数理解析研究所講究録
第 496 巻 1983 年 106-122

連分数展開とエルゴード理論

津田塾大学 伊藤 俊次 (Shunji Ito)

§0 Introduction.

次の定理から出発しよう。

$\boxed{\text{定理 1}}$ $x\in[0,1)$ の連分数による n 次近似分数を $p_n(x)/q_n(x)$ とするとき,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right| = -\frac{\pi^2}{6\log 2} \quad \text{a.e.}$$

$\boxed{\text{定理 2}}$ $f(q)$ は整数 q に対して定義された正の函数とする。このとき,

(i) $qf(q)\searrow$ 且つ $\sum f(q)=\infty$ ならば, a.e x に対して

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q}$$ は無限に多くの整数解をもつ。

(ii) $\sum f(q)<\infty$ ならば, ほとんど全ての x に対して

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{f(q)}{q}$$ は高々有限コの解しか持たない。

これら2つの定理は連分数展開に対しての測度論的 (エルゴード理論的) 視点からのアプローチの典型である。上記の定理に共通していえることは, 数論的対象, ここでは連分数展開, に対して測度論的 (エルゴード論的) 手法を用いて, 何らかの意味で, 数論的に意味のある主張が試みられている。

今のところエルゴード理論的手法とは，変換とその上の不変測度を導入し，これを用いて何んらかの主張を試みることとする。

例えば通常の連分数展開（ordinary simple continued fraction，以後簡単のためにOCFと書く）においては，

$$\text{変換 } T\ ;\ [0,1) \to [0,1) \qquad x \rightsquigarrow \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$$

と $a(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ と定めれば，

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cdots}}$$

（ここで $a_n(x) = a(T^{n-1}x)$ for $n \geq 1$ とする。）

を得ることが出来る。ところで，この変換 T の不変測度 μ は

$$\frac{d\mu}{dm} = \frac{1}{\log 2}\frac{1}{1+x} \qquad (\text{但し } m \text{ は } [0,1) \text{ 上の Lebesgue 測度})$$

となる。更に T は μ に関してエルゴード的となる。この事実を用いて定理1，2が得られる。

ところで，エルゴード理論的手法を用いたときの最大の"弱点"は「殆んどいたるところ」(a.e) の実数 x に対して云々という主張しか出来ないところにある。しかし，一方「平均的には」(a.e) 云々という，数論的な対象に対して異る角度からの接近を提供している。（詳しくは [1] を参照のこと）

§1 有理整数体上の連分数展開と不変測度

実数 x の連分数展開 $x=\cfrac{1}{a_1(x)+\cfrac{1}{a_2(x)+\cdots}}$ として O.C.F では

$a_i(x)\in\{1,2,\cdots\}$ となっている。上記 x の展開の形式のもとで $a_i(x)\in\mathbb{Z}$ を許るしたものとして、整数論的に重要な2つの展開について主にこの§では議論しよう。

1つは nearest integer continued fraction (N.I.C.F) と呼ばれるもので、次の Algorithm よりなるものである。

各整数 n に対して $[n-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}]=U_n$ と考え、$x\in R$ の Gauss part $\underbrace{\text{として}}_{[\cdot]_{1/2}}$ $[x]_{1/2}=n$ とは $x\in U_n$ と定める。

Algorithm を与える変換 S は新しい Gauss part を用いて

$$S\ ;\ [-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\longrightarrow[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})$$
$$x\ \rightsquigarrow\ \frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]_{1/2}$$

とし $b(x)=\left[\frac{1}{x}\right]_{1/2}$ とする。このとき、$b_n(x)=b(S^{n-1}x)$ とすれば $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ は $x=\cfrac{1}{b_1(x)+\cfrac{1}{b_2(x)+\cdots}}$ という展開を得る。

このようにして得られる N.I.C.F の数論的意味についてはここではふれないこととしよう。([2],[3] 参)。ところで $b_i(x)$ は $b_i(x)\in\{\pm2,\pm3,\cdots\}$ となっている。更に重要なことは $b_i(x)=2$ なら $b_{i+1}(x)\geqq2$ ($b_i(x)=-2$ なら $b_{i+1}(x)\leqq-2$) という性質をもっている。

