数理解析研究所講究録
第 497 巻 1983 年 166-183

Symmetric bilinear formsに付随するzeta函数の留数の計算について

高知大 理　室政和

ここでは，symmetric bilinear formsに付随するzeta函数の留数の計算について述べる。講演のさい主として問題となった可積分性について，ていねいに解説した。他の詳細については近刊のPreprint [3] を見ていただきたい。

1. 定義と問題

$$(1.1)\quad V_k^{(n)} = \{ x \in Sym(n, \mathbb{R})\ ;\ sign(x) = (k, n-k) \}$$
$$G^{(n)} = GL(n, \mathbb{R})^+$$

とおく。ここで，$V^{(n)} = Sym(n, \mathbb{R})$ は，$n \times n$ の $\mathbb{R}$-対称行列をあらわし，sign は x の positive eigenvalues の数と negative eigenvalues の数の組をあらわす。$x = (x_{ij}) \in Sym(n, \mathbb{R})$ と各成分を座標にとって，

(1.2) $$dx^{(n)} = \left| \bigwedge_{1 \leq i \leq j \leq n} dx_{ij} \right|$$

によって、$V^{(n)} = Sym(n, \mathbb{R})$ 上に Euclidean measure を入れる。

$G^{(n)}$ 上には

(1.3) $$dg^{(n)} = (\det g)^{-n} \left| \bigwedge_{ij} dg_{ij} \right|$$

によって不変測度を入れ，

(1.4) $$dg_1^{(n)} \times \frac{d(\det g)}{(\det g)} = dg^{(n)}$$

となるように，$SL(n, \mathbb{R})$ 上に不変測度を入れる。各 $V_k^{(n)}$ は $G^{(n)}$-orbit であり，$P(x) = \det x$ とおくと，

(1.5) $$|P(x)|^{-(n+1)/2} dx^{(n)}$$

は $V_k^{(n)}$ 上の $G^{(n)}$-不変測度をあらわしている。したがって，各点，$p \in V_k^{(n)}$ に対して，

(1.6) $$dg^{(n)} = |P(x)|^{-(n+1)/2} dx^{(n)} \otimes d\nu_p^{(n)}$$

となるように，p における $G^{(n)}$ の isotropy subgroup $G_p^{(n)}$ 上の左不変測度を定めることができる。明らかに，

(1.7) $$(\det g)^{2s} dg^{(n)} = |P(x)|^{s - \frac{n+1}{2}} dx^{(n)} \otimes d\nu_p^{(n)}$$

が成立する。$\Gamma^{(n)} = SL(n, \mathbb{Z})$ とおく。$x \in V_k^{(n)} \cap M(n, \mathbb{Q})$ に対して，

$$(1.8)\quad \mu^{(n)}(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_{G_x^{(n)}/\Gamma_x^{(n)}} dv_x^{(n)} & (n\neq 2,\ \text{or}\ \sqrt{-P(x)}\notin\mathbb{Q})\\ 0 & (n=2\ \text{and}\ \sqrt{-P(x)}\in\mathbb{Q})\end{cases}$$

で定義して，点，x の density という。$L^{(n)}$ を $Sym(n, \mathbb{Q})$ 内の lattice で diagonal elements は整数，off-diagonal elements は半整数となっているものであるとする。$\langle x, y\rangle = tr(x \cdot y)$ によって $V^{(n)}$ 上に内積を入れたとき，dual lattice $L^{(n)*}$ はすべての elements が整数となるものより成り立っている。これらの lattices $L^{(n)}$, $L^{(n)*}$ は $\Gamma^{(n)}$- invariant である。

Siegel は [2] において次のことを示している。すなわち $\mu^{(n)}(x)$ は finite で，

$$(1.9)\quad \sum_{\substack{x\in L_k^{(n)}/\sim\\ |P(x)|\leq t}} \mu^{(n)}(x) = a_1 t^{\frac{n+1}{2}} + O(t^{\frac{n}{2}})$$

$$\sum_{\substack{x\in L_k^{(n)*}/\sim\\ |P(x)|\leq t}} \mu^{(n)}(x) = a_1' t^{\frac{n+1}{2}} + O(t^{\frac{n}{2}})$$

