1j}| \log \alpha_j$ の実部は負，

$f(z)$ は $z=\alpha$ で収束，$\Delta(T^k \alpha) \neq 0 \quad (\forall k \geqq 0)$

をみたせば，$f(\alpha)$ は超越数である。

例えば，$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} z^{2^k}$ とすると $f(z^2)=f(z)-z$ で，定理を適用すれば，$0<|\alpha|<1$ なる代数的数 α に対して，$f(\alpha)$ が超越数であることがわかる。Mahler (1930a, 1930b) は $\Omega=\begin{pmatrix} \rho & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \rho \end{pmatrix}$ なる形の行列をも扱い，また，いくつかの関数の値の代数的独立性に関する結果も得ている。しかしながら，これらの結果は最近までほとんど知られていなかった。そこで，Mahler (1969) はこれらの結果を再び述べ，またいくつかの問題を提出した。それ以後，Mahler 自身や，J.H. Loxton，A.J. Van der Poorten，K.K. Kubota 等により，研究が進められた。これから述べるのは，1969年に提出された問題の1つに関する研究である。

問題。 $\overline{\mathbb{Q}}$係数の多項式 $P(u, v, z)$ に対して、$f(z)$ が $P(z, f(z), f(Tz)) = 0$ をみたすとき、上と同じような結果は得られるか？

上記 Mahler の定理は $\deg_v P = 1$ の場合に対するものである。この問題はこれまで全く研究されていなかった。$\deg_v P = 1$ とそうでない場合とではどこが異なるか少し述べてみよう。 まず記号を定義する。$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$ に対して、

$$\overline{|\alpha|} = \max_{\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})} |\alpha^{\sigma}| \quad , \quad (\alpha \text{ の house という})$$

$$d(\alpha) = \min \{ d \mid d \geqq 0,\ d \in \mathbb{Z},\ d\alpha \text{は代数的整数} \}$$

$$\mathrm{size}(\alpha) = \max \{ \log \overline{|\alpha|},\ \log d(\alpha) \}$$

と定義する。このとき、$0 \neq \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $[\mathbb{Q}(\alpha) ; \mathbb{Q}] \leqq d$ なら、

fundamental inequality : $\log |\alpha| \geqq -2d\ \mathrm{size}(\alpha)$

が成り立つ。超越数論では、与えられた関数から適当な補助関数を作り、ある点での関数値に fundamental inequality を適用して矛盾を導くことにより定理を証明する方法が一般的である。Mahler の方法でもやはりそうで、この場合、fundamental inequality が適用される数はある十分大きな k に対する $F'(f(T^k\alpha), \alpha)$ (F' は F に P の係数をつけ加えた体) に入っている。(α, $f(\alpha)$ は代数的数であると仮定している。) $f(T^k\alpha) \in F'(f(\alpha), \alpha)$ だから、d は k に依

らずにとれる。$\deg_v P = l > 1$ の場合には、$f(T^k\alpha) \in F'(f(\alpha), \alpha)$ とは限らないから、一般には、k が大きくなれば d は大きくなってしまう。

Mahlerは補助関数を作る際に、Siegel の補題を使っていない。私は Siegel の補題を使って補助関数を作ることにより、次の § に述べる定理を証明することができた。また級数を一般化して、有理数を巾にもつ巾級数を扱い、変換Tも一般化しておいた。こうすることにより、巾の分母が無限に大きくなる場合には巾級数そのものの $\mathbb{Q}(z_1, \cdots, z_n)$ 上の超越性が言えるため，exampleが豊富になる。

§2. 定理と補題。

Ω は (0) をみたし、$t \in \mathbb{N}$, $\rho_t > 1$ とする。変数 $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $0 \leqq k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$T^k z = (z_1^{(k)}, \cdots, z_n^{(k)}), \quad z_i^{(k)} = \prod_{j=1}^{n} z_j^{\omega_{ij}^{(k)}/t^k}$$

と定義する。$f(z) = \sum a_{k_1 \cdots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ は F に係数をもち、非負有理数を巾にもつ形式的巾級数で、次の (1) ~ (4) をみたすとする。また、$a_{0 \cdots 0} = 0$ と仮定しても一般性を失なわないので、以下では常に $a_{0 \cdots 0} = 0$ とする。

(1) $S_k = \{(k_1, \cdots, k_n) \mid a_{k_1 \cdots k_n} \neq 0,\ k_i \leqq k\ (1 \leq i \leq n)\}$

とおくとき、S_k は有限集合で、S_kの元の成分 k_i すべての共通分母を δ_k で表わすと、ある定数 $c_1>0$ と $0 \le \tau < \frac{1}{n}$ が存在して、 $\delta_k \leqq c_1 k^{\tau}$ をみたす。