そこで次のような整数の両側 sequence を後のため準備しよう。 $M_S = \{ (\cdots b_{-1}, b_0, b_1, \cdots) \mid |b_i| \geqq 2, \text{if } b_i = 2 \text{ then } b_{i+1} \geqq 2 \text{ and if } b_i = -2 \text{ then } b_{i+1} \leqq -2 \}$

として M_S の元を S-admissible sequence と呼ぶことにする。

N.I.C.F について議論する前にそれと重要な関係にある、もう1つの連分数展開を準備しよう。それは Singular continued fraction (S.C.F) と呼ばれるもので次の Algorithm よりなる。 $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\beta = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ $(\alpha+\beta=1)$ とし、 $n \geqq 2$ なる整数に対しては $U_n = [n-\beta, n+\alpha)$, $n \leqq -2$ に対しては $U_n = [n-\alpha, n+\beta)$ という近傍を考え、実数 x の新しい Gauss part $[x]_\alpha$ を $[x]_\alpha = n$ とは $x \in U_n$ と定める。

Algorithm を与える変換 S^* は今の Gauss part を用いて、

$$
\begin{array}{cccc}
S^* ; & [-\alpha, \alpha) & \longrightarrow & [-\alpha, \alpha) \\
 & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
 & x & \rightsquigarrow & \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]_\alpha
\end{array}
$$

とし $b^*(x) = \left[\frac{1}{x}\right]_\alpha$ とする。このとき $b_n^*(x) = b^*(S^{n-1}x)$ とすれば、 $x \in [-\alpha, \alpha)$ は $x = \cfrac{1}{b_1^*(x) + \cfrac{1}{b_2^*(x) + \cdots}}$ という展開を得る。この sequence $(b_1^*(x), b_2^*(x), \cdots)$ は

$b_i^*(x) \geqq 2$ なら $b_{i+1}^*(x) \neq -2$ ($b_i^*(x) \leqq -2$ なら $b_{i+1}^*(x) \neq 2$)

という性質をもつことは容易に確かめられる。

そこで

$$M_{S^*} = \{ (\cdots b_{-1}^* \, b_0^* \, b_1^* \cdots) \mid |b_i^*| \geqq 2 \;\; \text{if } b_i^* \geqq 2 \text{ then } b_{i+1}^* \neq -2, \; \text{if } b_i^* \leqq -2 \text{ then } b_{i+1}^* \neq 2 \}$$

を考え，M_S^* の元を S^*-admissible sequence と呼べば，定義から $(\cdots b_{-1}, b_0, b_1, \cdots)$ が S-admissible の必要十分条件は $(\cdots b_1\ b_0\ b_{-1} \cdots)$ が S^*-admissible となる。すなわち，一方の admissible sequence を逆向きに読めば他方の admissible sequence となる。

このことの意味は，x の N.I.C.F による n 次近似分数

$$x = \cfrac{1}{b_1(x) + \cdots + \cfrac{1}{b_n(x)}} = \frac{p_n(x, \frac{1}{2})}{q_n(x, \frac{1}{2})} \quad \text{とすれば，} \quad \frac{q_{n-1}(x, \frac{1}{2})}{q_n(x, \frac{1}{2})} = \cfrac{1}{b_n(x) + \cfrac{1}{b_{n-1}(x) + \cdots + \cfrac{1}{b_1(x)}}}$$

となることはよく知られているが，この $\frac{q_{n-1}}{q_n}$ が S^*-admissible となっていることを意味している。

さて，上記の準備によって変換 S 及び S^* の不変測度は次の手続きによって求めることが出来る。S の不変測度については，$x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ に対して $R(x)$ を

$$R(x) = \left\{ \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_{-1} + \cdots}} \;\middle|\; (\cdots a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1(x), a_2(x) \cdots) \ S\text{-admissible} \right\}$$

と定める。（$R(x)$ が well-define なことは $(a_0, a_{-1}, \cdots)$ が S^*-admissible になることからくる）として $\frac{1}{(1+xy)^2}$ という Kernel function を用いて $\int_{R(x)} \frac{dy}{(1+xy)^2} = h(x)$ とすれば，$h(x)$ が S-不変測度の密度函数となる。何故 $R(x)$ が登場し，$\frac{1}{(1+xy)^2}$ を用いたかの詳略は長くなるのではぶかざるを得ない。（[4], [5] を参照のこと）

重要なことは，変換の不変測度の密度函数を求めるとき，逆向きの System（Dual System）を考えることが有効であろう，という事実である。このことの実行によって得られたのが次の結果である。

$\boxed{\text{定理}}$ 1) 変換 S の不変測度の密度函数 $h_S(x)$ は次の形で与えられ S はエルゴード的となる。

$$h_S(x) = \begin{cases} c\dfrac{1}{(1+x\alpha)(1-x\beta)} & \text{if} \quad x\in[0,\frac{1}{2}) \\ c\dfrac{1}{(1-x\alpha)(1+x\beta)} & \text{if} \quad x\in[-\frac{1}{2},0] \end{cases}$$

ここで c は normalizing constant.

