数理解析研究所講究録
第 497 巻 1983 年 148-157

$SU(n,1)$の保型形式の次元公式について
($\Gamma=\Gamma(N)$ $(N\geqq 3)$の場合)

立教大 理　加藤 末広

この報告で，$SU(n,1)$ の合同部分群$\Gamma(N)$ $(N\geqq 3)$に対する保型形式の次元公式を Selberg の跡公式を用いて計算する。より一般な体積有限な離散群については，[7]で述べたが，$\Gamma=\Gamma(N)$ $(N\geqq 3)$の場合アデール群の理論を用いることにより次元公式はさらに精密化される。例えば荒川[1]の方法を用いて$\Gamma(N)$の cusp の情報などを調べることができる。なお cusp の個数などについては Zeltinger[6]などの研究がある。

最後に筆者に数々の有益な comments を与えてくださった荒川恒男氏，及び佐藤文広氏に深く感謝いたします。

§1. 次元公式の解析的部分の計算

この節では[7]の結果を$\Gamma(N)$の場合にまとめて述べておく。kを虚2次体，Sを ${}^tS=-S$，かつ $-iS>0$ となるような$GL_{n-1}(k)$の元とし，次のような$\mathbb{Q}$上定義された代数群G

を考える：

$$G_{\mathbb{Q}} = \{ g \in SL_{n+1}(k) ;\ {}^t\bar{g} R g = R \}$$

$$G_{\mathbb{R}} = \{ g \in SL_{n+1}(\mathbb{C}) ;\ {}^t\bar{g} R g = R \}.$$

ここで $R = \begin{pmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(k)$ とおいた。$G_{\mathbb{R}}$ は $SU(n,1)$ に同型であり，type 2 の Siegel 領域 $\mathfrak{Z}$ に自然に作用する：

$$\mathfrak{Z} = \{ \mathfrak{z} = (w, z) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} ;\ i({}^t\bar{w} S w + \bar{z} - z) > 0 \}$$

$$g\mathfrak{z} = \left(\frac{a_1 w + b_1 z + c_1}{a_3 w + b_3 z + c_3},\ \frac{a_2 w + b_2 w + c_2}{a_3 w + b_3 z + c_3} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} g = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \in G_{\mathbb{R}} \quad \left(\begin{array}{l} R\text{と同じ block で} \\ \text{分けたもの} \end{array} \right), \\ \mathfrak{z} = (w, z) \in \mathfrak{Z}. \end{array} \right)$$

また任意の $g \in G_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{z} \in \mathfrak{Z}$ に対し $\mu(g, \mathfrak{z}) = a_3 w + b_3 z + c_3$ と定義する。

次に $\mathfrak{z}_0 = (0, i) \in \mathfrak{Z}$ としよう。そのとき $K = \{ g \in G_{\mathbb{R}} ;\ g\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{z}_0 \}$ は極大コンパクト群になる。

$$A = \left\{ a(v) = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{v} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{v}^{-1} \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) \ ;\ v > 0 \right\}$$

$$N = \left\{ [x, y] = \begin{pmatrix} 1_{n-1} & 0 & x \\ {}^t\bar{x}S & 1 & y + \frac{1}{2}{}^t\bar{x}Sx \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_{n+1}(\mathbb{C}) \ ;\ \begin{array}{l} x \in \mathbb{C}^{n-1} \\ y \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

とおく。そのとき $G_{\mathbb{R}}$ は岩沢分解 $G_{\mathbb{R}} = NAK$ を持つ。この分解で $g = [x, y]\, a(v) k$ としたとき，$G_{\mathbb{R}}$ 上の Haar 測度 dg を次のように正規化する；

$$dg = v^{-n-1}\,dx\,dy\,dv\,dk。$$

但し，dx は $\mathbb{C}^{n-1}(\cong\mathbb{R}^{2(n-1)})$ 上の Euclidean 測度，dy, dv は $\mathbb{R}$ 上の Euclidean 測度，dk は $\int_K dk = 1$ となるように正規化された K 上の Haar 測度とする。

