数理解析研究所講究録
第 496 巻 1983 年 96-105

ハウスドルフ次元とエントロピー

静岡大教養部　馬場 良和 (Yoshikazu Baba)

Billingsley [1] 以来，ハウスドルフ次元とエントロピーの関係が注意されているが，本稿では，あるクラスの確率過程の ε-エントロピーと path のハウスドルフ次元について述べる。§1 では，有限集合のエントロピーと無限集合の場合の ε-エントロピーについて，§2 では，確率変数のエントロピーと ε-エントロピーについて述べる。§3 では，とくに，1 次元安定過程の ε-エントロピーと，その path のハウスドルフ次元について知られている結果を述べる。§4 では，若干の関連事項について述べる。

§1. 集合のエントロピーと ε- エントロピー

E を有限集合としたとき，E のエントロピー H(E) は，

$$H(E) = \log_2 N(E)$$

で定義される。ただし，N(E)はEの濃度である。これは，Eの元全体を同じ長さの2進数で符号化するのに要する符号の長さである。

Eが無限集合の場合には，$H(E)=\infty$ となってしまうので，エントロピー無限大の集合のクラス分けを行いたい。Eを距離空間Xの全有界な部分集合，$\varepsilon>0$とする。$N_\varepsilon(E)$をEの，直径2ε 未満の集合による，covering の最小個数とするとき，Eのε-エントロピー $H_\varepsilon(E)$は，

$$H_\varepsilon(E)=\log_2 N_\varepsilon(E)$$

で定義される。$N_\varepsilon(E)$ は，Eの要素を精度 ε 以内で区別するのに要する，Eの最小有限部分集合の濃度である。$\varepsilon\downarrow 0$ のとき，一般に，$H_\varepsilon(E)\uparrow\infty$ であるが，この無限大への発散の order で集合Eを特徴づけようというのが，Kolmogorov [6] の idea であった。

典型的な発散の order としては，次の3つがある。

(I) Eが $\mathbb{R}^d$ の内点をもつ集合のとき

$$H_\varepsilon(E)=d\log_2\frac{1}{\varepsilon}+o\left(\log_2\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

(II) Eが解析関数のあるクラスのとき

$$H_\varepsilon(E)\asymp\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

(III) Eが n-変数，C^p-級，p次導関数 $(0\leq p<\infty)$ が α次 Hölder 連続性をもつ関数のあるクラスのとき

$$H_\varepsilon(E) \asymp (1/\varepsilon)^{\frac{n}{p+\alpha}}$$

（$\asymp$ は発散の order が同じであることを表わす）

(1) は $\log\frac{1}{\varepsilon}$，(2)は $(\log\frac{1}{\varepsilon})^s$ $(s>1)$，(3) は $(\frac{1}{\varepsilon})^q$ $(q>0)$ という無限大への発散の order をもつ。なお，次の極限が存在するとき，それぞれを，E の metric dimension, functional dimension, metric order という。

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{H_\varepsilon(E)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\ (\equiv dm(E)),\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\log H_\varepsilon(E)}{\log\log\frac{1}{\varepsilon}}\ (\equiv df(E)),\ \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{\log H_\varepsilon(E)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}\ (\equiv q(E))$$

(1)，(2)，(3) の場合には，それぞれ，$dm(E)=d$, $df(E)=2$, $q(E)=\frac{n}{p+\alpha}$ となっている。

§2. 確率変数のエントロピーと ε- エントロピー

$X=X(\omega)$ が有限個の値しかとらない確率変数のとき，X のエントロピー $H(X)$ は，

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$$

で定義される。ここで，$p_i \equiv P(X(\omega)=x_i) \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ である。このとき，$0 \leq H(X) \leq \log_2 n$ であり，$H(X) = \log_2 n$ となるのは，$p_i = \frac{1}{n}$ $(1\leq i\leq n)$ の場合だけである。このとき，$H(X)$ は §1 の場合のエントロピーに帰着する。

$Y=Y(\omega)$ を，他の有限個の値をとる確率変数とすると

き，Xに含まれるYの情報量 $I(X,Y)$ を，

$$I(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log_2\frac{p_{ij}}{p_i q_j}$$