2) 変換 S^* の不変測度の密度函数 $h_{S^*}(x)$ は次の形で与えられ エルゴード的。

$$h_{S^*}(x) = \begin{cases} c'\dfrac{1}{2(1-\frac{1}{2}x)} & \text{if} \quad x\in(-\alpha,\beta) \\ c'\dfrac{1}{(1-\frac{1}{4}x^2)} & \text{if} \quad x\in(-\beta,\beta) \\ c'\dfrac{1}{2(1+\frac{1}{2}x)} & \text{if} \quad x\in(\beta,\alpha) \end{cases}$$

このことを用いれば，例えば定理1と類似の結果を得ることが出来る。

$\boxed{\text{定理 } 1'}$ $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ の N.I.C.F による n 次近似分数を $\dfrac{P_n(x,\frac{1}{2})}{g_n(x,\frac{1}{2})}$ とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|x-\frac{P_n(x,\frac{1}{2})}{g_n(x,\frac{1}{2})}\right| = -\frac{\pi^2}{6\log(\beta+1)} \qquad (\text{a.e } x)$$

この定理の意味することは N.I.C.F による近似の order が O.C.F より早い,を主張している。

ところで, $x \in R$ に対して N.I.C.F 及び O.C.F の n次近似分数列を $\left\{\frac{P_1(x,\frac{1}{2})}{q_1(x,\frac{1}{2})}, \dots, \frac{P_n(x,\frac{1}{2})}{q_n(x,\frac{1}{2})}, \dots\right\}$, $\left\{\frac{P_1(x)}{q_1(x)}, \dots, \frac{P_m(x)}{q_m(x)}, \dots\right\}$ とすれば N.I.C.F から出来る x の sequence は O.C.F のそれの部分列となることが知られている。そこで $\frac{P_n(x,\frac{1}{2})}{q_n(x,\frac{1}{2})} = \frac{P_m(x)}{q_m(x)}$ となる m を $m(n,x)$ と書けば, (部分列より $m(n,x) \geq n$)

$\boxed{\text{定理}}$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{m(n,x)}{n} = \frac{\log 2}{\log(\beta+1)} \quad \text{a.e}$$

定理1′と同様,この定理は N.I.C.F と O.C.F の違いを,エルゴード定理を用いて主張している。[5]

<補′>

有理整数体上の連分数展開は Domain 及び各整数の近傍のとり方によって上記の変換以外に種々の変換の class を考えることが出来る。しかし,これらは数論的興味というよりはエルゴード理論的興味によって構成されたものである。ここにおいても この章で展開した density function の求め方は有効に機能したこと,及びエントロピーという概念が展開の order と深く結びついていることを附記しておく。詳しくは [5] [6] を見ていただきたい。

§2 虚2次体上の連分数展開と不変測度

複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して §1 と類似な連分数展開を考察する。展開にあらわれる整数として何を採用するか，によってその Algorithm は変ってくる。ここでは $\mathbb{Z}(\sqrt{3}i)$ 及び $\mathbb{Z}(i)$ を例にとりながら議論して行く。

Perron による次の定理.