(2) $f(z)$ は $\overline{\mathbb{Q}}(z_1, \cdots, z_n)$ 上超越的である。

(3) $f(z)$ は次の形の関数方程式をみたす。

$$(2.1)\quad Q_0(z, f(z)) f(Tz)^{\ell} + Q_1(z, f(z)) f(Tz)^{\ell-1} + \cdots + Q_{\ell}(z, f(z)) = 0,$$

ここで $Q_i(z, u) \in \overline{\mathbb{Q}}[z_1, \cdots, z_n, u]$, $Q_0(z, f(z)) \neq 0$.

$Q_0(z,u), \cdots, Q_{\ell}(z,u)$ は u の多項式として共通因子をもたないと仮定してよいので、$g_0(z,u), \cdots, g_{\ell}(z,u) \in \overline{\mathbb{Q}}[z_1, \cdots, z_n, u]$ が存在して、

$$0 \neq g(z) = \sum_{i=1}^{\ell} g_i(z,u) Q_i(z,u) \in \overline{\mathbb{Q}}[z_1, \cdots, z_n]$$

となる。

$$m = \max_{0 \le i \le \ell} \deg_u Q_i(z,u)$$

と定義する。

(4) $d_k = \min\left\{ d \;\middle|\; \begin{array}{l} d \in \mathbb{Z},\ d>0,\ S_k\text{の元}\ (k_1, \cdots, k_n)\ \text{に対し} \\ d a_{k_1 \cdots k_n}\ \text{はすべて代数的整数} \end{array} \right\}$

とおくとき、定数 $c_2>0$, $L\geqq 1$ があって、

$$\log \boxed{a_{k_1,\cdots k_n}} \leqq c_2(\max\{k_1,\cdots,k_n\})^L,$$

$$\log d_k \leqq c_2 k^L$$

をみたす。

$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in \mathbb{C}^{\times n}$ に対して $(\log\alpha_1,\cdots,\log\alpha_n)$ を fix しておく。 $0\leqq k\in\mathbb{Z}$ に対して、

$$\log \alpha_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{n} (O_{ij}^{(k)}/t^k)\log\alpha_j$$

とおく. (1) をみたす巾級数 $f(z)$に対して

$$\sum a_{k_1\cdots k_n} e^{k_1\log\alpha_1^{(k)}+\cdots+k_n\log\alpha_n^{(k)}}$$

が絶対収束すれば、それを $f(T^k\alpha)$ で表わす。

定理1。 $f(z)$ が (1) ～ (4) をみたすとする。
$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\overline{\mathbb{Q}}^n$, $\alpha_1\cdots\alpha_n\neq 0$, $\sum_{j=1}^{n}|A_{1j}|\log\alpha_j$ の実部が負, $\forall k\geqq 0$ に対して $f(T^k\alpha)$ が存在し、$g(T^k\alpha)\neq 0$と仮定する。$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$によって生成される乗法群のrank はn_0以下であるとする。このとき,

$$(2.2)\quad \frac{\rho_1}{t}\times\min\left\{\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{\frac{1-n\eta}{L+n(1+\eta)-1}},\left(\frac{\rho_1}{|\rho_2|}\right)^{\frac{1-n\eta}{n(1+\eta)}}\right\} > (t^{n_0}\ell)^{n+1}\times\max\left\{\frac{\rho_1}{t},m\right\}$$

ならば、$f(\alpha)$ は超越数である。

次の定理は条件(4)が条件(1),(3)から従うことを示す。

定理2. $f(z)$が(1),(3)をみたすならば，$f(z)$は(4)をみたし、Lとして $\max\{1+2\eta+\varepsilon,\ (2+3\eta)(n-1)\}$ をとれる。ここで，εは任意の正の数。

Mahlerが扱ったのは $t=1$, $\eta=0$, $\ell=1$ の場合で，$m<\rho_1$ という条件が必要だった。定理1,2より，

$$m<\rho_1\times\min\left\{\rho_1^{\frac{1}{L+n-1}},\ \left(\frac{\rho_1}{|\rho_2|}\right)^{\frac{1}{n}}\right\}$$

でよいことがわかる。右辺の第2項は1より大きいから，この場合にもMahlerの定理よりよくなっている。

例1. $\Omega=\begin{pmatrix}a&1\\1&0\end{pmatrix}$ $(a\geqq 2)$, $t=1$とする。Ωの固有値ρ_1,ρ_2は $\rho_1>a$, $|\rho_2|\leqq 1$ をみたす。

$$f(z_1,z_2)=\prod_{k=0}^{\infty}\left(1-z_1^{(k)}z_2^{(k)}\right)^{\ell^k}\qquad(\ell\geqq 1)$$

