

ある種の写像の iteration について

東大理 木村俊房 (Tosihusa Kimura)

§1 目的 多変数関数論では 1 変数関数論と著しく異なる現象が起る。このことが知られてゐるが、その一つとして、Fatou [1, 2] と Bieberbach [1] による次のような例がある。

" 写像 $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ 次の性質をもつものが存在する:

- i) $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は双整型,
- ii) $\mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$ は内点をもつ,
- iii) $J\varphi \equiv 1$ ($J\varphi$ は φ のヤコビ行列式)"

このような φ を構成する φ に Bieberbach は簡単な整型双有理写像 $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ を利用した。このような f に対し、適当な開集合 $U \subset \mathbb{C}^2$ をとると、

$$\varphi(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U)$$

となる。ここで f^n ($n \in \mathbb{Z}$) は f の n 回の iteration を表わすことをする。

他の例については Bochner-Martin [1], 小平 [1], 喜

多 [1] を参照されたい。

上記喜多の報告のなかで、 $\varphi(\mathbb{C}^2)$ のいくつかの性質について
 この若林の結果が紹介されてくる。我々の目的は $\varphi(\mathbb{C}^2)$ が
 \mathbb{C}^2 のなかにどのように入っているかをより具体的に知りた
 いということである。しかし、そう簡単に分ることではな
 いので、ここで述べることはかなり中途半端である。

$f \in \mathbb{C}^2$ から \mathbb{C}^2 の上への双整型写像とすれば、 $\{f^n; n \in \mathbb{Z}\}$
 は \mathbb{C}^2 の離散的力学系とみなすことができ、力学系の用語も
 用いる。

§2. Fatou-Bieberbach の写像の構成 前節で述べた写
 像 φ の構成法を復習しておく。

$f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ で \mathbb{C}^2 の原点 $0 = (0, 0)$ の近傍から \mathbb{C}^2
 への整型写像で、原点を原点に移すものを表わす。Taylor
 展開を用いて、 f を

$$f: \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y + \text{2次以上の項} \\ y_1 = \gamma x + \delta y + \text{2次以上の項} \end{cases}$$

と表わし、 f の線形化を

$$g: \begin{cases} x_1 = \alpha x + \beta y \\ y_1 = \gamma x + \delta y \end{cases}$$

とする。そのとき、 $\varphi: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ には次の方程式

$$(2.1) \quad f \circ \varphi = \varphi \circ g \quad (\circ \text{ は写像の合成を表わす})$$

は Schröder の方程式とよばれる。行列 $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ の固有値

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{f} & \\ \varphi \uparrow & & \uparrow \varphi \\ & \xrightarrow{g} & \end{array}$$

λ, μ を f の 0 における固有値とよび、 λ, μ とする。このとき、次の定理がなりたつ。(Schröder の方程式に関する最も一般的な結果については福原 [1] をみられた)。

定理 “次の条件が成り立つとする。

$$1) \quad |\lambda|, |\mu| > 1, \text{ または, } |\lambda|, |\mu| < 1,$$

$$2) \quad \lambda \neq \mu^k, \mu \neq \lambda^k \quad (k = 2, 3, \dots).$$

このとき、(2.1) を満たす $\varphi: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ が存在する。 φ は

$$(2.2) \quad \varphi: \begin{cases} x_1 = x + 2\text{次以上} \\ y_1 = y + 2\text{次以上} \end{cases}$$

のもとで一意的に定まる。”

系 1. “条件

$$1) \quad |\lambda|, |\mu| > 1,$$

と 2), さらに

$$3) \quad f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \text{ は } \mathbb{C}^2 \text{ で整型,}$$

とす。このとき、(2.1) を満たす $\varphi: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ は \mathbb{C}^2 で整型と存在”

系 2. “条件 1') と 2) と条件

4) $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ は \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2 への双射型写像,
 のもとで, φ は \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2 への双射型写像となる"

系 3. "条件 1), 2), 4) と

5) $J\varphi \equiv \text{定数}$

のもとで, (2.2) を満たす φ に対して $J\varphi \equiv 1$ が成り立つ"