で定義する。ただし，$p_{ij}=P(X(\omega)=x_i,\ Y(\omega)=y_j)$，$q_j=P(Y(\omega)=y_j)$ である。このとき，$I(X,X)=H(X)$，$I(X,Y)=0 \Leftrightarrow$ XとYは独立　となっている。

次に，無限個の値をとる確率変数のエントロピーを考える。$X=X(\omega)$，$Y=Y(\omega)$ を距離空間Rの値をとる確率変数としたとき，Xに含まれるYの情報量 $I(X,Y)$ を，上を一般化した形で，

$$I(X,Y)=\iint_{R\times R} P_{XY}(dx,dy)\log\frac{P_{XY}(dx,dy)}{P_X(dx)\,P_Y(dy)}$$

で定義する。P_X，P_Y，P_{XY} は，それぞれ，X，Y，(X,Y) の確率分布である。これを用いて，距離空間Rの値をとる確率変数Xの ε-エントロピーを，

$$H_\varepsilon(X)=H_\varepsilon^{(\rho)}(X)=\inf_{Y\in W_\varepsilon} I(X,Y)\,,\quad W_\varepsilon=\left\{Y;\int_\Omega \rho(X,Y)\,dP\leqq\varepsilon\right\}$$

で定義する。ここで，ρ はRの metric とする。また，W_ε として，$\overline{W}_\varepsilon=\{Y;\int_\Omega \rho(X,Y)^2 dP\leqq\varepsilon^2\}$ を用いることもある。このときの ε-エントロピーを $\overline{H}_\varepsilon(X)$ と書くことにすると，Schwarz の不等式により，$H_\varepsilon(X)\leqq\overline{H}_\varepsilon(X)$ となる。なお，

$R = L^1[0,T]$ のときの $H_\varepsilon(X)$ を $H_\varepsilon^{(1)}(X)$, $R = L^2[0,T]$ のときの $\widetilde{H}_\varepsilon(X)$ を $H_\varepsilon^{(2)}(X)$ と書くことにする。

一般に, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} H_\varepsilon(X) = \infty$ であるが, §1 の発散の order に対応して,

(I) X が $\mathbb{R}^d$ 値確率変数, Poisson 過程, 複合 Poisson 過程などのとき, $H_\varepsilon(X) \asymp \log\frac{1}{\varepsilon}$

(II) X が Gaussian Fourier 級数のあるクラスのとき

$$H_\varepsilon(X) \asymp \left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

(III) X が Brown 運動, 安定過程などのとき

$$H_\varepsilon(X) \asymp \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^\gamma \quad (\gamma > 0)$$

となっている。

§3. 安定過程の場合

確率過程 $X = \{X_t(\omega)\,;\, 0 \le t < \infty\}$ が時間的に一様な加法過程であるとは, i) $X_0(\omega) \equiv 0$, ii) 任意の $n \ge 3$ と任意の $0 \le t_0 < t_1 < \cdots < t_n < \infty$ にたいして, $X_{t_i}(\omega) - X_{t_{i-1}}(\omega)$ ($1 \le i \le n$) が独立で, それらの確率法則が差 $t_i - t_{i-1}$ にしか依存しない。場合にいう。これは, 独立な, 同分布に従う確率変数列の和の連続化である。以下は, 典型的な例で, 安定過程は, それらの一般化である。また, これらの例について,

$H_\varepsilon(X)$ と path のハウスドルフ次元についての知られている結果を述べる。

例 1. Poisson 過程 $P_t(\omega)$。これは，ω をとめて，$P_t(\omega)$ を t の関数とみたとき ― それを path という ― 確率 1 で，path は jump 1 で増加する階段関数になっていて，$P_t(\omega)-P_s(\omega)$ $(t>s\geq 0)$ の分布がパラメータ $\lambda(t-s)$ の Poisson 分布になっているものである：$P(P_t(\omega)-P_s(\omega)=k)=\lambda^k(t-s)^k/k!\cdot e^{-\lambda(t-s)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$。このとき，$H_\varepsilon^{(1)}(P) \asymp \log\frac{1}{\varepsilon}$（Kazi [4]）。また，集合 $\{P_t(\cdot)\,;\,0\leq t<\infty\}$ は可算集合だから，そのハウスドルフ次元は 0 であり，グラフ $\{(t,P_t(\cdot))\,;\,0\leq t<\infty\}$ のハウスドルフ次元は 1 である。