とおくと $f(Tz)^{\ell}(1-z_1z_2)=f(z_1,z_2)$ をみたす。$a_1=a_2=1$, $a_k=aa_{k-1}+a_{k-2}$ とおくと，$z_1^{(k)}z_2^{(k)}=z_1^{a_{k+1}}z_2^{a_k}$ となり，$f(z_1,z_2)$が$\mathbb{C}(z_1,z_2)$上超越的なることも容易にわかる。また$L=1$ととれる。定理1より $\ell^6<a$ ならば $\alpha_i\in\overline{\mathbb{Q}}$, $0<|\alpha_i|<1$ なる(α_1,α_2)に対して$f(\alpha_1,\alpha_2)$は超越数である。

例2。 $p\in\mathbb{N}$, $t\geqq 2$, $(p,t)=1$, $\frac{p}{t}>1$ とする。

$$A(z,X)=a_0(z)+a_1(z)X+\cdots+a_\ell(z)X^\ell\in\overline{\mathbb{Q}}[z,X]$$

で $a_0(0)=0$, $a_0(z)\neq 0$, $a_1(0)\neq 0$, $a_i(z)$ $(0\leq i\leq \ell)$ の係数はすべて0以上とする。このとき

$$w_0(z)=0,\quad w_n(z)=A(z,w_{n-1}(z^{\frac{p}{t}}))$$

で帰納的に $w_n(z)$ を定義すれば $w_n(0)=0$ で $w_n(z)$ の係数はすべて 0 以上となる。

$$\begin{aligned}&\mathrm{ord}_z(w_{n+1}(z)-w_n(z))\\ &\geqq \mathrm{ord}_z(w_n(z^{\frac{p}{t}})-w_{n-1}(z^{\frac{p}{t}}))\\ &=\frac{p}{t}\,\mathrm{ord}_z(w_n(z)-w_{n-1}(z))\end{aligned}$$

$\mathrm{ord}_z(w_1(z)-w_0(z))>0$ より、正有理数を巾にもつ巾級数 $f(z)=\sum a_h z^h$ が存在して、$\lim_{n\to\infty}w_n(z)=f(z)$ となる。w_n の作り方より、

$$f(z)=A(z,f(z^{\frac{p}{t}}))。$$

また、$a_h\neq 0$ なら、$h=n_0+n_1\left(\frac{p}{t}\right)+\cdots+n_i\left(\frac{p}{t}\right)^i$ $(0\leq n_i\in\mathbb{Z})$ とかける。従って $\eta=\dfrac{\log t}{\log p-\log t}$ として $f(z)$ は (1) をみたす。ある $i_0\in\mathbb{N}$ に対して $a_{i_0\left(\frac{p}{t}\right)^i}\neq 0$ $(\forall i\geqq 0)$ となり、$f(z)$ は Puiseux 級数でないので $\mathbb{C}(z)$ 上超越的である。また、$A(z,X)$ の係数から計算可能な定数 $C>1$ が存在して

$$\boxed{a_h}\leqq C^h,\quad d_h\leqq C^h\qquad(h>0)$$

つまり、$L=1$ として $f(z)$ は (4) をみたす。特に $\{|z|<\frac{1}{C}\}$

で $f(z)$ は収束する。定理1より、

$$\left(\frac{p}{t}\right)^{\frac{1-\eta}{1+\eta}} > (t\ell)^2$$

なら、$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$, $f(\alpha)$ が存在, $a_\ell(\alpha^{(\frac{p}{t})^k}) \neq 0$ $(\forall k \geqq 0)$ をみたす α に対して、$f(\alpha)$ は超越数である。
特に、$A(z, X) = z + X$ つまり、$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{(\frac{p}{t})^k}$ のときは、$p > t^5$ なら上の条件がみたされ、$\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}$, $0 < |\alpha| < 1$ なる α に対して $f(\alpha)$ は超越数である。

定理の証明に必要ないくつかの補題を述べる。

Ω が (0) をみたすとき、Mahler (1929) は次のことを証明した。

$A_{11}, \cdots, A_{n1}$ $(A_{11}, \cdots, A_{1n})$ は同時に正あるいは、同時に負で、$\mathbb{Q}$ 上1次独立である。

$$\Omega^k = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^k T_i \qquad (k \geqq 0)$$

とかける。ここで、T_i は k に独立な matrix で $T_1 = A_1(A_{i1}A_{1j})$ $(A_1 \in \mathbb{R}^\times)$ とかけ、T_1 の成分はすべて正である。