$\boxed{\text{定理 A}}$ (Perron)　$z \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$ に対して

$$\left| z - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{13}\,|q|^2}$$

をみたす $p, q \in \mathbb{Z}(\sqrt{3}i)$ は無限に存在し，さらに定数 $\sqrt[4]{13}$ は最良である。

を連分数展開を用いて証明するために，金岩，田村，堀川 は[6] 次のような Algorithm を導入した。

$\underbrace{\zeta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i) \text{ とし, } \mathbb{Z}(\sqrt{-3}) \ni n\zeta + m\bar{\zeta}}_{D = \{x\zeta + y\bar{\zeta}\ ;\ 0 \leqq x, y < 1\}}$ に対して $\underbrace{D_{n\zeta+m\bar{\zeta}} =}_{D+(n\zeta+m\bar{\zeta})}$

と整数 $\alpha = n\zeta + m\bar{\zeta}$ ~~対する~~ の 対応を定義する。そこで Algorithm は

$$\text{変換 } T : D \longrightarrow D,\quad z \rightsquigarrow \frac{1}{z} - \left[\frac{1}{z}\right]$$

（ここで $a(z) = \left[\frac{1}{z}\right]$ とは $\frac{1}{z} \in D_{a(z)}$ のことをさす。）

そこで $a_n(z) = a(T^{n-1}z)$ とすれば

$$z = \cfrac{1}{a_1(z) + \cfrac{1}{a_2(z) + \cdots}}$$

と $\mathbb{Z}(\sqrt{3}i)$ 上の連分数展開が作れる。

§1と同様，$(a_1(z), a_2(z), \cdots)$ なるsequenceは $a_i(z)=*$ ならば $a_{i+1}(z)=**$ というdependenceをもつ。これについては説明を略す。このことを用いて，金若・田村・塩川はPerronの定理を連分数を用いて証明した。更に塩川は変換Tのエルゴード問題について

$\boxed{\text{定理}}$ TはD上Lebesgue measureと互いに絶対連続な不変測度 μ をもち，エルゴード的

を証明した。([7])

この定理を用いれば，

$\boxed{\text{定理}}$ $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\left|z-\frac{p_n(z)}{q_n(z)}\right| = \text{const} \quad (\text{a.e})$$

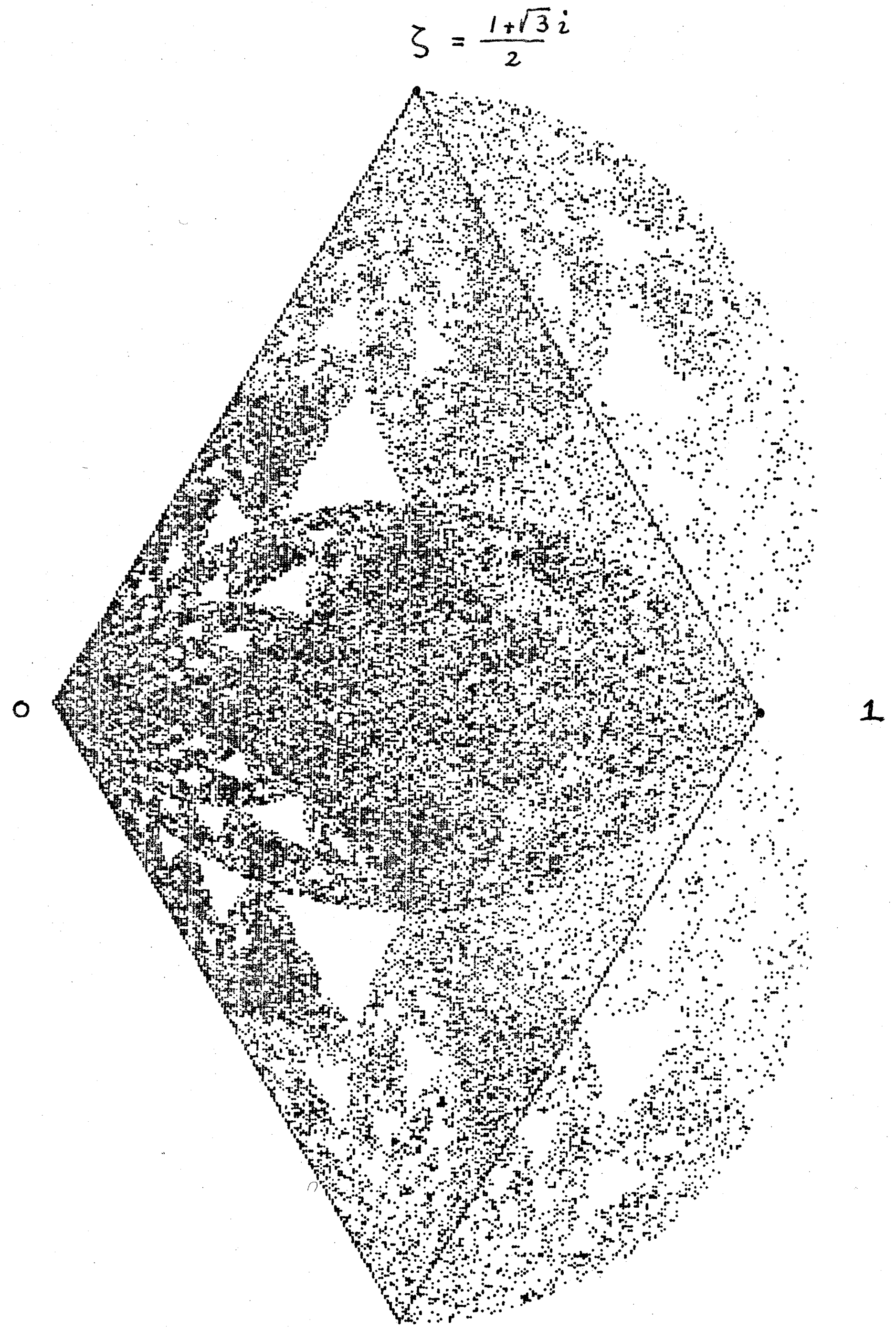
が導びかれる。しかし，このときconstの値が定まらないことは，ちょうど不変測度の密度函数が定まっていないことに対応している。そこで，次の問，