(実は Siegel は これを Minkowski の定理の拡張として，a_1 の値を具体的に求めている。それは，$SL(n,\mathbb{R})/SL(n,\mathbb{Z})$ の volume で書け　，後に定義する zeta 函数の $s=\frac{n+1}{2}$ における留数になる。) ここで $L_k^{(n)}/\sim$ と $L_k^{(n)*}/\sim$ は $L^{(n)}\cap V_k^{(n)}$ 及び $L^{(n)*}\cap V_k^{(n)}$ の $\Gamma^{(n)}$ による同値類をあらわす。k の値によらず a_1，a_1' の値が

一定の整数値をとることが，後の留数の計算で重要である。

<u>定義1</u>　$n \geqq 1$ に対して，

$$(1.10)\quad \xi_k^{(n)}(s, L^{(n)}) = \sum_{x \in L_k^{(n)}/\sim} \mu^{(n)}(x)\, |P(x)|^{-s}$$

$$\xi_k^{(n)}(s, L^{(n)*}) = \sum_{x \in L_k^{(n)*}/\sim} \mu^{(n)}(x)\, |P(x)|^{-s}$$

このとき，$\xi_k^{(n)}(s, L^{(n)})$ 及び $\xi_k^{(n)}(s, L^{(n)*})$ は $Re(s) > \frac{n+1}{2}$ で収束し，$s = 1, \frac{3}{2}, \cdots, \frac{n+1}{2}$ で pole を持つ有理型函数として $s \in \mathbb{C}$ 全体に解析接続できる。（Siegel の結果 (1.2) を使えば $s = \frac{n+1}{2}$ で一位の pole を持って $Re(s) > \frac{n}{2}$ まで解析接続できることまでは証明される。）

さて，我々の目的は，<u>$n \geqq 3$ の場合</u>にこれらの zeta functions の residues を，すべて計算することである。$k = 0, n$ の場合には，Shintani [1] によってすでに計算されている。

我々は

$$(1.11)\quad Z(f, M, s) = \int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \chi(g)^s \sum_{x \in M} f(\rho(g) \cdot x)\, dg^{(n)}, \qquad \chi(g) = (\det g)^2$$

とおく。ここで M は $\Gamma^{(n)}$-不変な $V_{\mathbb{Q}}^{(n)}$ の中の集合であり，f は $V^{(n)}$ 上のシュワルツの急減少函数の空間 $\mathcal{S}(V^{(n)})$ の元である。

さらに，

$$(1.12)\quad L^{(n)'} = \begin{cases} \{x \in L^{(n)};\ \det x \neq 0\} & n \neq 2 \\ \{x \in L^{(n)};\ \det x \neq 0,\ \sqrt{-\det x} \notin \mathbb{Q}\} & n = 2 \end{cases}$$

$$L^{(n)*'} = \begin{cases} \{y \in L^{(n)*};\ \det y \neq 0\} & n \neq 2 \\ \{y \in L^{(n)*};\ \det y \neq 0,\ \sqrt{-\det y} \notin \mathbb{Q}\} & n = 2 \end{cases}$$

すると,

$$(1.13)\quad Z(f, L^{(n)'}, s) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k^{(n)}(s, L^{(n)}) \int_{V_k^{(n)}} |P(x)|^{s-\frac{n+1}{2}} f(x)\, dx$$

$$Z(f, L^{(n)*'}, s) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k^{(n)}(s, L^{(n)}) \int_{V_k^{(n)}} |P(x)|^{s-\frac{n+1}{2}} f(x)\, dx$$

が成り立つ。Poissonの和公式により,

$$(1.14)\quad \sum_{x \in L^{(n)}} f(\rho(g)\cdot x) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{x^* \in L^{(n)*}} \check{f}(\rho^*(g)\cdot x^*) \qquad (f \in \mathcal{S}(V^{(n)}))$$