このことから、次の2つの補題が証明される。

補題1. $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in \mathbb{C}^{\times n}$ に対して，$\Lambda=\sum_{j=1}^{n}|A_{1j}|\log\alpha_j$ とおき，$\mathrm{Re}\,\Lambda$ で Λ の実部を表わす。このとき $k_1,\cdots,k_n\in\mathbb{Q}$ に対して，

$$\log|(\alpha_1^{(k)})^{k_1}\cdots(\alpha_n^{(k)})^{k_n}|$$
$$=\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{k}|A_1|(\mathrm{Re}\,\Lambda)\sum_{i=1}^{n}k_i|A_{i1}|+\varphi(k_1,\cdots,k_n,k)$$

ここで $|\varphi(k_1,\cdots,k_n,k)|\leqq C_3\left(\sum_{i=1}^{n}|k_i|\right)\left(\frac{|\rho_2|}{t}\right)^{k}$ で C_3 は Ω と α のみに依る定数。

補題2. $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in\overline{\mathbb{Q}}^{\times n}$ とする。このとき Ω と α にのみよる定数 $C_4>0$ が存在して，$\log\overline{\left|\alpha_i^{(k)}\right|}\leqq C_4\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{k}$ $(1\leqq i\leqq n,\ k\geqq 0)$ をみたす。また Ω と α のみによる正有理整数 d が存在して，$d^{[(\frac{\rho_1}{t})^{k}]}\alpha_i^{(k)}$ $(1\leqq i\leqq n,\ 0\leqq k)$ はすべて代数的整数である。

補題3. $f(z)=\sum a_{k_1\cdots k_n}z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}$ が (1) をみたすとする。$a_{k_1\cdots k_n}\neq 0$，$a_{k_1'\cdots k_n'}\neq 0$，$(k_1,\cdots,k_n)\neq(k_1',\cdots,k_n')$，$k_i,k_i'\leqq k$ $(1\leqq i\leqq n)$ とする。このとき Ω と f のみに依る定数 $C_5>0$ が存在して

$$\left|\sum_{i=1}^{n}(k_i-k_i')|A_{i1}|\right|\geqq C_5 k^{-n(1+\eta)+1}.$$

証明. $A_{11},\cdots,A_{n1}$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立な実数であったから，

$|A_{11}|, \cdots, |A_{n1}|$ もまた $\mathbb{Q}$ 上一次独立である。ρ_1 は代数的整数であったから、$|A_{i1}|$ も代数的整数で

$$[\mathbb{Q}(A_{11}, \cdots, A_{n1}) : \mathbb{Q}] \leqq [\mathbb{Q}(\rho_1) : \mathbb{Q}] = n.$$

(1) によって $\delta_k \leqq c_1 k^n$ で，$\delta_k (h_i - h_i') \in \mathbb{Z}$ $(1 \leqq i \leqq n)$。従って

$$N_{\mathbb{Q}(\rho_1)/\mathbb{Q}} \ \delta_k \left(\sum_{i=1}^{n} (h_i - h_i') |A_{i1}| \right) \geqq 1.$$

これより補題3を得る。

補題 4.　$B_0 \neq 0, B_1, \cdots, B_\ell$ を代数的数とし、

$$B_0 \beta^\ell + B_1 \beta^{\ell-1} + \cdots + B_\ell = 0$$

とする。このとき，

$$\overline{|B_0 \beta|} < \overline{|B_0|} + \overline{|B_1|} + \cdots + \overline{|B_\ell|}.$$

また，$DB_0, DB_1, \cdots, DB_\ell$ がすべて代数的整数となるような有理整数 D に対して，$DB_0\beta$ も代数的整数である。

§3.　定理 1 の証明。

$f(z)$ と α が定理 1 の条件をすべてみたすとする。以下において，さらに $f(\alpha)$ が代数的数であると仮定して矛盾を導く。

$$\Lambda = \sum_{j=1}^{n} |A_{1j}| \log \alpha_j, \quad M = \max\left\{ \frac{\rho_1}{t}, m \right\}$$

とおく。$c_8, c_9, \cdots$ は Ω, f, α 及び関数方程式 (2.1) のみに依る，1 以上の定数を表わすことにする。

$0 \leqq r \in \mathbb{Z}$ とする。$f(T^r\alpha)$, $f(T^{r+1}\alpha)$ は収束し，(3)より

$$(3.1)\quad Q_0(T^r\alpha,\ f(T^r\alpha))f(T^{r+1}\alpha)^{\ell} + Q_1(T^r\alpha,\ f(T^r\alpha))f(T^{r+1}\alpha)^{\ell-1} + \cdots + Q_\ell(T^r\alpha,\ f(T^r\alpha)) = 0$$

