数理解析研究所講究録
第 497 巻 1983 年 139-147

符号 $(p, n-p)$ の Siegel 半空間上の Eisenstein 級数

立教大学理学部　佐藤文広

1. 序。　このノートでは、次の空間

$$\mathfrak{H}^{(p,n-p)} = \{ Z = X + iY \in M(n;\mathbb{C}) \mid {}^tZ = Z,\ \mathrm{Im}\,Z = Y \text{ は符号 } (p, n-p) \text{ の非退化実対称行列} \}$$

を、符号 $(p, n-p)$ の Siegel 半空間と呼ぶことにする。$n = p$ の場合、すなわち、$\mathfrak{H}^{(n,0)}$ が通常の Siegel 上半平面である。Siegel 上半平面 $\mathfrak{H}^{(n,0)}$ においては、実解析的 Eisenstein 級数と呼ばれる n - 複素変数の（$\mathfrak{H}^{(n,0)}$ の点をパラメータとする）Dirichlet 級数が定義されて、$Sp_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{H}^{(n,0)}$ 上の調和解析で重要な役割を果すことは、良く知られているとおりである。以下、$p \neq 0, n$ の場合にも、$\mathfrak{H}^{(p,n-p)}$ 上に実解析的 Eisenstein 級数の類似物を構成することができ、$Sp_n(\mathbb{R})$ の Weyl 群の作用の下である関数等式を満足することを述べる。このようにして構成された "Eisenstein 級数" がどのような意味を持っているかは、今のところ、はっきりしていないが、少くとも形式的には、$\mathfrak{H}^{(n,0)}$ 上の Eisenstein 級数の極めて自然な

拡張である。

2. Siegel上半平面の場合。 まず、$\mathfrak{H}^{(n,0)}$ の場合の結果を復習する。

$$G = Sp_n(\mathbb{R}) = \{ g \in M(2n;\mathbb{R})\ ;\ gJ\,{}^t g = J \},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma = Sp_n(\mathbb{Z}) = Sp_n(\mathbb{R}) \cap M(2n;\mathbb{Z}),$$

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{smallmatrix} & * \\ \hline 0 & \begin{smallmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{smallmatrix} \end{array} \right] \begin{array}{l} \}n \\ \}n \end{array} \\ \underbrace{\quad}_{n}\ \underbrace{\quad}_{n} \end{array} \in Sp_n(\mathbb{Z}) \right\}$$

とおく。$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{array}{l} \}n \\ \}n \end{array} \in G$ は、$Z \in \mathfrak{H}^{(n,0)}$ に次のようにして作用する：

$$g \cdot Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}.$$

ここで $\det(CZ+D)$ は決して零にならないことに注意する。任意の $A \in M(n;\mathbb{R})$ に対して、A の右上の $i \times i$ 小行列の行列式を $d_i(A)$ で表わすことにする：

$$d_i(A) = \det A_i, \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{i} & \overbrace{\quad}^{n-i} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} A_i & * \\ \hline * & * \end{array} \right) \begin{array}{l} \}i \\ \}n-i \end{array} \end{array}.$$

$Z \in \mathfrak{H}^{(n,0)}$ について、

$$E(Z;s) = \sum_{\sigma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} \prod_{i=1}^{n} \left| d_i(Y_\sigma^{-1}) \right|^{-s_i}, \quad s = (s_1, \cdots, s_n) \in \mathbb{C}^n$$

で定義される Dirichlet 級数を考える。ここで，$Y_\sigma = \mathrm{Im}\,\sigma\cdot Z$ ($\sigma \in \Gamma$) である。これが $\mathfrak{H}^{(n,0)}$ 上の ($Sp_n(\mathbb{Z})$ に関する) 実解析的 Eisenstein 級数である。$E(Z;s)$ の関数等式を記述するためには，変数 s を

$$\begin{cases} s_1 = \lambda_2 - \lambda_1 + 1/2 \\ s_2 = \lambda_3 - \lambda_2 + 1/2 \\ \text{-------------} \\ s_{n-1} = \lambda_n - \lambda_{n-1} + 1/2 \\ s_n = \quad -\lambda_n + 1/2 \end{cases}$$

で定まる変数 $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に変換しておくと便利である。

次に，

$$\Lambda(Z;\lambda) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \eta(2\lambda_i - 2\lambda_j)\eta(2\lambda_i + 2\lambda_j) \cdot \prod_{i=1}^{n} \eta(2\lambda_i) \cdot E(Z;s),$$

$$\eta(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \quad (\zeta(s) = \text{リーマンゼータ関数})$$

とおく。

$\mathfrak{S}_n$ を n 次対称群として，$\mathfrak{S}_n$ の $\{\pm 1\}^n$ への置換としての自然な作用を考え，$\{\pm 1\}^n$ と $\mathfrak{S}_n$ の半直積を W で表わす。群 W における積は，

$$(\mu, \sigma)\cdot(\nu, \tau) = (\mu \cdot {}^{\sigma^{-1}}\nu, \sigma\tau) \quad (\mu, \nu \in \{\pm 1\}^n,\ \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n)$$