N を自然数，$\mathcal{O}$ を虚2次体 k の整数環としよう。そのとき level N の合同部分群 $\Gamma(N)$ が，

$$\Gamma(N) = \{\, \gamma \in G_{\mathbb{Q}}\ ;\ \gamma - 1 \in M_{n+1}(N\mathcal{O}) \,\}$$

により定義される。$\Gamma(N)$ は $G_{\mathbb{R}}$ の離散部分群で，$\Gamma(N)$ は $\Gamma(1)$ の正規部分群になる。また $N \geqq 3$ のときには，$\Gamma(N)$ は torsion free かつ loxodromic 元を含まないことが知られている。ここに $\gamma \in \Gamma(N)$ が loxodromic 元であるとは γ が non-semisimple かつ non-unipotent 元であることをいう。

次に $l \in \mathbb{Z}$ とする。$\mathfrak{Z}$ 上の正則函数 $F(\mathfrak{z})$ が $\Gamma(N)$ に対して weight l の $\Gamma(N)$-保型形式であるとは，$F(\mathfrak{z})$ が

$$F(\gamma\mathfrak{z}) = \mu(\gamma, \mathfrak{z})^{l} F(\mathfrak{z}) \qquad (\gamma \in \Gamma(N),\ \mathfrak{z} \in \mathfrak{Z})$$

を満たすときにいう。さらに $F(\mathfrak{z})$ が条件：

$$\left(\operatorname{Im} z + \tfrac{i}{2}\,{}^t\bar{w} S w\right)^{\frac{l}{2}} F(\mathfrak{z}) \text{ は } \mathfrak{Z} \text{ 上有界} \qquad (\mathfrak{z} = (w, z) \in \mathfrak{Z})$$

を満たすとき，$F(\mathfrak{z})$ を weight l の $\Gamma(N)$-cusp 形式という。$S_l(\Gamma(N))$ を weight l の $\Gamma(N)$-cusp 形式全体とする。また $\omega_l(g)$ を

$$\omega_l(g) = \mu(g, \mathfrak{z}_0)^{-l} \left(\frac{z(g\mathfrak{z}_0) + i}{2i}\right)^{-l}, \quad \left(\begin{array}{l} z(g\mathfrak{z}_0) \text{ は } g\mathfrak{z}_0 \text{ の} \\ z\text{-part} \end{array}\right)$$

によって定義された$G_{\mathbb{R}}$上の球函数とする，そのとき，Selberg，Godement によるよく知られた方法に従い次の次元公式が示される。

定理1.1. $\ell > 2n$ $(\ell \in \mathbb{Z})$ と仮定する。そのとき，$\sum_{\gamma \in \Gamma(N)} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)$ は $\Gamma(N) \backslash G_{\mathbb{R}}$ 上有界でかつ次の式が成立する。

$$\dim S_\ell(\Gamma(N)) = \frac{(\ell-1)!}{2^{n+1}\pi^n(\ell-n-1)!}\int_{\Gamma(N)\backslash G_{\mathbb{R}}} \sum_{\gamma \in \Gamma(N)} \omega_\ell(g^{-1}\gamma g)\, dg。$$

この次元公式の積分と和の交換を〔7〕で述べたように dumping factor の導入により正当化し，次元を計算する。結果として次の命題が成立する。

命題1.2. $\ell > 2n$ $(\ell \in \mathbb{Z})$，$N \geqq 3$ とする。そのとき，次の次元公式が成立する。

$$\dim S_\ell(\Gamma(N)) = [\Gamma(1), \Gamma(N)] \frac{(\ell-1)!}{2^{n+1}\pi^n(\ell-n-1)!} vol(\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{R}})$$
$$+ [\Gamma(1), \Gamma(N)] \sum_{h \in \Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Q}}} vol((h^{-1}\Gamma(1)h \cap N)\backslash N)\, w_h^{-1} \nu_h^{-n} 2^{n-1} \zeta(1-n)。$$