条件 4), 5) を満たす f に対して, $p = (a, b)$, $p' = (a', b')$ は f
 の不動点, すなわち, $f(p) = p$, $f(p') = p'$ とする f の p における
 固有値 λ, μ ; f の p' における固有値 λ', μ' とする. $\lambda,$
 μ に対して条件 1), 2) が成り立つならば, $\varphi: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ として

i), ii), iii) と $\varphi(p) = p$ を満たすものが存在する. そのとき,

$$\varphi(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(U) = \{q \in \mathbb{C}^2; \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(q) = p\}$$

が成り立つ. ここで U は p の適当な近傍である. もし, p' が
 f の源泉 (source), すなわち, $|\lambda'|, |\mu'| > 1$ であれば, p' の適
 当な近傍 U' に対して

$$U' \subset \mathbb{C}^2 \setminus \varphi(\mathbb{C}^2)$$

となる. したがって, 2), 3) のような φ が存在するものである.

以上述べたことから, φ を求めることは, 上の性質をもつ f
 を求めることに帰着された. 2) のような f として Bieberbach は

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = 2x - 3y^2 + 2y^3 \end{cases},$$

真多は

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -4x + 15y^2 - 10y^3 \end{cases}$$

と使う。Bieberbach と喜多によつて f は 3 個の不動点 $(0,0)$, $(1,1)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を持つ。最初の 2 つは源点, 最後の 1 つは鞍点 (saddle point), すなわち, 固有値の絶対値の 1 つは >1 , 他の 1 つは <1 , $\neq 0$ である。対称性を利用するため, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ を原点に移すことにする。このとき, Bieberbach, 喜多の f は次のようになる,

$$\begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = 2x - \frac{3}{2}y + 2y^3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = -4x + \frac{15}{2}y - 10y^3 \end{cases}$$

となる。

この 2 つを合した字像

$$f_c : \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = cx - \frac{3}{2}(c-1)y + 2(c-1)y^3 \end{cases}$$

を考へる。この 2^n c は複素数 $\lambda = \mu - \nu$ とする。 f_c の原点は \mathbb{C}^2 の対称であることは明らかであろう。

§3. 不動点, 周期点 $c \neq 0$ とする, f_c は明らかに \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2 への整型双有理字像で, $Jf_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & -\frac{3}{2}(c-1) + 6(c-1)y^2 \end{vmatrix} = -c$ を満たす。 $c \neq 0, 1$ とする, f_c の不動点は

$$(0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

の3点, 不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ における固有値は $p^2 - c = 0$ の根 $\pm\sqrt{c}$ であり, 不動点 $(0, 0)$ における固有値は $2p^2 + 3(c-1)p - 2c = 0$ の根 $(-3(c-1) \pm \sqrt{9c^2 - 2c + 9})/4$ である.

周期点の周期点と k -周期点という区別をする.

2周期点は次の3組である:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}\right), \\ & \left(\frac{\sqrt{7+i}}{4}, \frac{\sqrt{7-i}}{4}\right), \left(\frac{\sqrt{7-i}}{4}, \frac{\sqrt{7+i}}{4}\right), \\ & \left(-\frac{\sqrt{7+i}}{4}, -\frac{\sqrt{7-i}}{4}\right), \left(-\frac{\sqrt{7-i}}{4}, -\frac{\sqrt{7+i}}{4}\right) \end{aligned}$$

これらの点は f^2 の不動点であり, f^2 の不動点 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}), (-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ における固有値は $18(c-1)^2 + c \pm \sqrt{(18(c-1)^2 + c)^2 - c^2}$ であり, 他の不動点における固有値は $c \pm \sqrt{(9(c-1)^2 + 4c \pm \sqrt{(9c(c-1)^2 + 4c)^2 - 16c^2})/4}$ である.

3-周期点, 8組あるが, まだ具体的に求めていない. 一般に k -周期点の個数は k とともに増加する.