例 2. 複合 Poisson 過程 $C_t(\omega)$。$\{\xi_n(\omega)\}_{n\geq 1}$ を独立・同分布の確率変数列，$P_t(\omega)$ をそれと独立な Poisson 過程とするとき，$C_t(\omega)=\xi_1(\omega)+\cdots+\xi_{P_t(\omega)}(\omega)$ を複合 Poisson 過程という。ただし，$P_t(\omega)=0$ のときには，$C_t(\omega)=0$ とする。$C_t(\omega)$ は，$P_t(\omega)$ が jump する時点で $\xi_n(\omega)$ の確率分布 dF に従って，上下に jump する path をもつものである。ε-エントロピー，path のハウスドルフ次元については，Poisson 過程の場合と同様である。

例 3. 1 次元 Brown 運動 $B_t(\omega)$。path が確率 1 で連続で，$B_t(\omega)-B_s(\omega)$ $(t>s\geq 0)$ が平均 0，分散

$t-s$ の正規分布：$P(B_t(\omega)-B_s(\omega)\in E)=\int_E \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp(-\frac{x^2}{2(t-s)})dx$ に従うものを Brown 運動という。これは，Brown 粒子の運動の一つの理想化である。P. Lévy [7] は $B_t(\omega)$ の path の一様連続性について，$|B_t(\omega)-B_s(\omega)|\leq \text{Const.}\times\sqrt{2|t-s|\log\frac{1}{|t-s|}}$，$|t-s|<\delta=\delta(\omega)$ のとき，を示した。これは，$B_t(\omega)$ の path が局所的には，ほぼ $\frac{1}{2}$-Hölder 連続性をもつことを示すが，Kolmogorov [5] は，$H_\varepsilon^{(2)}(B_t(\cdot)) \asymp 1/\varepsilon^2$ を示した。これは，§1 の (Ⅲ) で $n/(p+\alpha)=1/(0+\frac{1}{2})=2$ となっていることに相当する。また，$B_t(\omega)$ の path のハウスドルフ次元については，確率 1 で $\dim(\{B_t(\cdot);0\leq t<\infty\})=1$，$\dim(\{(t,B_t(\cdot));0\leq t\leq 1\})=\frac{3}{2}$ となる（Taylor [10]）。これらについては，多次元への拡張がいろいろ得られている。

加法過程には，path の jump の仕方を規定する測度 $n(du)$ が対応している。Poisson 過程の場合には，jump 1 のみで増加することに対応して，$n(du)=\delta_{\{1\}}$，複合 Poisson 過程の場合には，$\xi_n(\omega)$ の確率分布 $F(du)$ の定数倍である。安定過程は，$n(du)=C_+\frac{du}{u^{1+\alpha}}\ (u>0)$，$=C_-\frac{du}{|u|^{1+\alpha}}\ (u<0)$ に対応するもので，$0\lneqq\alpha\leqq 2$ である。$\alpha=2$ の場合が Brown 運動で，path は連続，$0<\alpha<2$ のときには，path は複雑に jump する。安定過程の path のハウスドルフ次元については，確率 1 で次の結果がなり立つが，これらについても多次元安定過程への

拡張が得られている。

$0<\alpha<1$ のとき，$\dim(\{X_t(\cdot);0\leq t\leq 1\})=\alpha$ (McKean [9])

$\dim(\{(t,X_t(\cdot));t\geqq 0\})=1$ (Blumenthal-Getoor [2])

$1\leq\alpha\leq 2$ のとき，$\dim(\{X_t(\cdot);0\leq t\leq 1\})=1$ (McKean [9])

$\dim(\{(t,X_t(\cdot));t\geqq 0\})=2-1/\alpha$ (B.-G. [2])

安定過程の ε-エントロピーについては，$1<\alpha\leq 2$ のときの，Kazi [4] の結果：$H_\varepsilon^{(1)}(X)\asymp 1/\varepsilon^\alpha$ があるのみである。