ここで，$P_{\mathbb{Q}} = P \cap G_{\mathbb{Q}}$，$P$は$N$の$G_{\mathbb{R}}$における正規化群，$w_h = [h^{-1}\Gamma(1)h \cap P, h^{-1}\Gamma(1)h \cap N]$，$\nu_h = \min\{y > 0 ; [0, y] \in h^{-1}\Gamma(N)h \cap N\}$，$\zeta(s)$はRiemann zeta 函数である。特に，$n$が$n > 1$なる奇数ならば右辺の第2項$= 0$。

§2．次元公式の算術的部分の計算

前節で得られた次元公式をより詳しく調べよう，まず $vol(\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{R}})$ の値は Zeltinger〔6〕により計算されている。従って，

① $vol((h^{-1}\Gamma(1)h\cap N)\backslash N)\, v_h^{-n}$ $\qquad (h\in\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Q}})$

② $\displaystyle\sum_{h\in\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Q}}} w_h^{-1}$

の値を調べればよい。

以下 k を虚２次体，$\mathcal{O}$ を k の整数環，$L=\mathcal{O}\times\cdots\times\mathcal{O}$（$n+1$個）とする。$\Gamma(1)$ の定義から明らかに，

$$\Gamma(1)=\{\gamma\in G_{\mathbb{Q}}\ ;\ L\gamma=L\}$$

が成立する。次に G_A を G の adelized group としよう。$g\in G_A$ に対して，

$$Lg=\bigcap_{p:\text{素数}}(L_p g_p\cap k^{n+1}),\qquad (L_p=L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p)$$

とおき G_A における lattice L の stabilizer を $\mathcal{U}$ とする：

$$\mathcal{U}=\{g\in G_A\ ;\ Lg=L\}。$$

P_A を $P_{\mathbb{Q}}$ の adelized group とする。そのとき次の補題が成立する。

<u>補題 2.1.</u>　写像：

$$\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Q}}\ni\Gamma(1)gP_{\mathbb{Q}}\longrightarrow\mathcal{U}gP_{\mathbb{Q}}\in\mathcal{U}\backslash G_A/P_{\mathbb{Q}}$$

は bijective。

これは$\#(\mathcal{U}\backslash G_A/G_{\mathbb{Q}})=1$（志村〔5〕）から容易に導びかれる。また佐武〔4〕のP進体上定義された代数群における岩沢分解を用いることにより次の補題が得られる。

補題2.2.

$$\mathcal{U}\backslash G_A/P_{\mathbb{Q}}=(\mathcal{U}\cap P_A)\backslash P_A/P_{\mathbb{Q}},$$

即ち，左辺の完全代表系として右辺の完全代表系が選べる。

さて，Hを

$$H_{\mathbb{Q}}=\{g\in GL_{n-1}(k)\ ;\ {}^t\bar{g}Sg=S\}$$

となるようなQ上定義された代数群とする。$\mathcal{L}=\mathcal{O}\times\cdots\times\mathcal{O}$（$n-1$個）とし，$H_A$をHの*adelized group*，$\mathcal{U}_H$を$H_A$における$\mathcal{L}$の*stabilizer*とする：$\mathcal{U}_H=\{g\in H_A\ ;\ \mathcal{L}g=\mathcal{L}\}$。補題2.1，2.2により$\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{Q}}/P_{\mathbb{Q}}$の完全代表系の元$h$として$P_A$の中から取ることができるが，実はさらに

$$h=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&(\bar{\nu})^{-1}&0\\0&0&\nu\end{pmatrix},\qquad\left(\alpha\in H_A,\ \nu\in k_A,\ \det\alpha=\frac{\bar{\nu}}{\nu}\right)$$

としてよいことが容易に分かる。但し，k_Aは（kをQ上定義された代数群とみたときの）kの*adelized group*である。このことから，

$$\Gamma_h^*=h^{-1}\Gamma(1)h\cap P_{\mathbb{Q}}=\{g\in P_{\mathbb{Q}}\ ;\ Lhg=Lh\}$$

$$\Gamma_h=h^{-1}\Gamma(1)h\cap N_{\mathbb{Q}}=\{g\in N_{\mathbb{Q}}\ ;\ Lhg=Lh\},\ (N_{\mathbb{Q}}=N\cap G_{\mathbb{Q}})$$