〈問題〉 Tの不変測度の形を与えよ。

が課題となる。この課題へのアプローチとして，§2で展開したDual systemが有効ではなかろうか。そこで変換Tのadmissible sequence(i.e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$)に対して

$$\left\{ \frac{1}{\alpha_n+\frac{1}{\alpha_{n-1}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n-k}}}} \;\middle|\; (\cdots\alpha_{-1}\alpha_0\,\alpha_1\alpha_2\cdots)\ \text{T-admissible} \right\}$$

なる点を計算機を用いてprotしてみた。



$\zeta = \frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$
0
1

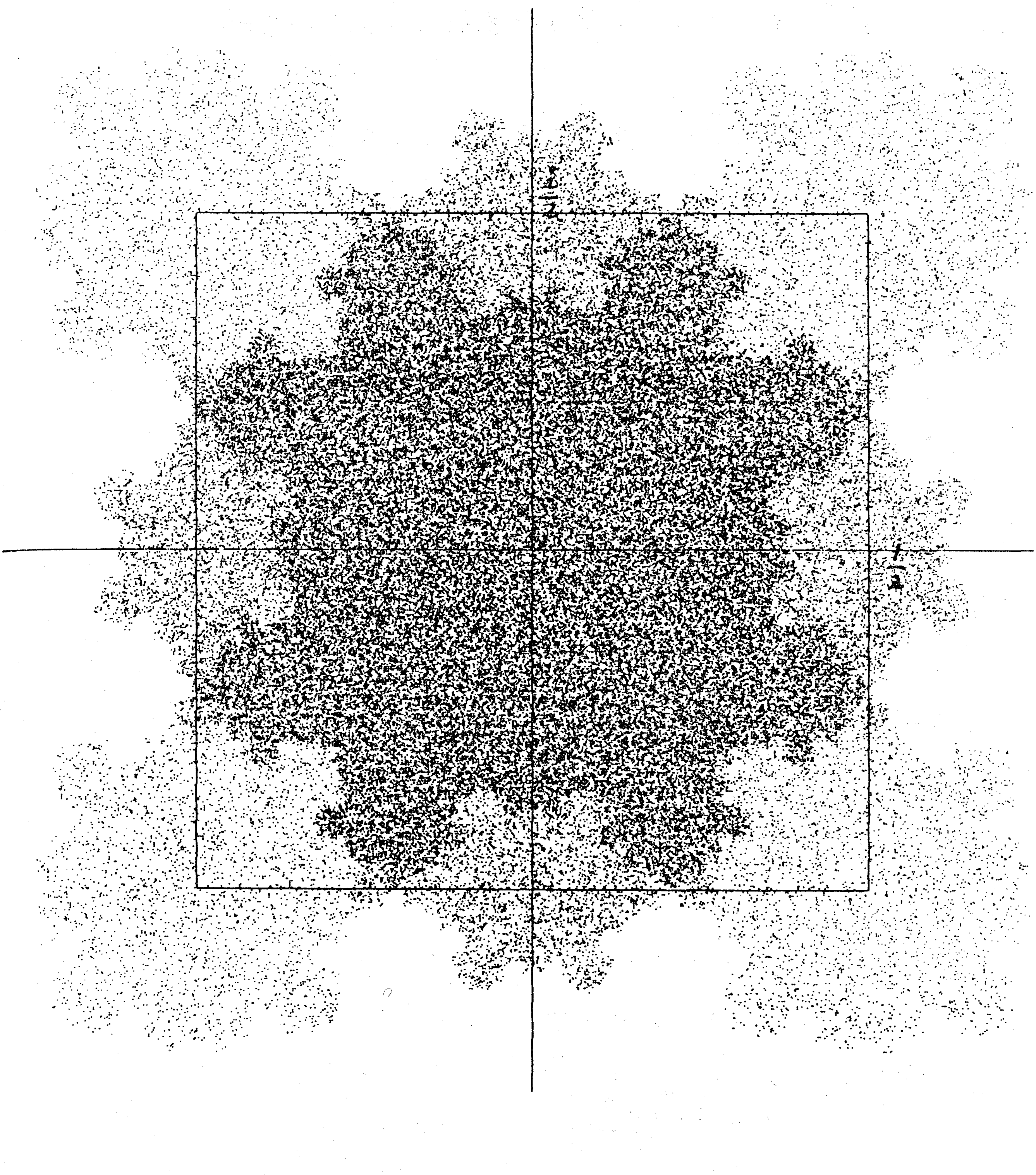
この図は，§1における S^* の domain $(-\alpha, \alpha)$ にあたるものである。一見複雑そうに見えるこの図もよくみれば，法則性をもつ。しかし，現在のところこの図の数学的定式化は出来ていない。もしそれが可能であれば，§1と同様