§4. Remarks

Remark 1. $\{x\}$ を実数 x から最も近い整数までの距離，$r\geqq 2$ を偶数とするとき，$F_r(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\{r^n x\}/r^n$ は，連続かつ到るところ微分不可能な関数である。$F_2(x)$ は高木貞治が発見し(1903)，その4半世紀後に van der Waerden が $F_{10}(x)$ を再発見した(1928)。$M_r=\max_{0\leq x\leq 1}F_r(x)$，$E_r=\{0\leq x\leq 1;\ F_r(x)=M_r\}$ とおく。E_2 の構造について，最近 Б. Мартынов [8] が解説を書いているが，一般に，E_r のハウスドルフ次元については，$\dim E_r=1/2$ ($\forall r\geqq 2$，偶数) がなりたつことがわかる。このことは，Brown 運動の path が確率1で微分不可能かつ，$B_t(\cdot)$ の零点のハウスドルフ次元 $=1/2$，という事実に対応

するものである。

<u>Remark 2.</u> あるクラスの Gaussian Fourier 級数の ε-エントロピーと path の regularity。

Gaussian Fourier 級数とは，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(X_n \cos nt + Y_n \sin nt)$, $a_n \geqq 0$; $\{X_n, Y_n ; n \geqq 0\}$ は平均 0，分散 1 の正規分布に従う独立確率変数列 となっているものをいう。$\sum a_n^2 < \infty$ のとき，これは，$\forall t$ について，$L^2(\Omega)$ で収束し，確率過程 $X_t(\omega)$ を表わす。次の 3 つの $\{a_n\}_n$ について，対応する $X_t(\omega)$ の ε-エントロピー，path の regularity を考察する。後者については，$\Delta_j = (2 \cdot \sum_{2^j \leq n < 2^{j+1}} a_n^2)^{1/2}$ の $j \to \infty$ での挙動，とくに，$\sigma \equiv \varliminf_{j \to \infty} -\log \Delta_j / j \log 2$ が関係する（Kahane [3]）。ここで，$\log$ は自然対数とする。

(1) $a_n = 1/n^{\alpha + \frac{1}{2}}$ $(\alpha > 0)$ のとき，$H_\varepsilon^{(2)}(X) \asymp 1/\varepsilon^{1/\alpha}$，$\sigma = \alpha$ となる。そして，$\alpha = n + \alpha_0$ $(0 \leq n \leq \infty, 0 < \alpha_0 < 1)$ としたとき，$X_t(\cdot)$ の path は，確率 1 で C^n-級であり，n 階の導関数は，$\forall \delta > 0$ について，$\alpha_0 - \delta$ 次の Hölder 連続性をもつ。

(2) $a_n = 1/e^{n\alpha}$ $(\alpha > 0)$ のとき，$H_\varepsilon^{(2)}(X) \asymp (\log \frac{1}{\varepsilon})^2$，$\sigma = \infty$ である。（§2. (II) の例）。このとき，$X_t(\omega)$ の path は C^∞-級であるが，§1 の結果から類推すると，解析的にな

っていることが予想される。

(3) $a_n = 1/n^{1/2}\cdot(\log n)^{\alpha+1/2}$ $(\alpha>0)$ のとき，$H_\varepsilon^{(2)}(X)$ は，e^{1/ε^2} の order より大きい。また，$\sigma=0$ であって，このとき，path は確率1で有界でない。

参考文献

[1] P. Billingsley; Ergodic Theory and Information, New York (1965).

[2] R.M. Blumenthal and R.K. Getoor; The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process, Ill. Jour. Math. 6 (1962) 308-316.

[3] J-P. Kahane; Some Random Series of Functions, Massachusetts (1968).

[4] K. Kazi; On the ε-entropy of stable processes, Jour. Math. Soc. Jap. 26-2 (1974) 181-205.

[5] A.N. Kolmogorov; Theory of transmission of information, Transl. A.M.S. II-33 (1963) 291-321.

[6] A.N. Kolmogorov and V.M. Tihomirov; ε-entropy and ε-capacity of sets in functional spaces, Transl. A.M.S. II-17 (1961) 277-364.

[7] P. Lévy; Processus stochastiques et mouvements browniens, Paris (1948).

[8] Б. Мартынов; О максимуах функции Ван-дер-Варденa, Квант, 1982年6月号, 8-14.

[9] H.P. McKean, Jr.; Sample functions of stable processes, Ann. Math., 61-3 (1955) 564-579.

[10] S.J. Taylor; The α-dimensional measure of the graph and set of zeros of a Brownian path., Proc. Camb. Phil. Soc. 51 (1955) 265-274.