$|c| > 1, c \in \mathbb{C}$ ならば, f の不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ は源泉であり, 明らかに §2 の条件 2) に満たす. したがって, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ に対応する写像 $\varphi_+, \varphi_-: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ が得られる.

$$G_+ = \varphi_+(\mathbb{C}^2), \quad G_- = \varphi_-(\mathbb{C}^2)$$

とすれば, G_+, G_- は互に素な \mathbb{C}^2 と双整型 \mathbb{C}^2 の領域である.

$|c| > 1, c \in \mathbb{C}$ ならば, $(0, 0)$ は f の鞍点であることは分る. しかし, 2-周期点か f^2 の源泉か鞍点かとを調べるのはやや

面倒である。

$c > 1$ または $c < -1$ の場合には不動点, 2-周期点^点と調べてみる。

不動点	固有値	$c > 1$	$c < -1$
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$\lambda = \sqrt{c}, \mu = -\sqrt{c}$	$\lambda > 1, \mu < -1$	λ, μ : 純虚数
$(0, 0)$	$\lambda = \frac{1}{4}(-3(c-1) + \sqrt{9(c-1)^2 + 16c})$ $\mu = \frac{1}{4}(-3(c-1) - \sqrt{9(c-1)^2 + 16c})$	$0 < \lambda < 1$ $\mu < -1$	$1 < \lambda$ $0 < \mu < 1$
2-周期点	f^2 の固有値	$c > 1$ または $c < -1$	
$(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$	$\lambda = 18(c-1)^2 + c + \sqrt{(18(c-1)^2 + c)^2 - c^2}$ $\mu = 18(c-1)^2 + c - \sqrt{(18(c-1)^2 + c)^2 - c^2}$	$0 < \mu < 1 < \lambda$	
その他	$\lambda = \frac{1}{4}(9(c-1)^2 + 4c + \sqrt{(9(c-1)^2 + 4c)^2 - 16c^2})$ $\mu = \frac{1}{4}(9(c-1)^2 + 4c - \sqrt{(9(c-1)^2 + 4c)^2 - 16c^2})$	$0 < \mu < 1 < \lambda$	

§4 安定曲線, 不安定曲線. $f: \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0 \in L$, f の原点での固有値の 1 つを ρ とする. そのとき, 次の定理が成り立つ (Poincaré [1], Picard [1]).

定理 " $|\rho| \neq 0, 1$ かつ ρ^k ($k=2, 3, \dots$) はもう 1 つの固有値にならないとする. そのとき, $\psi: \mathbb{C}, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0$ "

$$(4.1) \quad \psi(\rho t) = f \circ \psi(t)$$

に満たすものが存在する."

(4.1) は Poincaré の方程式といわれる。

系 1 " 上記仮定のもとで, $|\rho| > 1$, f は \mathbb{C}^2 で整理

とする。このとき、 ψ は \mathbb{C} で線型である。”

系2 “上記仮定のもとで、 f はさらに f は \mathbb{C}^2 から \mathbb{C}^2 への双整型写像とする。このとき、 ψ は \mathbb{C} から \mathbb{C}^2 への埋め込みである”

$f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ が双整型るとき、上のような $\psi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ を $|p| < 1, > 1$ に従って、 f の安定曲線、不安定曲線という。 k -周期点 p に対しては、 f の p における安定、不安定曲線を f の p における安定、不安定曲線という。

写像

$$f_c : \begin{cases} x_1 = y \\ y_1 = cx - \frac{3}{2}(c-1)y + 2(c-1)y^3 \end{cases} \quad (|c| > 1)$$

の鞍点 $0 = (0, 0)$ における安定、不安定曲線を求めてみよう。

固有値の1つを p とする。 $\psi = (u, v)$ とあければ、(4.1)は

$$\begin{cases} u(pt) = v(t) \\ v(pt) = cu(t) - \frac{3}{2}(c-1)v(t) + 2(c-1)v(t)^3 \end{cases}$$