仮定より，$g(T^r\alpha) \neq 0$ だから，$Q_\ell(T^r\alpha,\ f(T^r\alpha)), \cdots,$ $Q_{\ell-1}(T^r\alpha,\ f(T^r\alpha))$ のうち少くとも1つは0でない。

$$j_r = \min\{\, j \mid Q_j(T^r\alpha,\ f(T^r\alpha)) \neq 0 \,\}$$

とおく。Y_r $(r \geqq 0)$ を次の様に帰納的に定義する。

$$Y_0 = 1,\quad Y_r = Q_{j_{r-1}}(T^{r-1}\alpha,\ f(T^{r-1}\alpha))\,Y_{r-1}^{m} \qquad (r \geqq 1)。$$

$Y_r \neq 0$ $(r \geqq 0)$ である。

補題 6.　$r \geqq 1$ に対して，

$$[F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots, \alpha_1^{(r)}, \cdots, \alpha_n^{(r)}, f(\alpha), \cdots, f(T^r\alpha)) ; Q] \leqq c_9 (t^{n_0}\ell)^r,$$

$$\mathrm{size}(Y_r),\ \mathrm{size}(Y_r f(T^r\alpha)) \leqq c_{10}\, r M^r。$$

証明。(3.1) を使って前半は容易にわかる。後半を証明しよう。$Q_j(z, u)$ の係数はすべて代数的整数と仮定してよい。$Q_j(z, u)$ $(0 \leqq j \leqq \ell)$ の z に関する total degree は s 以下であるとする。$f(\alpha)$ の house，$Q_j(z, u)$ $(0 \leqq j \leqq \ell)$ の係数の house は c_8 以下で $c_4^s \leqq c_8$ とする。$D \in \mathbb{N}$ は $d(f(\alpha))$，d^s の倍数とする。(c_4, d は補題2にあらわれた定数)

このとき $r \geqq 1$ に対して

$$(*)\begin{cases} \circ\ \overline{|Y_r|},\ \overline{|Y_r f(T^r\alpha)|} \\ \qquad \leqq \{(\ell+1)(s+1)^n(m+1)C_8\}^{1+M+\cdots+M^{r-1}} \times C_8^{rM^{r-1}+M^r}, \\ \circ\ D^{[rM^{r-1}+M^r]}Y_r,\ D^{[rM^{r-1}+M^r]}Y_r f(T^r\alpha) \text{ は} \\ \quad \text{ともに代数的整数} \end{cases}$$

となることをrに関する帰納法で示す。$r=1$のとき，

$Y_1 = Q_{j_0}(\alpha, f(\alpha))$ で

$$Y_1 f(T\alpha)^{\ell-j_0} + \cdots + Q_\ell(\alpha, f(\alpha)) = 0,$$

$$\overline{|Q_j(\alpha, f(\alpha))|} \leqq (s+1)^n(m+1)C_8 \times C_8^{1+m}, \quad (0 \leqq j \leqq \ell)$$

$$D \times D^m Q_j(\alpha, f(\alpha)) \text{ は代数的整数。} \quad (0 \leqq j \leqq \ell)$$

補題4を使って，

$$\overline{|Y_1 f(T\alpha)|} \leqq (\ell+1)(s+1)^n(m+1)C_8 \times C_8^{1+m},$$

$$D^{1+m}Y_1 f(T\alpha) \text{ は代数的整数。}$$

よって(*)は成立する。$r>1$とする。(3.1)とY_rの定義より，

$$Y_r f(T^r\alpha)^{\ell-j_{r-1}} + \cdots + Y_{r-1}^m Q_\ell(T^{r-1}\alpha, f(T^{r-1}\alpha)) = 0.$$

帰納法の仮定と補題2より，

$$\overline{|Y_{r-1}^m Q_j(T^{r-1}\alpha, f(T^{r-1}\alpha))|} \leqq (s+1)^n(m+1)C_8 \times C_8^{\left(\frac{p_1}{t}\right)^{r-1}}$$

$$\times \left\{((\ell+1)(s+1)^n(m+1)C_8)^{1+M+\cdots+M^{r-2}} \times C_8^{(r-1)M^{r-2}+M^{r-1}}\right\}^m,$$

$$D^{\left[\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{r-1}\right]} \times \left(D^{[(r-1)M^{r-2}+M^{r-1}]}\right)^m \times Y_{r-1}^m Q_j(T^{r-1}\alpha, f(T^{r-1}\alpha))$$