が, $g \in SL(n, \mathbb{R})$ に対して成立する。特に $f \in C_0^\infty(V_k^{(n)})$ として, 左辺を $G^{(n)}/\Gamma^{(n)}$ 上で $\chi(g)^s$ をかけて積分すると

$$(1.15)\quad \int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \chi(g)^s \sum_{x \in L^{(n)}} f(\rho(g)\cdot x)\, dg^{(n)} = Z(f, L^{(n)'}, s)$$

$$= \xi_k^{(n)}(s, L^{(n)}) \int_{V_k^{(n)}} f(x)\, |P(x)|^{s-\frac{n+1}{2}} dx$$

が得られる。そしてこれは $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ で収束する。

これを解析接続するために(1.13)の積分を $\det g > 1$ 上での積分と $\det g < 1$ での積分の二つに分ける。すると $\det g > 1$ での積分は f が急減少函数であることによって, 任意の s に

ついて絶対収束することがわかり，すなわち s についての entire function になる。一方 $\det g<1$ 上での積分は Poisson の和公式によって，

$$(1.16)\quad \int_{\substack{G^{(n)}/\Gamma^{(n)} \\ (\det g)<1}} (\det g)^{2s} \sum_{x\in L^{(n)}} f(\rho(g)\cdot x)\, dg^{(n)}$$

$$= \int_{\substack{G^{(n)}/\Gamma^{(n)} \\ (\det g)<1}} (\det g)^{2s-(n+1)} \sum_{y\in L^{(n)*}} \check{f}(\rho^*(g)\cdot y)\, dg^{(n)},$$

そして，$\displaystyle\sum_{y\in L^{(n)*}} = \sum_{y\in L^{(n)*\prime}} + \sum_{y\in L^{(n)*}-L^{(n)*\prime}}$ と分けたとき，$\displaystyle\sum_{y\in L^{(n)*\prime}}$ の部分の積分は前と同じ理由によって s について entire となる。したがって我々は $\displaystyle\sum_{y\in L^{(n)*}-L^{(n)*\prime}}$ の部分について積分を計算してみて，s について，どのような函数になっているかみればよい。

$\mathcal{S}=\{x\in V^{(n)};\ \det x=0\}$ とおき，$\mathcal{S}_i^j=\{x\in\mathcal{S};\ \mathrm{sign}\, x=(j,n-i-j)\}$ とすると，

$$(1.17)\quad \int_{\substack{G^{(n)}/\Gamma^{(n)} \\ (\det g)<1}} (\det g)^{2s-(n+1)} \sum_{y\in L^{(n)*}-L^{(n)*\prime}} \check{f}(\rho^*(g)\cdot y)\, dg^{(n)}$$

$$= \int_0^1 c^{2ns-n}\, dc^n \int_{SL(n,\mathbb{R})/\Gamma^{(n)}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n-i}\sum_{y\in L^{(n)*}\cap\mathcal{S}_i^j} \check{f}(\rho^*(g)\cdot y)\, dg'$$

と書き直すことができる。以後 $SL(n,\mathbb{R})/\Gamma^{(n)}$ 上の積分を計算する。

2. $\displaystyle\int_{SL(n,\mathbb{R})/\Gamma^{(n)}} \sum_{y\in L^{(n)*}-L^{(n)*\prime}} \check{f}(\rho^*(g)\cdot y)\,dg'$ の計算。

単因子定理によって, $L^{(n)*}\cap \mathcal{V}_i^{\delta}$ を $\Gamma^{(n)}$ の同値関係で割ったものは,

$$(2.1)\quad \left\{ x_y = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle n-i & \scriptstyle i \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \in L^{(n)*}\ ;\ y\in L^{(n-i)*}\cap V_{\delta}^{(n-i)}/\sim \right\}$$

～は $\Gamma^{(n-i)}$-equivalence

が $L^{(n)*}\cap \mathcal{V}_i^{\delta}/\sim$ の同値類の完全系である。特に $L^{(n)*}\cap \mathcal{V}_{n-2}$ は次の2つの sets に分解する。

$$(2.2)\quad (L^{(n)*}\cap \mathcal{V}_{n-2})_a = \left\{ x\in L^{(n)*}\cap \mathcal{V}'_{n-2}\ ;\ x\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle 2 & \scriptstyle n-2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array},\ \sqrt{-\det y}\notin\mathbb{Q} \right\}$$

$$(L^{(n)*}\cap \mathcal{V}_{n-2})_b = \left\{ x\in L^{(n)*}\cap \mathcal{V}'_{n-2}\ ;\ x\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \scriptstyle 2 & \scriptstyle n-2 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}\ \sqrt{-\det y}\in\mathbb{Q} \right\}$$