となる。 v を消去して

$$u(p^2t) + \frac{3}{2}(c-1)u(pt) - cu(t) = 2(c-1)u(pt)^3,$$

$$u(t) = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \dots$$

を代入すると t により、 ξ_1 は任意にとり、 $\xi_n (n > 1)$ は

$$(p^{2n} + \frac{3}{2}(c-1)p^n - c)\xi_n = 2(c-1) \sum_{j+k=n} \xi_j \xi_k$$

による2項決定法により分る。(Ushiki [1])

t 区間をとり、この曲線は $x=0$ 近傍で $y=\phi(x)$ で表わされ
るとすれば、 ϕ は

$$\phi(\phi(x)) = cx - \frac{3}{2}(c-1)\phi(x) + 2(c-1)\phi(x)^3$$

を満たす。 $\phi(x) = \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \dots$ とおくと、未定係数法により
 η_1, η_2, \dots を順次求めることができる。

不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ における2つの不安定曲線も同様
にして求めることができる。

k -周期点 $p=(a, b)$ における安定または不安定曲線を求める
には次のようにすればよい。 $f^k, \psi=(u, v)$ は

$$f^k: \begin{cases} x_1 - a = \alpha(x-a) + \beta(y-b) + \dots \\ y_1 - b = \gamma(x-a) + \delta(y-b) + \dots \end{cases}, \quad \psi: \begin{cases} x-a = \xi_1 t + \xi_2 t^2 + \dots \\ y-b = \eta_1 t + \eta_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

とおくと、未定係数法で $\xi_1, \eta_1, \dots; \xi_2, \eta_2, \dots$ を求めればよい。

§5. f_c ($c > 1$ または $c < -1$) の \mathbb{R}^2 への制限。 $c > 1$ または
 $c < -1$ ならば、 f_c は $\mathbb{R}^2 \in \mathbb{R}^2$ の上へ移す。また、 φ_+, φ_- は \mathbb{R}^2
から \mathbb{R}^2 への写像となる。こゝでは $\varphi_+(\mathbb{R}^2) = G_+ \cap \mathbb{R}^2, \varphi_-(\mathbb{R}^2)$
 $= G_- \cap \mathbb{R}^2$ の形を求めよう。

まず、 $c > 1$ とする。

不動点 $(0, 0)$ における安定、不安定曲線は $(0, 0)$ の近傍で考
えられ

$$(5.1) \quad y = \lambda x + \eta_3 x^3 + \dots, \quad 0 < \lambda < 1, \quad \eta_3 > 0$$

$$(5.2) \quad y = \mu x + \beta'_1 x^3 + \dots, \quad \mu < -1, \quad \beta'_1 > 0$$

で与えられる。原点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ における2本の不安定曲線は

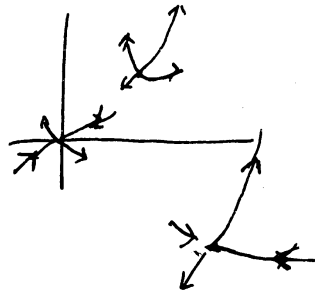
$$(5.3) \quad \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} = t + \xi_2 t^2 + \xi_3 t^3 + \dots, & \xi_n > 0, n=2, 3, \dots \\ y_1 - \frac{1}{2} = \sqrt{c} t + c \xi_2 t^2 + \dots \end{cases}$$

$$(5.4) \quad \begin{cases} x_1 - \frac{1}{2} = t + \xi'_2 t^2 + \dots \\ y_1 - \frac{1}{2} = -\sqrt{c} t + c \xi'_2 t^2 + \dots \end{cases}, \quad \xi'_2 > 0$$

で与えられる。(5.3) で与えられる曲線の $t > 0$ の部分に $y = \rho(x)$ とすれば、 $x > 0$ で $\rho = \rho \circ \phi$ は単調増加である。

2-周期点 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ の右にある不安定曲線、安定曲線はそれぞれ単調に $x, y \rightarrow \infty$, $x, y \rightarrow -\infty$ と存する。