で与えられている。W は $Sp_n(\mathbb{R})$ の Weyl 群 (と同型な群) である。群 W は，変数 λ に次のようにして作用する：

$$(\mu,\sigma)\cdot\lambda = (\mu_1\lambda_{\sigma^{-1}(1)}, \cdots\cdots, \mu_n\lambda_{\sigma^{-1}(n)}), \quad \mu\in\{\pm 1\}^n, \ \sigma\in\mathfrak{S}_n.$$

以上の準備の下で，Eisenstein 級数 $E(Z;s)$ の主要性質は、次のように述べられる．

定理．(1) $E(Z;s)$ は、$\mathrm{Re}\,s_1, \cdots, \mathrm{Re}\,s_n > 1$ で絶対収束し，s の有理型関数として $\mathbb{C}^n$ 上に解析接続される。

(2) 任意の $w\in W$ に対し，関数等式

$$\Lambda(Z; w\lambda) = \Lambda(Z;\lambda)$$

を満たす。

(3)
$$\prod_{1\le i<j\le n}(\lambda_j-\lambda_i-1/2)(\lambda_j+\lambda_i+1/2)\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1/2)$$
$$\times \prod_{1\le i<j\le n}\zeta(2\lambda_j-2\lambda_i+1)\,\zeta(-2\lambda_j-2\lambda_i+1)$$
$$\times \prod_{i=1}^{n}\zeta(-2\lambda_i+1)\ \cdot E(Z;s)$$

は，整関数である。

この定理は，

R.P. Langlands, Lect. notes in Math. 544, Springer, 1976.

の一般論に含まれるが，初等的証明が，

R.P. Langlands, ibid. Appendix 1, pp. 236-268.,

及び、

B. Diehl, J. Reine und Angew. Math. 317 (1980), 40-73

において与えられている。

3. 符号 $(p, n-p)$ $(p \neq 0, n)$ の場合への拡張。$g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G$, $Z \in \mathfrak{S}^{(p,n-p)}$ とすると、Siegel 上半平面のときとは異って、$\det(CZ+D) = 0$ となることがある。そこで、$\det(CZ+D) \neq 0$ のときに限って、$g \cdot Z = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ と定義する。注1)

$Z \in \mathfrak{S}^{(p,n-p)}$ について、

$$G_Z = \{ g \in G \ ; \ AZ+B = Z \cdot (CZ+D) \}$$

とおく。$g \in G_Z$ ならば、自動的に $\det(CZ+D) \neq 0$ となり、G_Z は、Z における G の isotropy subgroup とみなせる。又、任意の Z に対して $G_Z \cong U(p, n-p)$ (符号 $(p, n-p)$ の不定符号のエルミート形式のユニタリー群) である。$\Gamma_Z = \Gamma \cap G_Z$

注1) $\mathfrak{S}^{(p,n-p)}$ は、$p \neq 0, n$ のときには、$G = Sp_n(\mathbb{R})$ の等質空間ではなく、等質空間 $Sp_n(\mathbb{R})/U(p, n-p)$ の開集合とみなされる。$g \cdot Z$ がこの開集合をはずれる場合には、$g \cdot Z$ を上の形で定義できないのである。従って G の作用の点からみれば不自然なのだが、Siegel 上半平面との analogy を重視して、このような定式化を行った。

とおく。

$\varepsilon=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\in\{\pm1\}^n$ について，ε_i 達のうちで $+1$ に等しいものが p 個，-1 に等しいものが $n-p$ 個あるときに $\operatorname{sgn}\varepsilon=(p,n-p)$ と書くことにする。

$$\mathfrak{H}_\varepsilon^{(p,n-p)}=\{Z\in\mathfrak{H}^{(p,n-p)}\,;\,\operatorname{sgn}d_i(\gamma^{-1})=\varepsilon_1\cdots\varepsilon_i\ (1\leqq i\leqq n)\}$$

とおく。$\mathfrak{H}_\varepsilon^{(p,n-p)}\neq\phi$ となる必要十分条件は，$\operatorname{sgn}\varepsilon=(p,n-p)$ である。

いま，虚二次体 K を一つとって固定しておく。そして，$\mathfrak{H}_{\mathbb{Q}}^{(p,n-p)}=\mathfrak{H}^{(p,n-p)}\cap M(n;K)$ とおくことにより，$\mathfrak{H}^{(p,n-p)}$ の $\mathbb{Q}$-structure を定める。$Z\in\mathfrak{H}_{\mathbb{Q}}^{(p,n-p)}$ として，

$$\Gamma(Z,\varepsilon)=\{\sigma\in\Gamma\,;\,\sigma Z\in\mathfrak{H}_\varepsilon^{(p,n-p)}\}$$