は代数的整数。

補題2を使って(*)が成立することがわかる。

(2.2)より.

$$(3.2)\quad \min\left\{\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{\frac{1}{L+n(1+\eta)-1}},\ \left(\frac{\rho_1}{|\rho_2|}\right)^{\frac{1}{n(1+\eta)}}\right\}$$
$$> t^{n_0}\ell\left\{\left(\frac{t}{\rho_1}\right)(t^{n_0}\ell)^{n(1+\eta)}M\right\}^{\frac{\eta}{(1+\eta)(1-n\eta)}}$$
$$\times\left\{\left(\frac{t}{\rho_1}\right)(t^{n_0}\ell)^{n(1+\eta)}M\right\}^{\frac{1}{(1+\eta)(1-n\eta)}}$$

従って次をみたすq_2が存在する。

$$\begin{cases}(3.3)\quad q_2 > \left\{\left(\frac{t}{\rho_1}\right)(t^{n_0}\ell)^{n(1+\eta)}M\right\}^{\frac{1}{(1+\eta)(1-n\eta)}} \quad (\geqq 1)\\ (3.4)\quad \min\left\{\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{\frac{1}{L+n(1+\eta)-1}},\ \left(\frac{\rho_1}{|\rho_2|}\right)^{\frac{1}{n(1+\eta)}}\right\} > t^{n_0}\ell\, q_2^{1+\eta}.\end{cases}$$

(3.3)より.

$$(3.5)\quad q_2 > \left(\frac{t}{\rho_1}\right)t^{n_0}\ell M\,(t^{n_0}\ell\, q_2^{\eta})^{n(1+\eta)-1}.$$

(3.4)と(3.5)より.次をみたすq_1が存在する。

$$\begin{cases}(3.6)\quad q_1 > t^{n_0}\ell\, q_2^{\eta},\\ (3.7)\quad q_2 > \left(\frac{t}{\rho_1}\right)t^{n_0}\ell M q_1^{n(1+\eta)-1},\\ (3.8)\quad \min\left\{\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^{\frac{1}{L+n(1+\eta)-1}},\ \left(\frac{\rho_1}{|\rho_2|}\right)^{\frac{1}{n(1+\eta)}}\right\} > q_1 q_2.\end{cases}$$

(3.7) より $t^{n_0} l < g_1 g_2$, これと (3.8) より.

(3.9) $t^{n_0} l \, (g_1 g_2)^L < \left(\frac{\rho_1}{t}\right) g_1 g_2$。

補題 7. $k \in \mathbb{N}$ とする。$\gamma_1 = 2(C_1+1)^n g_1^{n(1+\eta)k}$, $\gamma_2 = g_2^{(1+\eta)k}$ とおく。このとき, $[\gamma_1]+1$ 個の F の代数的整数を係数にもつ多項式

$$P_j(z) = \sum_{0 \le k_i \leqq [\gamma_2]} b^{(j)}_{k_1 \cdots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} \qquad (0 \le j \le [\gamma_1])$$

で以下をみたすものが存在する。

i) $\mathrm{size}\,(b^{(j)}_{k_1 \cdots k_n}) \leqq C_{11} k \, (g_1 g_2)^{Lk}$

$E_k(z) = \sum_{j=0}^{[\gamma_1]} P_j(z) f(z)^j = \sum b_{k_1 \cdots k_n} z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ とおくとき.

ii) $k_i < (g_1 g_2)^k$ $(1 \le i \le n)$ なる $(k_1, \dots, k_n)$ に対して, $b_{k_1 \cdots k_n} = 0$。

iii) $\mathrm{size}\,(b_{k_1 \cdots k_n}) \leqq C_{12} k \, (\max\{k_1, \dots, k_n\})^L$

iv) $\log |b_{k_1 \cdots k_n}| \leqq C_{13} k (g_1 g_2)^{Lk} + C_{13} \max\{k_1, \dots, k_n\}$

証明. $b^{(j)}_{k_1 \cdots k_n}$ $(0 \le k_i \le [\gamma_2],\ 0 \le j \le [\gamma_1])$ を変数とする, 一次方程式系を解けばよいのであるが, その際に, 条件 (4) を使って方程式系の係数の size を評価することができ, 従って Siegel の補題を使うことができる。詳細は略.