$$R(z) = \left\{ \frac{1}{\alpha_0 + \frac{1}{\alpha_{-1} + \cdots}} \;\middle|\; (\cdots \alpha_{-1} \alpha_0 \alpha_1(z) \alpha_2(z) \cdots) \ T\text{-admissible} \right\}$$

を定め

$\displaystyle\int_{R(z)} \frac{dw}{|1 + zw|^2}$ を求めれば，それが密度函数を与えることとなろう。

概念的にも，ほぼパラレルに $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ に関して議論が可能である。詳細は避け，Perron の定理にあたる Ford の定理に対して Lakein [8] が連分数を用いた証明に成功しており，エルゴード理論的には伊田[9]の結果がある。ここでは，Hurwitz の変換の Dual system を与えるであろう図のみを示すにとどめよう。



§3 実2次体上の連分数展開とエルゴード問題

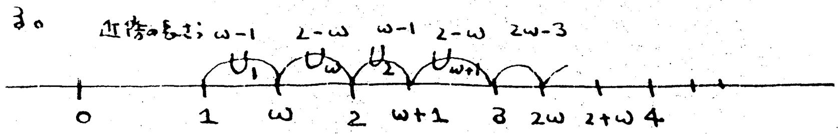
それでは次に $x\in R$ の連分数展開として実2次体の整数を許すことを考えてみよう。そこで連分数展開が可能とするために次のような Algorithm を導入する。話を簡単にするために $Z(\sqrt{5})$ のみをここでは用いる。

$\omega=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ とするとき、$Z(\sqrt{5})$ は $Z(\sqrt{5})=\{n+m\omega \mid n,m\in Z\}$ となる。そこで $Z^{+}(\sqrt{5})$ を

$$Z^{+}(\sqrt{5})=\{n+m\omega \mid n,m\geq 0 \text{ and } (n,m)\neq(0,0)\}$$ とする。

そして $Z^{+}(\sqrt{5})$ の元を $Q(\sqrt{5})$ の positive integer と呼ぶこととする。

そこで各 $n+m\omega\in Z^{+}(\sqrt{5})$ の近傍 $U_{n+m\omega}$ を $\alpha=\min\{n'+m'\omega \mid n'+m'\omega>n+m\omega \text{ and } n'+m'\omega\}$ を用いて $U_{n+m\omega}=[n+m\omega,\alpha)$ とする。

