

## 差分方程式における similarity 法

京大工学部 前田 茂 (Shigeru Maeda)

### 1. 初めに

前世紀の後半に S. Lie は Lie 群論を創始し、これと応用して微分方程式の解法の統一化を試みた。Lie 群の作用の下で微分方程式が不変 (対称) であるとき、常微分方程式では求積によって次数の reduction が行われ、偏微分方程式では特解が得られる。前者に関しては [1] に Lie の仕事が続けられており、偏微分方程式も含めた多くの適用例は例之ば [2] にみるこゝができる。

一方、整数値をとる独立変数に従う常差分方程式に関して Lie 群の作用に対する不変性 (対称性) の概念が導入されている [3]。本報告の目的は、差分方程式が対称性を許容するとき、常微分方程式の場合と同様に reduction が可能であることを示すことである。

初めに 差分方程式の対称性から復習することにする。

$\mathbb{R}^N$  のある領域  $M$  で定義された 1 階差分方程式を考える.

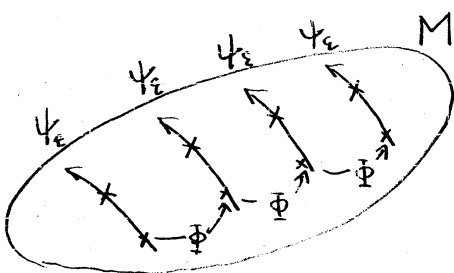
$$x_{t+1}^i = \phi^i(x_t) \quad \begin{pmatrix} i=1, \dots, N \\ t=0, 1, \dots \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$\phi^i$  の含め  $M$  以下現れる関数はすべて  $C^\infty$  級とする. (1) は  $M$  上の写像  $\Phi: x_t \mapsto x_{t+1}$  と与えておける. 任意の  $x_0 \in M$  に対して  $x_{t+1} = \Phi(x_t)$  で定まる  $M$  上の半無限点列  $\{x_t\}_{t=0,1,\dots}$  を (1) の解と呼ぶことにする.

つぎに、 $M$  上のベクトル場

$$X = \sum_{i=1}^N \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (2)$$

を考へ、 $X$  の生成するフローを  $\psi_\varepsilon$  とする. (1) の任意の解  $\{x_t\}$  及び任意に小さい  $\varepsilon$  に対して点列  $\{\psi_\varepsilon(x_t)\}_{t=0,1,\dots}$  がやはり (1) の解になるとき  $X$  を (1) の対称性作用素と呼ぶ. (1)



の対称性作用素の全体を  $S_\Phi$  とかくことにする. 次の命題は [3] に証明されている.

Prop. 1 (2) で与えられる  $X$  が  $S_\Phi$  に属するための必要十分条件は 次の関数方程式が成立することである.

$$\xi^i(\phi(x)) = \sum_{j=1}^N \xi^j(x) \frac{\partial \phi^i}{\partial x^j}(x) \quad (i=1, \dots, N). \quad (3)$$

$S_{\mathfrak{g}}$  は Lie 環の構造をもち、これによって差分方程式の許容する対称性群という概念が確定する。 $S_{\mathfrak{g}}$  の構造を調べるには (3) を解いて  $\xi^i$  を求める必要があるが (3) を解くことは容易でないことが多い。

対称性作用素の概念は座標系の選択によらないことに注意する。いま、 $M$  上の 1 つの局所座標系  $(x^i)$  によって (1) 及び (2) の表現が与えられているとする。(1) は写像  $\phi$  の  $(x^i)$  による局所表現とみなせる。別の局所座標系  $(y^i)$  を  $y^i = f^i(x)$  で導入する。すると、写像  $\phi$  は新しい座標近傍上で

$$y_{t+1}^i = f^i(\phi(f^{-1}(y_t))) \equiv \phi'^i(y_t) \quad (4)$$

とあらわされ、同じく (2) は

$$X = \sum_{i=1}^N \xi^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \xi^i(y) = \sum_{j=1}^N \xi^j(x) \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$$

とかける。(1) と (4) は一般に相異なる差分方程式であるけれども同じ写像を与えるので同一視できる。このとき (3) も次の意味で座標系の選ぶ方によらない。 $\xi, \phi$  が (3) をみたせば  $\xi', \phi'$  も (3) をみたし逆も成立する。従って、 $X$  が  $S_{\mathfrak{g}}$  に属するという性質は座標系の選択によらない。以下、我々はこの事実を用いる。