次に図示すると次のようである。



これ以上詳しく調べるために数値計算に頼ることにする。
 $(0,0)$ から右にある不安定曲線と $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ から入る安定曲線は横断的に交わる。すなわち、異質=重漸近点 (heteroclinic point) が現われる。 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ から出た不安定曲線と $(0,0)$ から入る安定曲線も交わると思われど、まだ確認していない。

以上のことから、 $\varphi_+(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_-(\mathbb{R}^2)$ は次の図のようである。

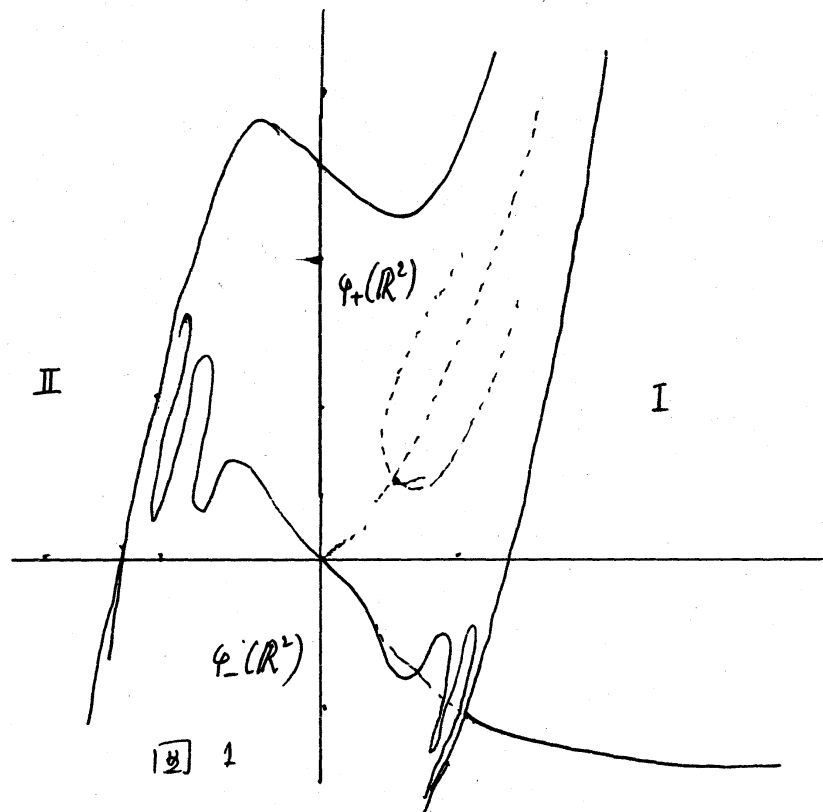


図 1

つまり $c < -1$ の場合を考へる。

原点における不安定曲線は

$$y = \lambda x - \gamma_3 x^3 + \dots, \quad \lambda > 1, \quad \gamma_3 > 0$$

と表わされ、

$$-cx \leq y \leq \lambda x \quad (0 \leq x \leq \frac{1}{2})$$

に満たす x の範囲で、安定曲線は

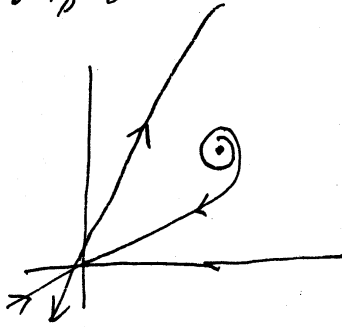
$$y = \mu x + \gamma_3' x^3 + \dots, \quad 0 < \mu < 1, \quad \gamma_3' > 0$$