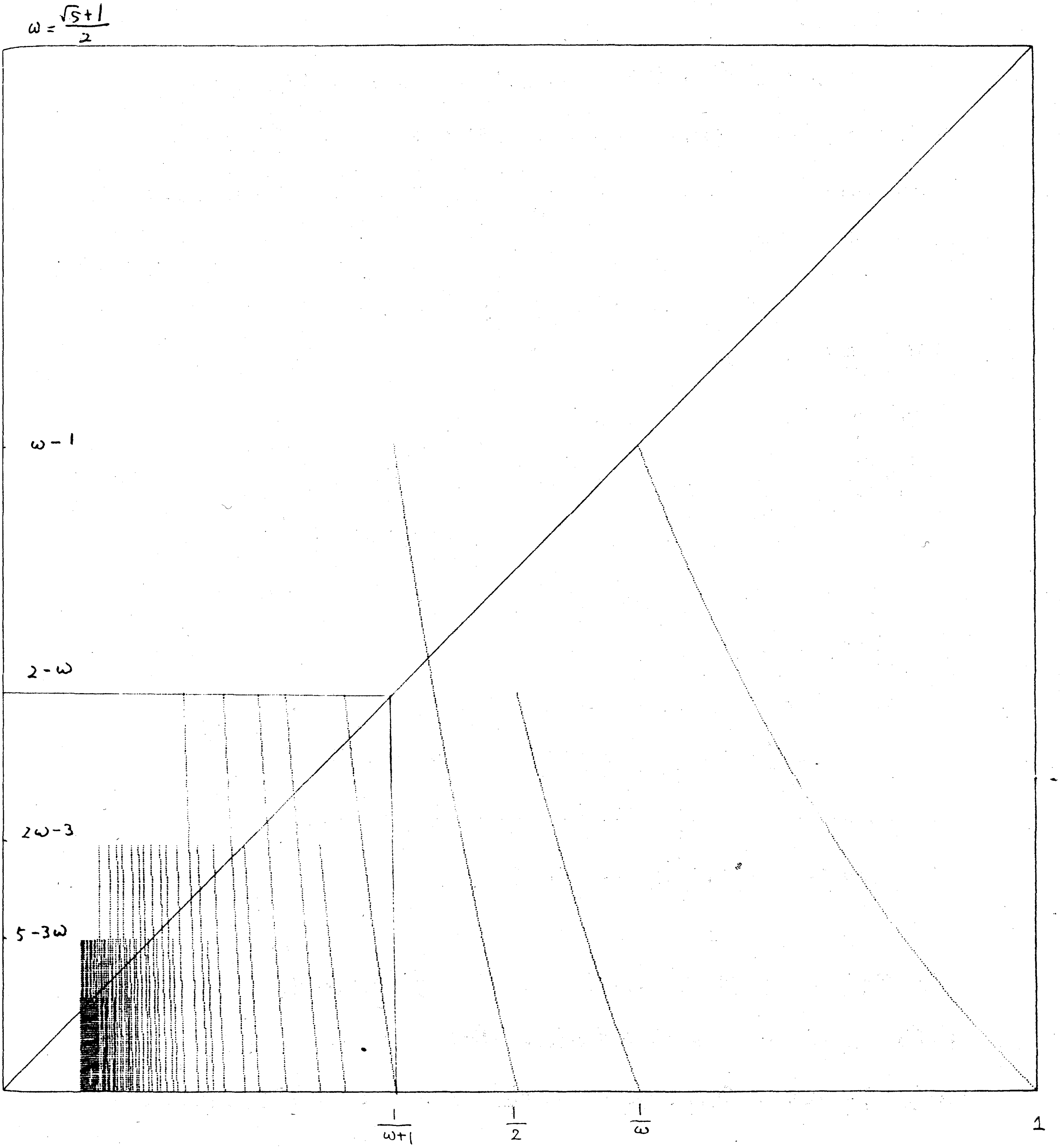


そして $x\in R$ に対して $[x]_\omega=n+m\omega$ であるとは $x\in U_{n+m\omega}$ のこととして Gauss part を定める。

そして Algorithm を与える変換 T_ω としては（図，参）

$$T_\omega ; [0,1)\longrightarrow[0,1)$$
$$x \rightsquigarrow \frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]_\omega$$