これらは $\Gamma^{(n)}$-invariant sets である。これらの同値類の完全系も (2.1) と同じ具合にしてとる。このとき次の定理が得られる。

Theorem 1

1) $n \geqq 3$ とする。$f \in C_0^\infty(V^{(n)} - S)$ とするとき、$i = 1$ のとき及び $i = n-2$ のときを除いて、

$$\int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \sum_{y \in L^{(n)*} \cap S_i} |\check{f}(\rho^*(g) \cdot y)| \, dg^1 < +\infty$$

2) $n \geqq 4$ のとき、

$$\int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{n-2})_a} |\check{f}(\rho^*(g) \cdot y)| \, dg^1 < +\infty$$

3) $n \geqq 4$ のとき、

$$\int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \Big| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_1)} \check{f}(\rho^*(g) \cdot y) \Big| \, dg^1 < +\infty$$

4) $n \geqq 4$ のとき、

$$\int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \Big| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S'_{n-2})_b} \check{f}(\rho^*(g) \cdot y) \Big| \, dg^1 < +\infty$$

5) $n = 3$ のとき、

$$\int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \Big| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_{n-2})_b} \check{f}(\rho^*(g) \cdot y) \Big| \, dg^1 < +\infty$$

$$\int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \Big| \sum_{y \in (L^{(n)*} \cap S_1)_a} \check{f}(\rho^*(g) \cdot y) \Big| \, dg^1 < +\infty.$$

ここで $G^{(n)1} = SL(n, \mathbb{R})$，$dg^1$ は $dg_1^{(n)}$ (1.4) で定義された測度。

以下，これについて，その証明をざっと見ておく。まず

1)であるが，

$$(2.3)\ \int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \sum_{x\in L^{(n)*}\cap S_i^j} \left|\check{f}(\rho^*(g)\cdot x)\right| dg'$$

$$= \int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \sum_{x\in L^{(n)*}\cap S_i^j/\sim}\ \sum_{\gamma\in\Gamma^{(n)}/\Gamma_x^{(n)}} \left|\check{f}(\rho(g\cdot\gamma)\cdot x)\right| dg' \quad \left(\begin{array}{c}\rho^*\text{のかわりに}\ \rho\ \text{でやっても}\\ \text{本質的に変わらない。}\end{array}\right)$$

$$= \int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \sum_{y\in L^{(n-i)*}\cap V_j^{(n-i)}/\sim}\ \sum_{\gamma\in\Gamma^{(n)}/\Gamma_x^{(n)}} \left|\check{f}(\rho(g\cdot\gamma)\cdot x_y)\right| dg'$$

ここで，$x_y = \left[\begin{array}{c|c} y & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ $(y\in L^{(n-i)*})$ である。

$$= \int_{G^{(n)1}/\Gamma_{x_y}^{(n)1}} \left|\check{f}(\rho(g)\cdot x_y)\right| dg \int_{G_{x_y}^{(n)1}/\Gamma_{x_y}^{(n)}} d\nu_{x_y}$$

$$= \int \left|\check{f}(x)\right| d\nu_i^j \cdot \int_{G_{x_y}^{(n)1}/\Gamma_{x_y}^{(n)}} d\nu_{x_y}$$

ここで，$d\nu_i^j$ は S_i^j 上の $G^{(n)1}$-不変測度をあらわしている。このような $d\nu_i^j$ は constant 倍を除いて一意に存在している。$d\nu_{x_y}$ は $G_{x_y}^{(n)1}$ 上の左不変測度で $d\nu_i^j$ のとり方に応じて normalize される。

S_i^j の point $x_0 = X_{I_{n-i}^j} = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-i}^{(j)} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ における接平面は，