と表わされ、 $\frac{1}{3}x \leq y \leq x$ ($0 \leq x \leq \frac{1}{2}$) に満たす。

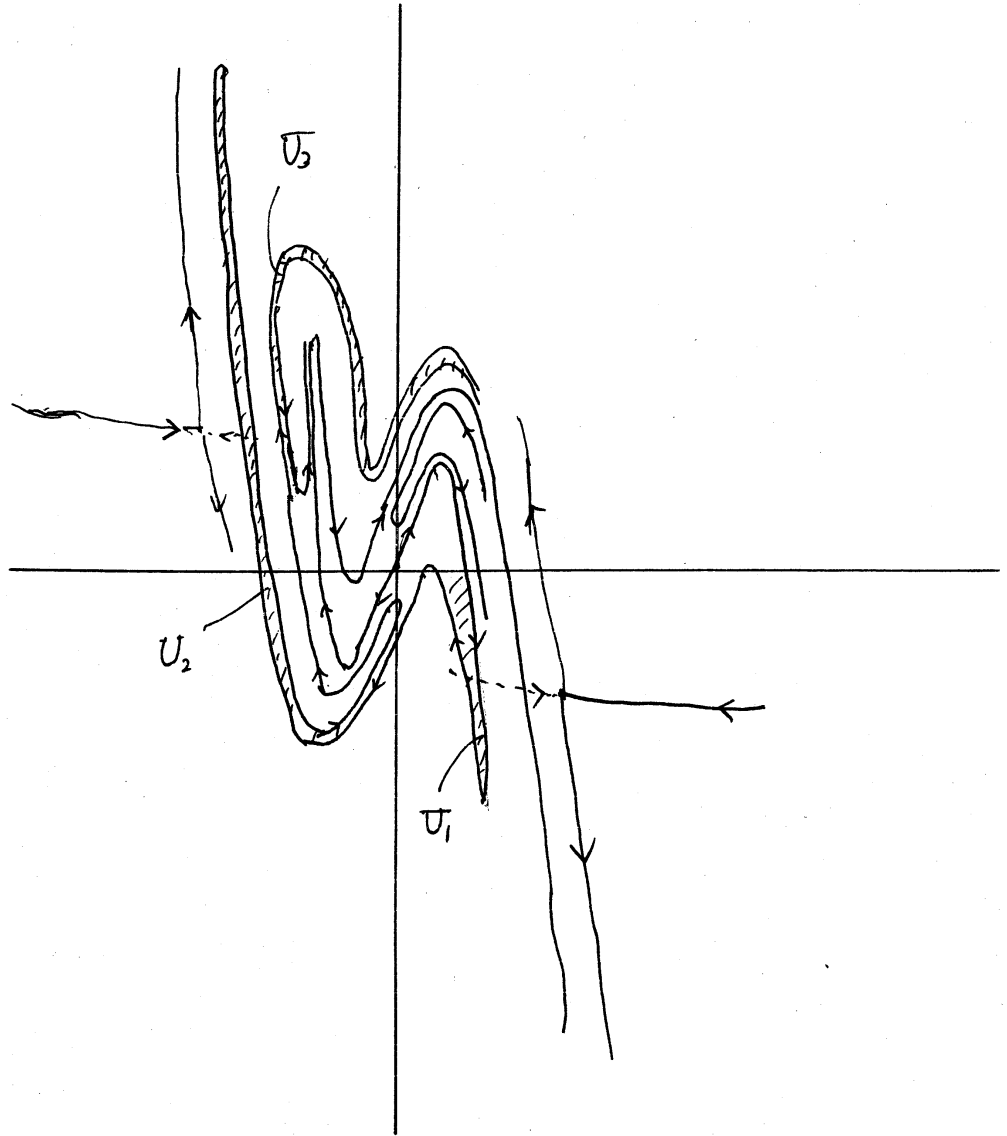
不動点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ における固有値は純虚数であるから、滑り点である。