とおいたとき，Γ_k^*，Γ_k の構造が求まるが，特に Γ_k を調べることにより次の命題を得る。

命題 2.3. $S=(s_{ij})\in GL_{n-1}(k)$ が条件 ${}^t\bar{S}=-S$，$-iS>0$ に加えてさらにその成分 s_{ij} が偶整数であるようなものとする：$s_{ij}\in 2\mathcal{O}$ $(1\leq i,j\leq n-1)$。そのとき，

$$vol(\Gamma_k\backslash N)\,\nu_k^{-n}=N^{-n}\,vol(\mathcal{O}\backslash\mathbb{C})^{n-1}。$$

次に $(P_A\cap\mathcal{U})\backslash P_A/P_Q$ の完全代表系を求めよう。C を k の ideal class group，J_k を k の idele group とする。そのとき，対応 $J_k\ni a=(a_\mathfrak{p})\longmapsto\prod_{\mathfrak{p}:\text{prime}}\mathfrak{p}^{\operatorname{ord}_\mathfrak{p}(a_\mathfrak{p})}$ は同型写像：$k^\times\backslash k_A^\times/\mathcal{U}_0\xrightarrow{\sim}C$ をひきおこす。但し，$\mathcal{U}_0=\{a=(a_p)\in k_A^\times\,;\,a_p\in\mathcal{O}_p^\times\}$。また k の ideal $\mathfrak{a}$ に対して $\mathfrak{a}^s=\bar{\mathfrak{a}}$ (complex conjugate) からひきおこされる写像：$C\ni c\longmapsto c^s\in C$ を考える。$A_k=\{c=c^s\,;\,c\in C\}$ の元は ambig 類とよばれ，その個数は 2^{t-1} 個であることが知られている。ここで t は k の判別式の相異なる素因子の数。以上の準備の下に次の命題が成立する。

命題 2.4. 行列 S として特に対角行列なものを考える。そのとき，$(P_A\cap\mathcal{U})\backslash P_A/P_Q$ の完全代表系として，

$$\left\{\begin{pmatrix}\alpha & 0 & 0\\ 0 & (\bar{\nu}_\alpha t)^{-1} & 0\\ 0 & 0 & \nu_\alpha t\end{pmatrix};\ \begin{array}{l}\alpha\in\mathcal{U}_H\backslash H_A/H_Q\\ \nu_\alpha \text{ は } \det\alpha=\frac{\bar{\nu}_\alpha}{\nu_\alpha} \text{ をみたす } k_A^\times \text{ のある一つの元}\\ t\in\{c\in k^\times\backslash k_A^\times/\mathcal{U}_0\,;\,c=c^s\}\end{array}\right\}$$

を取ることができる。

この命題の証明は，まず $\alpha\in \mathcal{U}_H\backslash H_A/H_{\mathbb{Q}}$ を固定したとき，ある $\nu_\alpha\in k_A^\times$ が存在して $\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&(\bar{\nu}_\alpha)^{-1}&0\\0&0&\nu_\alpha\end{pmatrix}\in P_A$ を満たすこと，次に各 ambig 類 t に対し $\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&(\overline{\nu_\alpha t})^{-1}&0\\0&0&\nu_\alpha t\end{pmatrix}\in P_A$ なること，そして最後に任意の $\begin{pmatrix}\alpha'&0&0\\0&(\bar{\nu})^{-1}&0\\0&0&\nu\end{pmatrix}\in P_A$ に対して，$\det\alpha'\cdot(\bar{\nu})^{-1}\nu=\det\alpha'\cdot(\bar{\nu}_\alpha)^{-1}\nu_\alpha=1$ から，ある ambig 類 t が存在して $\nu\in\nu_\alpha t$ なることを示すことにより得られる。

上の命題から，Zeltinger [6] によって知られている次の系が成り立つ。

<u>系 2.5.</u>　S が対角行列のとき，

$$\#\left((P_A\cap W)\backslash P_A/P_{\mathbb{Q}}\right)=2^{t-1}\#(\mathcal{U}_H\backslash H_A/H_{\mathbb{Q}})。$$