$T_{x_{I_{n-i}}^{(i)}} S_i^{\delta} = \left\{ \begin{array}{cc} n-i & 1 \\ \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline {}^tB & 0 \end{array}\right] \end{array} ; A = {}^tA \right\}$ であるから、S_i^{δ} 上の $G^{(n)1}$-不変測度 $dV_i^{\delta}\Big|_{x=x_0} = \left| \left(\bigwedge_{k\leq l} dA_{kl}\right) \wedge \left(\bigwedge_{k,l} b_{kl}\right) \right|\Big|_{x=x_0}$ によって、normalize する。このとき、

$$(2.4)\quad \int_{G_{x_y}^{(n)1}/\Gamma_{x_y}^{(n)}} dV_{x_y} = (2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}} \cdot \mu^{(n-i)}(y) \cdot Vol(SL(i,\mathbb{R})/SL(i,\mathbb{Z})) \cdot |\det y|^{-\frac{n}{2}}$$

となる。したがって、

$$(2.5)\quad \int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \sum_{x \in L^{(n)*} \cap S_i^{\delta}} |\check{f}(\rho^*(g)\cdot x)|\, dg'$$

$$= \int |\check{f}(x)|\, dV_i^{\delta} \cdot \sum_{y \in L^{(n-i)*} \cap V_i^{(n-i)}/\sim} (2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}} \cdot \mu^{(n-i)}(y) \cdot |\det y|^{-\frac{n}{2}}$$

$$\times Vol(SL(i,\mathbb{R})/SL(i,\mathbb{Z}))$$

$$= \xi_j^{(n-i)}\left(\tfrac{n}{2}, L^{(n-i)*}\right) \cdot Vol(SL(i,\mathbb{R})/SL(i,\mathbb{Z}))\,(2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}} \int_{S_i^{\delta}} |\check{f}(x)|\, dV_i^{\delta}$$

$\xi_j^{(n-i)}(s, L^{(n-i)*})$ は $Re(s) > \frac{n-i+1}{2}$ で収束するので、これによって収束性は示された。

以上の計算をたどることによって、

$$(2.6)\quad \int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \sum_{x \in L^{(n)*} \cap S_i^{\delta}} \check{f}(\rho^*(g)\cdot x)\, dg'$$

$$= \underbrace{\xi_j^{(n-i)}\left(\frac{n}{2}, L^{(n-i)*}\right) \cdot Vol\left(SL(i,\mathbb{R})/SL(i,\mathbb{Z})\right)(2\pi)^{-\frac{i(i+1)}{4}}}_{\circledast_j} \int \check{f}(x) T_i^{\delta}(x)\, dx$$

と書くことができる。ここで，$T_i^{\delta}(x)$ は $\overline{\mathcal{S}_i^{\delta}}$ 上に support を持つ超函数で $\mathcal{S}_i^{\delta}$ 上での不変測度 $d\nu_i^{\delta}$ をあらわすものである。$\int f(x) d\nu_i^{\delta}(x) = \int T_i^{\delta}(x) f(x)\, dx$ $(f \in \mathcal{S}(V^{(n)}))$ が成立するように定めれば $T_i^{\delta}(x)$ はユニークにきまる。$\int \check{f}(x) T_i^{\delta}(x)\, dx = \int f(y) \check{T}_i^{\delta}(y)\, dy$ であるから，$T_i^{\delta}(x)$ の Fourier 変換 $\check{T}_i^{\delta}(y)$ を計算すればよい。特にテスト函数は $f \in C_0^{\infty}(V^{(n)} - \mathcal{S})$ であるから $V^{(n)} - \mathcal{S}$ 上の値を計算すればよい。

$$(2.7) \qquad \check{T}_i^{\delta}(x)\Big|_{V^{(n)} - \mathcal{S}} = \sum_{k=0}^{n} C_i^{\delta k} |P(x)|_k^{-s_i - \frac{n+1}{2}}$$