以上のことから、原点における安定、不安定曲線は次の図の

よりに $\sigma = 0$ の分る



原点における不安定曲線の σ のように伸びていくかは数値計算による。 $C=2$ のときの概略の図を示す



まず, $\varphi_+(\mathbb{R}^2)$ と $\varphi_-(\mathbb{R}^2)$ は原点に関して対称で, 原点から出た不安定曲線 C によって囲まれた領域であることに注意しよう. 図の斜線の部分 U_1 は t により U_2 に, U_2 は U_3 に移り, U_1 は右下に伸び, U_2 は左上により長く伸び, U_3 はさらに長く伸びて右下に行く. このように $\varphi_+(\mathbb{R}^2)$, $\varphi_-(\mathbb{R}^2)$ は無数の腕を出す. さらに, これらは右下から左上へ細長く伸びた領域で互いに絡み合うことになる. $\varphi_+(\mathbb{R}^2) \cup \varphi_-(\mathbb{R}^2)$ の境界は 2-周期点 $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$ から出た不安定曲線である. $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ から右下へ出た不安定曲線は素直であるが, 左上へ出た部分は C と絡み合う. $(\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ へ左から入る安定曲線は C の 2 つの分枝と横断的に交わる. これから, 異値 = 重漸近点だけではなく, 同値 = 重漸近点 (homoclinic point) も出現するようになる.

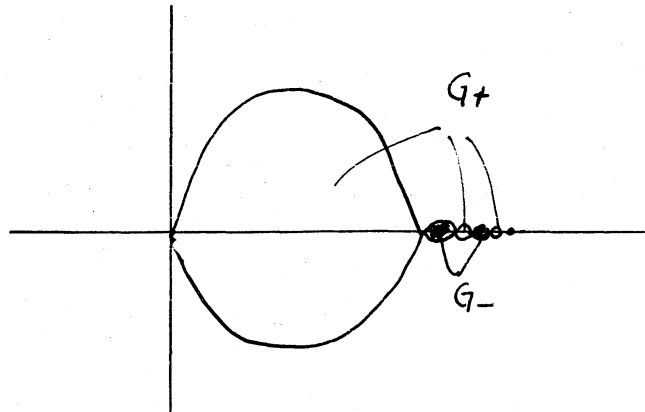
§6 G_+ と G_- の \mathbb{C}^2 内での形状 G_+ と G_- は原点に関して対称であるから, G_+ についてだけ調べればよい. G_+ の一般的性質として次の若杯 (喜多 [1]) の結果がある

定理" $L: \alpha x + \beta y + \gamma = 0$ は \mathbb{C}^2 内の任意の複素直線とする. そのとき, $G_+ \cap L$ は有界である"

G_+ の境界は実 3 次元であるが, 原点から出た不安定曲線 — 実 2 次元解析的曲面 — を含む. このことから, G_+ の境界は実 3 次元の解析多様体 (特異点を含むかも知れない) と想

像さぬが、証明の方法は違つてゐる。

実験的に、 $G_+ \cap \{y=0\}$ 区間の様子として、 $c > 1$ のとき次の図のようになる。さうから、 G の場合は、図 I における領域 I と



II は \mathbb{C}^2 のなかで区別してゐる。

文献

Bieberbach, L

[1] Beispiel zweier ganzen Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumentreue Abbildung des \mathbb{R}_4 auf ein Teil seiner selbst vermitteln, S-B. Preuß. Akad. Wiss., Physikalisch-math. Klasse (1933), 476-479.

Bochner, S + Martin W. T.,

[1] Several complex variables, Princeton U.P., 1948.

Fatou, P

[1] Sur les fonctions méromorphes de deux variables, C. R. 175 (1922), 862-865.

[2] Sur certaines fonctions uniformes de deux variables,
C.R. 175 (1922), 1030-1033.

福原満州雄

[1] Schröder の函数方程式について, 九州大学理学部研究報告, 1 (1945), 190-196

喜多通武

[1] 多変数函数論より見た Riemann 面の一つの問題,
数学, 23 (1971), 219-225.

小平邦彦

[1] Nevanlinna 理論, 東大数学教育セミナー・ノート, 34,
1974.

Picard, E

[1] Leçons sur quelques équations fonctionnelles, Gauthier-
Villars, 1928

Poincaré, H

[1] Sur une classe nouvelle de transcendentes uniformes,
Jour. de Liouville, 4^e série, 6 (1890), 313-365.

Ushiki, S

[1] Unstable manifolds of analytic dynamical systems,
J. Math. Kyoto Univ., 21 (1981), 763-785