$E_k(z)$ を補題7で構成された巾級数とする。

$$H = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i |A_i| \;\middle|\; b_{k_1,\dots,k_n} \neq 0 \right\} = \sum_{i=1}^{n} H_i |A_i|$$

とおく。$(g_1 g_2)^K \leqq \max\{H_1, \dots, H_n\} < (g_1 g_2)^{K+1}$ をみたす整数 K をとる。$\max\{H_1, \dots, H_n\} \geqq (g_1 g_2)^k$ であったから，$K \geqq k$ である。

補題8． $k \geqq 1$ のとき，

$$[\mathbb{Q}(Y_K^{[\gamma_1]} E_k(T^K \alpha)) : \mathbb{Q}] \leqq C_{24} (t^{n_0} \ell)^K,$$

$$\mathrm{size}\,(Y_K^{[\gamma_1]} E_k(T^K\alpha))$$
$$\leqq C_{25} K (g_1 g_2)^{LK} + C_{26} \left(\left(\frac{\rho_1}{t}\right) g_2^{1+\eta} \right)^K + C_{27} K \left(g_1^{n(1+\eta)} M \right)^K.$$

証明。

$$Y_K^{[\gamma_1]} E_k(T^K\alpha) = \sum_{j=0}^{[\gamma_1]} P_j(T^K\alpha)(Y_K f(T^K\alpha))^j Y_K^{[\gamma_1]-j}$$

と，補題6より前半は直ちに従う。補題2，6，7より，

$$\mathrm{size}\,(Y_K^{[\gamma_1]} E_k(T^K\alpha))$$
$$\leqq \log([\gamma_1]+1)([\gamma_2]+1)^n + C_{11} k (g_1 g_2)^{Lk}$$
$$+ C_{28}\, n [\gamma_2] \left(\frac{\rho_1}{t}\right)^K + [\gamma_1] C_{10} K M^K.$$

これより後半が証明される。

補題9． k が十分大きいとき，$Y_K^{[\gamma_1]} E_k(T^K\alpha) \neq 0$ で，

$$\log |Y_K^{[\gamma_1]} E_k(T^K\alpha)| \leqq \frac{\mathrm{Re}\,\Lambda}{2} |A_1| \left(\min_{1 \leq i \leq n} |A_i| \right) \left(\frac{\rho_1}{t}\right)^K (g_1 g_2)^K.$$

証明。

$$E_k(z) = b_{H_1\cdots H_n} z_1^{H_1} \cdots z_n^{H_n} \left\{ 1 + \sum \frac{b_{k_1\cdots k_n}}{b_{H_1\cdots H_n}} z_1^{k_1-H_1} \cdots z_n^{k_n-H_n} \right\}$$

ここで．Σ は $\sum_{i=1}^{n} H_i |A_{i1}| < \sum_{i=1}^{n} k_i |A_{i1}|$ をみたす．すべての $(k_1, \cdots, k_n)$ に対してである。補題 7 と fundamental inequality より．

(3.12) $$\log \left| \frac{b_{k_1\cdots k_n}}{b_{H_1\cdots H_n}} \right|$$

$$\leqq C_{13} k (q_1 q_2)^{Lk} + C_{13} \max\{k_1, \cdots, k_n\} + C_{29} k (\max\{k_1, \cdots, k_n\})^L$$

$$\leqq C_{30} K (q_1 q_2)^{LK} + C_{31} \sum_{i=1}^{n} k_i |A_{i1}|。$$

$0 \leqq y \in \mathbb{Z}$ に対して．

$$B_y = \sum \frac{b_{k_1\cdots k_n}}{b_{H_1\cdots H_n}} e^{(k_1-H_1)\log \alpha_1^{(K)} + \cdots + (k_n-H_n)\log \alpha_n^{(K)}}$$

とおく．ここで Σ は

(**) $\sum_{i=1}^{n} H_i |A_{i1}| + y + 1 \geqq \sum_{i=1}^{n} k_i |A_{i1}| > \sum_{i=1}^{n} H_i |A_{i1}| + y$

をみたす．すべての $(k_1, \cdots, k_n)$ に対してである。すると

(3.13) $$E_k(T^K \alpha) = b_{H_1\cdots H_n} e^{H_1 \log \alpha_1^{(K)} + \cdots + H_n \log \alpha_n^{(K)}} \left(1 + \sum_{y=0}^{\infty} B_y\right)$$

$E_k(z)$ は性質 (2) をみたし．その際の c_1, γ は $f(z)$ と同じものがとれることより．補題 1 と (3.12) を使って．

$\log|B_y|$

$$\leqq \log c_{32}((g_1g_2)^{K+1}+y+1)^{n(H+\eta)}+c_{30}K(g_1g_2)^{LK}+c_{31}\max\left\{\sum_{i=1}^{n}\mathfrak{h}_i|A_{i1}|\right\}$$

$$+\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^K|A_1|(\mathrm{Re}\Lambda)\min\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{h}_i-H_i)|A_{i1}|\right\}+c_{32}\max\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mathfrak{h}_i-H_i|\right\}\left(\frac{|\rho_2|}{t}\right)^K。$$

ここで max. min は $(**)$ をみたす $(\mathfrak{h}_1,\cdots\mathfrak{h}_n)$ すべてに対してである。$y\geqq 1$ なら. $\min\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{h}_i-H_i)|A_{i1}|\right\}>y\geqq 1$, 従って (3.8) を使って $\mathfrak{k}$ が十分大なら.