と書ける。ここで，$s_i = -\frac{i+1}{2}$，$|P(x)|_k^{s}$ は $V_k^{(n)}$ 上で $|P(x)|$，他で 0 となる函数である。$C_i^{\delta k}$ は定数でありこれは超局所解析によって explicite に計算することができる。結局

$$(2.8) \qquad \int_0^1 c^{2ns-n} dc^n \int_{G^{(n)}/\Gamma^{(n)}} \sum_{y \in L^{(n)*} \cap \mathcal{S}_i^{\delta}} \check{f}(c^2 \rho(g) \cdot y)\, dg'$$

$$= \circledast_j \times \int_0^1 c^{2ns-n} dc^n \int \check{f}(c^2 \cdot x) T_i^{\delta}(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 c^{2ns-n+2ns_i} dc^n \int f(x) \sum_{k=0}^{n} C_i^{\delta k} |P(x)|_k^{-s_i - \frac{n+1}{2}} dx \times \circledast_j$$

$$= \frac{1}{2(s+s_i)} \times \circledast_j \times \sum_{k=0}^{n} C_i^{\delta k} \int f(x) |P(x)|_k^{-s_i - \frac{n+1}{2}} dx$$

として $Z(f, L, s)$ の $s=s_i$ における pole が求まり，特に，$f(x)\in C_0^\infty(V_k^{(n)})$ とおけば，$\xi_k^{(n)}(s, L^{(n)})$ の pole が求まることになる。2) についても全く同様である。3) 及び 4) については，以下に説明するようにして積分を evaluate することができるが，これを正当化するためには別に証明を必要とする。(注) 3) の場合を説明しよう。

<u>Lemma 2</u>

1) $f_i(x)$ $(i=1,\cdots,m)$ を $(0,\infty)$ 上で定義された複素数値連続函数で，次の条件をみたすものとする。

(2.9) 1) C^∞ on $(0,\infty)$.

2) $f(x)$, $f'(x)$ は ∞ で急減少函数。

3) $\sup_{x<y<1}|f_i'(y)| < C x^{-2+\varepsilon_1}$ が $x=0$ の近傍で成立する。ただし，$C>0$，$0<\varepsilon_1<1$ の定数。

このとき，$f_i(x)$ $(i=1,\cdots,m)$ は Riemann の意味で積分可能。

2). さらに，

(2.9) 4) $\int_0^\infty \sum_{i=1}^m f_i(x)\,dx = 0$

を仮定する。$(a_k^i)_{k=1,2,\cdots}$ $(i=1,\cdots m)$ を複素数列で，

(2,10) $\sum_{k=1}^n a_k^i = c_i n + O(n^{1-\varepsilon_2})$

$(C_1>0,\ 0<\varepsilon_2<1)$ をみたすものとする。このとき,

$$(2.11)\qquad g(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^i\, f(k\cdot x)$$

は $[0,\infty)$ 上で可積分函数である。

実際 1) はほとんど明らかだし, 2) については, $\tilde{g}(x) = x\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} f(k\cdot x)$ は $x\to\infty$ のとき $\int_0^\infty \sum_{i=1}^{m} f_i(x)\,dx=0$ に収束し (Riemann 積分の定義), したがって, 可積分であることは (2.9) の条件より示される。また (2.10) の条件を使って, g と $\tilde{g}$ の差を評価すれば, $g(x)$ の可積分性はみちびかれる。

さてこの lemma に 3) の積分を帰着させよう。

$$(2.12)\qquad \int_{G^{(n)1}/\Gamma^{(n)}} \Big|\sum_{y\in L^{(n)*}\cap S_1} \check{f}(p^*(g)\cdot y)\Big|\,dg'$$

$$\leqq \int_{G^{(n)1}/\Gamma'} \Big|\sum_{x\in L^{(n)*}\cap S_1/\sim}\ \sum_{\gamma\in\Gamma'/\Gamma_x^{(n)}} \check{f}(p^*(g\cdot\gamma)\cdot x)\Big|\,dg',$$

と評価される。ここで, $\Gamma'=\left\{\begin{array}{cc} \scriptstyle n-1 & \scriptstyle 1 \\ \left[\begin{array}{c|c} *_1 & *_2 \\ \hline 0 & *_3\end{array}\right] \end{array} ;\ \begin{array}{l} *_1\in M(n-1,\mathbb{R}) \\ *_2\in M(n-1,1,\mathbb{R}) \\ *_3\in M(1,\mathbb{R})\end{array}\right\}\cap SL(n,\mathbb{Z})$

我々は,

$$(2.13)\qquad \sum_{x\in L^{(n)*}\cap S_1/\sim}\ \sum_{\gamma\in\Gamma'/\Gamma_x} \check{f}(p^*(g\cdot\gamma)\cdot x)$$