そして $d(x)=\left[\frac{1}{x}\right]_\omega$ and $d_n(x)=d(T_\omega^{n-1}x)$ とすれば、


$\omega = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
$\omega - 1$
$2 - \omega$
$2\omega - 3$
$5 - 3\omega$
$\frac{1}{\omega+1}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{\omega}$
1

$$x = \cfrac{1}{a_1(x) + \cfrac{1}{a_2(x) + \cdots}}$$ と実2次体を用いた連分数展開が可能となる。

このとき各近傍の長さ $|U_{n+m\omega}|$ はヒボナッチ数 $\{g_n\}$ を用いて，$|g_k\omega - g_{k+1}|$ となることが分る。これを用いて，admissible sequence を具体的に記述することも可能となる。(証明は全て省略)。

これからは，この $Q(\sqrt{5})$ 上連分数展開について得られた結果を羅列しよう。

Hrwizt type の定理としては

$\boxed{\text{定理}}$　$x \notin Q(\sqrt{5})$ ならば

(1) $\left| x - \dfrac{p_n}{g_n} \right| < \dfrac{1}{2\sqrt{2}\, g_n^2}$ for infinite many $\dfrac{p_n}{g_n}$

さらに $x = \sqrt{2} - 1 = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$ のとき constant $2\sqrt{2}$ は最良となる。

(2) $x \notin Q(\sqrt{5}) \cup \{\sqrt{2} - 1\}$ ならば

$\left| x - \dfrac{p_n}{g_n} \right| < \dfrac{1}{\sqrt{\omega^2 + 2\omega + 5}\, g_n^2}$ for infinite many $\dfrac{p_n}{g_n}$

さらに $x = \dfrac{-(\omega+1) + \sqrt{\omega^2 + 2\omega + 5}}{2} = \cfrac{1}{(\omega+1) + \cfrac{1}{(\omega+1) + \cdots}}$ のとき

constant $\sqrt{\omega^2 + 2\omega + 5}$ は最良

2次体の有理数 $x \in Q(\sqrt{5})$ のこの連分数展開についての特徴づけについては次の定理が得られる。($x \in Q(\sqrt{5})$ の連分数展開が有限で終るとは限らないことに注意してほしい。)

$\boxed{\text{定理}}$ $x\in Q(\omega)$ の連分数展開の項を $(d_1(x), d_2(x), \cdots\cdots)$ とするとき (1) $(d_1,\cdots\cdots, d_n)$ と有限で終る。あるいは

(2) $(d_1,\cdots,d_n,\cdots)$ と無限につづく，しかしこのときは $d_n\in \mathbb{Z}$ となる。

~~虚~~実2次体上2次の代数的数はこの連分数展開を用いて，周期的となる（Lagrange type の問題）ことを期待したい，しかしこれについては，いまだ証明が出来ず次の定理を得たのみであった。

$\boxed{\text{定理}}$ x を $Q(\sqrt{5})$ 上2次の代数的数とする。このとき $(a_1(x), a_2(x),\cdots\cdots)$ は有界，i.e. $\exists M$; $|a_i(x)|\le M$ for all i.

エルゴード理論上の問題としては変換 T_ω はきわめて興味深い。それは図でみるごとく，端点の とりうる値が可算コの Markov map となっているからである。これについては次の定理を得るのみであり，不変測度の存在は大切デリケートである。

$\boxed{\text{定理}}$ T_ω-不変な集合が存在するとすれば その測度は Lebesgue measure で測って 0又は1である（エルゴード的）

§4 おわりに

連分数展開は旧くて新しい対象のごとくである。

最近Adler達は不定曲率をもつ多様体上の測地的流れ(Geodesic flow)と連分数展開との関連を明示した。又Seriesは Fuchs群と連分数展開の関連を研究している。これらをみると、連分数展開はエルゴード理論の立場からみても新しい話題を近年再び提供しているように思われる。

文献リスト

[1] Billingsley: 確率論とエントロピー 吉岡書店

[2] A. Hurwitz: Über eine besondere —— Acta. Math 12 (1889)

[3] B. Minnigerode: ——, Gött Nachr 1873 (619-653)

[4] S. ITO, H. Nakada and S. Tanaka: ——. Keio Eng. Rep. 30 (1977)

[5] S. ITO and S. Tanaka: ——. Tokyo Journal of Math vol 4. No 1. (1981)

[6] Kaneiwa, Siokawa and Tamura: Keio Engineering Rep. 28 (12) (1975)

[7] I. Siokawa: Keio Engineering Rep. 29 (2) (1976)

[8] R. Lakein: J. Reine Angew Math 272 (1975)