(3.14) $\displaystyle \log|B_y|\leqq\frac{\mathrm{Re}\Lambda}{2}|A_1|\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^K y$。

$y=0$ なら、補題3より. $(**)$ をみたす $(\mathfrak{h}_1,\cdots,\mathfrak{h}_n)$ に対して.

$$\sum_{i=1}^{n}(\mathfrak{h}_i-H_i)|A_{i1}|\geqq c_{33}(g_1g_2)^{(-n(H+\eta)+1)K}。$$

これと (3.8) を使って、$\mathfrak{k}$ が十分大なら.

(3.15) $\displaystyle \log|B_0|\leqq\frac{\mathrm{Re}\Lambda}{2}|A_1|\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^K c_{33}(g_1g_2)^{(-n(H+\eta)+1)K}$。

(3.14) と (3.15) より、$\mathfrak{k}$ が十分大なら.

$$\left|\sum_{y=0}^{\infty}B_y\right|\leqq\sum_{y=0}^{\infty}|B_y|<1。$$

従って (3.13) より. $\mathfrak{k}$ が十分大なら. $E_{\mathfrak{k}}(T^K\alpha)\neq 0$。

補題 1, 6, 7, (3.7), (3.8) より. $\mathfrak{k}$ が十分大なら.

$\log|Y_K^{[\gamma_1]}E_{\mathfrak{k}}(T^K\alpha)|$

$$\leqq\frac{\mathrm{Re}\Lambda}{2}|A_1|\left(\min_{1\leqq i\leqq n}|A_{i1}|\right)\left(\frac{\rho_1}{t}\right)^K(g_1g_2)^K$$

を得る。

定理1の証明。$Y_K^{[\gamma_1]}E_{\mathfrak{k}}(T^K\alpha)$ に fundamental inequality を適用し、補題8, 9 を使うと、$\mathfrak{k}$ が十分大なら

$$
\frac{\mathrm{Re}\,\Lambda}{2}|A_1|\left(\min_{1\le i\le n}|A_{i1}|\right)\left(\frac{p_1}{t}\right)^K(q_1q_2)^K
$$

$$
\geqq -2c_{24}(t^{n_0}\ell)^K\left\{c_{25}K(q_1q_2)^{LK}+c_{26}\left(\left(\frac{p_1}{t}\right)q_2^{1+\eta}\right)^K+c_{27}K(q_1^{n(1+\eta)}M)^K\right\}
$$

$\mathrm{Re}\,\Lambda<0$, $K\geqq k$ に注意すれば (3.6), (3.7), (3.9)より．これは矛盾。従って $f(\alpha)$ は超越数である。

定理の証明において．$E_k(z)$ の $z=(0,\cdots,0)$ における order から Kが決まり．このKに対して $E_k(T^K\alpha)\neq 0$ となることが重要である。従って最近の Masser (1982) の結果（$E_k(T^r\alpha)\neq 0$ なる rが無限に多く存在する）だけでは．不充分であり．Ωに関する条件を弱めることは困難であろうと思われる。

定理2の証明は省略する。

References.

S. Lang (1966), Introduction to transcendental numbers, (Addison-Wesley).

J. H. Loxton and A. J. Van der Poorten (1977), 'Transcendence and algebraic independence by a Method of Mahler', Transcendence Theory-Advances and Applications, ed. A. Baker and D. W. Masser, Chapter 15, pp. 211-226 (Academic Press)

K. Mahler (1929), 'Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen', Math. Ann. 101, 342-366.

K. Mahler (1930a), 'Über das Verschwinden von Potenzreihen mehrerer Veränderlichen in speziellen Punktfolgen', Math. Ann. 103, 573-587.

K. Mahler (1930b),'Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen', Math. Z. 32, 545-585.

K. Mahler (1969), 'Remarks on a paper by W. Schwarz', J. Number Theory 1, 512-521.

D. W. Masser (1982), 'A vanishing theorem for power series', Invent. math., 67, 275-296.

K. Nishioka (1982), 'On a problem of Mahler for transcendency of function values', J. Austral. Math. Soc.(Series A), 33, 386-393.