が，$G^{(n)1}/\Gamma'$ 上の可積分函数であることを示せばよい。

$$\mathcal{O} = SO(n,\mathbb{R})/(O(n-1,\mathbb{R})\times O(1,\mathbb{R}))\cap SO(n,\mathbb{R})$$

$$P = \left\{ \begin{array}{cc} \scriptstyle n-1 & \scriptstyle 1 \\ \left(\begin{array}{c} A \\ 0 \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} C \\ B \end{array}\right) \end{array} ;\ \det A \cdot \det B = 1 \right\}$$

$$P' = \left\{ \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in P ;\ \det A = \det B = 1 \right\},$$

とおく。

すると，かんたんな計算によって，

$$(2.14)\quad \int_{G^{(n)1}/\Gamma'} \sum_{x\in L^{(n)*}\cap S_1/\sim} \sum_{\gamma\in\Gamma'/\Gamma_x} \check{f}(p(g\cdot\gamma)\cdot x)\,dg'$$

$$= \int_0^\infty r^{n(n-1)-1}dr \int_{g_1\in\mathcal{O}} dg_1 \int_{g_2\in SL(n-1,\mathbb{R})/SL(n-1,\mathbb{Z})} \sum_{x\in L^{(n)*}\cap S_1/\sim} \sum_{\gamma\in\Gamma'/\Gamma_x} \check{f}(r^2 p(g_1\cdot g_2)x)\,dg_1\,dg_2$$

ここで dg_1，dg_2 は $\mathcal{O}$ 上，及び $SL(n-1,\mathbb{R})$ 上の不変測度で $g_2 = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$ $(*\in SL(n-1,\mathbb{R}))$ として $SL(n,\mathbb{R})$ に埋め込まれているものとし，$L^{(n)*}\cap S_1/\sim$ の代表元は，$x = \begin{array}{c} \scriptstyle n-1 \\ \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$ として，とられているものとする。

$$(2.15)\quad (2.14) = \int_0^\infty r^{n(n-1)-1}dr \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{x\in L^{(n)*}\cap S_1^j/\sim} \tilde{\check{f}}(r^{2(n-1)}\cdot|\det x|)\cdot \mu^{(n-1)}(x)$$

ここで，

$$\tilde{\check{f}}(y) = \int_{\mathcal{O}\ni g_1} dg_1 \int_{g_2\in SL(n-1,\mathbb{R})/SL(n-1,\mathbb{R})_x} \check{f}(p(g_1 g_2)x)\,dg_1\,dg$$

$(x \in S_1^j,\ y = |\det x|)$ で定義する。これは絶対収束し、$\check{\tilde{f}}_j(y)$ は、y の値のみできまり x にはよらない。そして、

$$(2.16)\quad (2.15) = \int_0^\infty (r^{2(n-1)} \cdot |\det x|)^{\frac{n}{2}} \frac{dr}{r}$$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{x \in L^{(n)*} \cap S_1^j/\Lambda} \check{\tilde{f}}(r^{2(n-1)} \cdot |\det x|)\ \mu^{(n-1)}(x)\ |\det x|^{-\frac{n}{2}}$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \int_0^\infty (r^{2(n-1)} |\det x|)^{\frac{n}{2}-1}\, d r^{2(n-1)} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{x \in L^{(n)*} \cap S_1^j/\Lambda} \check{\tilde{f}}(r^{2(n-1)} \cdot |\det x|)$$

$$\times\ \mu^{(n-1)}(x) \cdot |\det x|^{-\frac{n-2}{2}}$$

さてこのとき、

$$\frac{1}{2(n-1)} \int_0^\infty (r^{2(n-1)})^{\frac{n}{2}-1} \check{\tilde{f}}_j (r^{2(n-1)})\, d r^{2(n-1)}$$

$$= \frac{1}{2(n-1)} \int_0^\infty r'^{\frac{n}{2}-1} \check{\tilde{f}}_j(r') dr' = \int_{S_1^j} \check{f}(x)\, d\nu_1^j(x)$$