ここに t は k の判別式の相異なる素因子の数。

次の補題は，Γ_k^*, Γ_k の構造と Θ の単数群をみることにより得られる。

<u>補題 2.6.</u>　$k=\begin{pmatrix}\alpha&0&0\\0&(\bar{\nu})^{-1}&0\\0&0&\nu\end{pmatrix}\in P_A$，$W^*(\alpha)=\#(\alpha^{-1}\mathcal{U}_H\alpha\cap H_{\mathbb{Q}})$ とする。そのとき，n が偶数ならば，$W_k=W^*(\alpha)$。

さて，ω を $\mathbb{Q}$ 上定義された H 上の左不変 highest differential form とし，ω_p を $H_{\mathbb{Q}_p}$ 上に誘導された Haar 測度とする。そのとき，Ono [3] により H_A 上の測度 dH_A が次のように定義される：

$$dH_A = \rho_H^{-1}\omega_\infty \times \prod_{p:\text{素数}} \left(1-\frac{\chi(p)}{p}\right)^{-1}\omega_p .$$

ここで，$\rho_H = L(1,\chi_H)$，$L(s,\chi_H) = \prod_{p:\text{素数}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$ かつ $\chi(p)$ は p が k で分解するとき 1，p が k で分解も分岐もしないとき -1，p が k で分岐するとき 0 によって定める。

補題2.7.

$$\sum_{\alpha \in U_H \backslash H_A / H_Q} w^*(\alpha)^{-1} = \tau(H)\left(\int_{U_H} dH_A\right)^{-1}。$$

但し，$\tau(H) = \int_{H_A/H_Q} dH_A$（$H$ の玉河数）。

この補題と命題2.4，補題2.6 及び $\tau(H)=2$ であることをあわせて，

系2.8.

$$\sum_{k \in \Gamma(1)\backslash G_Q/P_Q} w_k^{-1} = 2^t\left(\int_{U_H} dH_A\right)^{-1}.$$

以上により次の次元公式が得られた。

定理2.9. $\ell > 2n$ $(n>1)$，$N \geqq 3$ かつ $S \in GL_{n-1}(k)$ を，条件 $-{}^t\bar{S}=S$，$-iS>0$ を満たすその各成分が偶整数であるような対角行列とする。そのとき，次の次元公式が成立する。

$$\dim S_\ell(\Gamma(N)) = \frac{[\Gamma(1):\Gamma(N)]\,(\ell-1)!}{2^{n+1}\pi^n(\ell-n-1)!}\, vol(\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{R}})$$
$$+ [\Gamma(1):\Gamma(N)]\, 2^{n+t-1} N^{-n} \zeta(1-n)\, vol(\mathcal{O}\backslash\mathbb{C})^{n-1}\left(\int_{U_H} dH_A\right)^{-1}。$$

ここに t は k の判別式の相異なる素因子の数。

$\int_{U_H} dH_A$ の値は Zeltinger [6] の結果を使っていくつかの S について具体的に求まる。実際それは $vol(\Gamma(1)\backslash G_{\mathbb{R}})$ と同様，L函数の特殊値で表わせる。

参考文献

[1] T. Arakawa, On automorphic forms of a quaternion unitary group of degree two, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 28(1982), 547-566.

[2] L. Cohn, The dimension of spaces of automorphic forms on a certain two dimensional complex domain, Memoirs Amer. Math. Soc., No.158, Providence, Rhode Island, 1975.

[3] T. Ono, On Tamagawa numbers, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 9, Amer. Math. Soc., 1966, pp. 122-132.

[4] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 18(1963), 5-69.

[5] G. Shimura, Arithmetic of unitary groups, Ann. of Math. (2) 79(1964), 369-409.

[6] H. Zeltinger, Spitzenanzahlen und Volumina Picardscher Modulvarietäten, Bonner Mathematische Schriften, Nr.136, 1981.

[7] 加藤末広，SU(n,1)の保型形式の次元公式について，群の表現と非可換調和解析(1982)，数理研講究録，to appear.