とおく。$\Gamma(Z,\varepsilon)$ は，右から Γ_Z の，左から Γ_∞ の元をかけることで閉じている。さて，$\mathfrak{H}^{(p,n-p)}$ 上の Eisenstein 級数を

$$E(Z,\varepsilon;s)=\sum_{\sigma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma(Z,\varepsilon)/\Gamma_Z}\prod_{i=1}^{n}|d_i(\gamma_\sigma^{-1})|^{-s_i}$$

$$(Z\in\mathfrak{H}_{\mathbb{Q}}^{(p,n-p)},\ \varepsilon\in\{\pm1\}^n,\ \operatorname{sgn}\varepsilon=(p,n-p),\ s\in\mathbb{C}^n)$$

で定義する。ここで，$\mathbb{Q}$-有理点 $Z\in\mathfrak{H}_{\mathbb{Q}}^{(p,n-p)}$ に対してのみ，Eisenstein 級数が定義されていることに注意する。$p=n$ のときと同様に，

$$\Lambda(Z,\varepsilon;\lambda)=\prod_{1\le i<j\le n}\eta(2\lambda_i-2\lambda_j)\eta(2\lambda_i+2\lambda_j)\prod_{i=1}^{n}\eta(2\lambda_i)\times E(Z,\varepsilon;S)$$

とおく。変数$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$と変数$S=(S_1,\cdots,S_n)$との関係も前と同様である。このとき，次の定理が成立つのである。

定理．(1) $E(Z,\varepsilon;S)$ ($Z\in\mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}^{(p,n-p)}$, $\varepsilon\in\{\pm1\}^n$, $\mathrm{sgn}\,\varepsilon=(p,n-p)$) は，$\mathrm{Re}\,S_1,\cdots,\mathrm{Re}\,S_n>1$で絶対収束し，$S$の有理型関数として$\mathbb{C}^n$上に解析接続される。

(2) 任意の$w\in W$に対し，関数等式

$$\Lambda(Z,\varepsilon;w\lambda)=\sum_{\mathrm{sgn}\,\eta=(p,n-p)}C_w(\varepsilon,\eta;\lambda)\Lambda(Z,\eta;\lambda)$$

をみたす。ここで$C_w(\varepsilon,\eta;\lambda)$は，$Z\in\mathfrak{F}_{\mathbb{Q}}^{(p,n-p)}$に無関係な$\lambda$の有理型関数であり，三角関数を用いて表わされる。

(3) Weyl群Wの生成元として，

$$w_\alpha=(\alpha,\alpha+1)\in\mathfrak{S}_n\qquad(1\le\alpha\le n-1),$$
$$w_n=(1,\cdots,1,-1)\in\{\pm1\}^n$$

をとると，これらの元に対して$C_w(\varepsilon,\eta;\lambda)$の具体的表示は，次のとおりである：

(i)

$$C_{w_n}(\varepsilon,\eta;\lambda)=\begin{cases}1 & \varepsilon=\eta\\ 0 & \varepsilon\neq\eta.\end{cases}$$

(ii) $1 \leqq \alpha \leqq n-1$

$$C_{w_\alpha}(\varepsilon, \eta : \lambda) = \begin{cases} 0 & , \eta \neq \varepsilon, w_\alpha \varepsilon \\ 1 & , \eta = \varepsilon = w_\alpha \varepsilon \\ \sec \pi(\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) & , \eta = \varepsilon \neq w_\alpha \varepsilon \\ \tan \pi(\lambda_\alpha - \lambda_{\alpha+1}) & , \eta = w_\alpha \varepsilon \neq \varepsilon . \end{cases}$$

(4). $$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i - 1/2)^2 (\lambda_j + \lambda_i + 1/2)^2 \cdot \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i + 1/2)^2$$

$$\times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \Gamma(2\lambda_j - 2\lambda_i + 1) \Gamma(-2\lambda_j - 2\lambda_i + 1)$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} \Gamma(-2\lambda_i + 1) \quad \times E(Z, \varepsilon ; s)$$

は、整関数である。

Remark 1. いかなる虚二次体Kを持ってきても、$Z \in \mathfrak{S}_{\mathcal{O}}^{(p, n-p)}$ となるときにも、$E(Z, \varepsilon ; s)$ を形式的に考えることはできるが、$p \neq 0, n$ ならば、このDirichlet級数は一般には収束しない。

Remark 2. 定理の証明は、

F. Sato, Tohoku Math. J. 34 (1982), 437-483.

に述べられている方法（既約でない概均質ベクトル空間の相対不変式の部分Fourier変換）を適当に修正してなされる。

$E(z,\varepsilon:s)$は，概均質ベクトル空間に付随するZeta関数として理解することはできないのだが，上記論文の方法をこの場合に適用するように変形することができるのである。

Remark 3．上の定理は，Riemann対称空間の枠に納まらない半単純対称空間に対してEisenstein級数の類似物を構成する可能性を示唆している。$SL(n:\mathbb{R})/SO(p,n-p)$という空間に対しては，

F. Sato，Ann. of Math. 116 (1982)，177–212.

ですでに実行されている。さらに，$\mathbb{Q}$上splitする単連結半単純代数群について，$Sp_n(\mathbb{R})/U(p,n-p)$，$SL(n:\mathbb{R})/SO(p,n-p)$の両者を含む形の結果を得ることができる。