と書けることに注意せよ。さらに $f \in C_0^\infty(V^{(n)} - S')$ であるならば、

$$(2.17)\quad \sum_{j=0}^{n-1} \int_{S_1^j} \check{f}(x)\, d\nu_1^j(x) = 0.$$

であることにも注意する。($d\nu_1^j$ は P. 9 で定義したものである。) このことは、$\bar{S}_1^j$ 上に support を持ち S_1^j 上の

不変測度 dV_1^j をあらわす $V^{(n)}$ 上の超函数 $T_1^j(x)\,dx$ を使って,

$$(2,18)\quad \int \sum_{j=0}^{n-1} \check{f}(x)\,dV_1^j(x) = \int_V \sum_{j=0}^{n-1} f(y)\,\check{T}_1^j(y)\,dy$$

と書けることを示し, さらに $\sum_{j=0}^{n-1} \check{T}_1^j(y)$ の support が, 特異集合 S に含まれていることを示すことによって得られる。

したがって,

$$(2,19)\quad \frac{1}{2(n-1)}\, r^{\frac{n}{2}-1}\, \tilde{\check{f}}_j(r) = h_j(r) \qquad (j=0,\cdots,n-1)$$

として, $h_j(r)$ $(j=0,\cdots,n-1)$ たちが, Lemma 2 の条件をみたすことをみればよい。すなわち, $h_j(r)$ は $r\to\infty$ で急減少函数であり, $r>0$ で C^∞ で, $r=0$ の近傍で (2,9) 3) の条件をみたし (2,18) から (2,9) 4) の条件もわかる。さらに Siegel の結果より,

$$(2,20)\quad \sum_{\substack{x\in L^{(n)*}\cap S_1^j/\sim \\ |\det x|\leq t}} \mu^{(n-1)}(x) = C^{(n-1)}\cdot t^{\frac{n}{2}} + O(t^{\frac{n}{2}-\varepsilon})$$

$(\varepsilon=\frac{1}{2})$ と書けることが示される。したがって (2,10) の条件もたしかめられる。

すなわち Lemma 2 が適用できて, (2,16) は $r^{2(n-1)}$ の函数として可積分になり, したがって (2,13) は可積分であ

る。つまり 3)は、可積分である。

4)についても同様の補題を使うことによって、可積分性が示される。5)は 3) 4)と同じ方法で示される。

3)の計算を explicite に実行するためには、(2, 13) の被積分函数に、ある dumping factor をかけてやると、(2, 13)は、

$$(2.21)\quad \lim_{s\to 0}\sum_{j=0}^{n-1}\xi_j^{(n-1)}\left(\frac{n}{2}+s,\ L^{(n-1)*}\right)(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\int \check{f}(x)\,T_1^{j}(x)\,|\det x_{11}|^{s}\,dx$$

という積分に帰着されることが示される。ここで x_{11} は x から n 行目と n 列目を抜いた $(n-1)\times(n-1)$ 行列である。(2, 21) の lim の中は $Re(s)>0$ のとき有限の値をとり、$s=0$ まで holomorphic に接続できる。かくして $T_1^{j}(x)|\det x_{11}|^{s}$ の Fourier 変換を explicite に計算することによって、これを計算できる。あとは、1)の場合と同様にして、これが $s=1$ における pole の主要部になっていることがわかる。

参考文献

[1] Shintani T; J. of Fac. Sci. Univ. Tokyo 22. No.1 (1975) 25−65.

[2] Siegel C.L; Gesammelte Abhandlungen II, No. 47

[3] Muro M; Microlocal analysis and calculations of functional equations and residues of zeta functions associated with the vector space of quadratic forms (Preprint, Second draft.)

(注) 以下の議論において, は, 積分 (2.16)の可積分性は, 示されるが, これから直ちに (2.13)の可積分性は, 結論できないことが, 原稿を提出したあとで気がついた。3), 4)の可積分性は, これとは全く別の方法で示すことができて, それは, [3] の原稿で与えられている。したがって P.16の最終行と P.17の最初の行は除いて読み, P.14の最初の行を, "$G^{(n)}/\Gamma'$ 上の可積分性が示されたとすれば以下のようにその積分を evaluate することができる。" と読んでいただきたい。