## 2. 対称性作用素を許容するときの差分方程式の表現

重  $\omega$  を  $R^N$  のある領域で定義された  $N$  次元 1 階常差分方程式とし、その局所表現が (1) で与えられているとする。(2) で定まるベクトル場  $X$  が重の対称性作用素である、つまり (3) が満たされているとする。我々は  $X$  に関連して特殊な局所座標系を捜して、重  $\omega$  の解が求め易い形に表現することと考える。さて、 $X$  は非特異点の近傍で適当な局所座標系  $(y^1, \dots, y^N)$  によつて

$$X = \frac{\partial}{\partial y^1} = \sum_{i=1}^N \delta_{i1} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

とあらわされる。 $y^i$  は次の方程式を解くことと求まる。

$$X y^1 = 1, \quad X y^2 = \dots = X y^N = 0, \quad dy^1 \wedge \dots \wedge dy^N \neq 0. \quad (5)$$

この局所座標系における重の表現が  $y_{t+1}^i = \phi^i(y_t)$  になつたとすれば、(3) が成立すればならば  $\partial \phi^i / \partial y^1 = \delta_{i1}$  が成り立つ。中には、重は局所座標系  $(y^1, \dots, y^N)$  によつて

$$y_{t+1}^1 = y_t^1 + g^1(y_t^2, \dots, y_t^N), \quad y_{t+1}^\alpha = g^\alpha(y_t^2, \dots, y_t^N) \quad (\alpha=2, \dots, N) \quad (6)$$

とあらわされる。

(6) を与ると、重は  $y^2, \dots, y^N$  に関する  $(N-1)$  次元差分方程式

と、 $y^1$  に関して和分操作の可能な いわば線形化された方程式として表現されている。若し、(6)の後半の方程式の解が求まれば  $y^1$  は  $y^1 = \sum_{\alpha=0}^N g^{\alpha}(y^{\alpha}) + y_0^1$  として得られる。勿論、座標近傍の覆う範囲に十分注意しなければならない。

Prop. 2 (1) で与えられる重が対称性作用素  $X$  を許容するものとする。  $X$  の非特異点の近傍において適当な座標系  $(y^1, \dots, y^N)$  をとれば  $X$  は (6) の形に表現される。

つぎに、複数個の対称性作用素が許容されるときの重の表現について考察しよう。最も簡単なのは平行移動群を許容するときである。  $S$  個の対称性作用素

$$X_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \xi_{\alpha}^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (\alpha=1, \dots, S) \quad (7)$$

があつて次の条件をみたしているとする。

$$[X_{\alpha}, X_{\beta}] = 0, \quad \text{rank}(\xi_{\alpha}^i) = S. \quad (8)$$

但し、 $[X, Y] = XY - YX$  は交換子積とあらわす。このとき局所座標系  $(y^1, \dots, y^N)$  があつて  $X_{\alpha} = \partial / \partial y^{\alpha}$  ( $\alpha=1, \dots, S$ ) と表わされることが知られている。  $y^i$  は次の方程式を解けばよい。

$$X_\alpha y^i = \delta_{i\alpha}^i \quad \left( \begin{array}{l} i=1, \dots, N \\ \alpha=1, \dots, S \end{array} \right), \quad dy^1 \wedge \dots \wedge dy^N \neq 0.$$

この局所座標系で重が  $y_{\tau+1}^i = \phi^{i'}(y_\tau)$  とあらわされておるものとする。 (3) によつて  $\partial \phi^{i'} / \partial y^\alpha = \delta_{i\alpha}$  が成立する。従つて、重は次の形に表現されることになる。

$$\begin{aligned} y_{\tau+1}^\alpha &= y_\tau^\alpha + g^\alpha(y_\tau^{s+1}, \dots, y_\tau^N) & (\alpha=1, \dots, S) \\ y_{\tau+1}^\varepsilon &= g^\varepsilon(y_\tau^{s+1}, \dots, y_\tau^N) & (\varepsilon=s+1, \dots, N) \end{aligned} \quad (9)$$

(6) と比較して (9) は  $y^{s+1}, \dots, y^N$  だけで閉じた  $(N-S)$  次元差分方程式と、 $y^1, \dots, y^s$  に関して積分操作の可能な  $S$  個の方程式とで表わされておる。

条件(8)を少し緩めて可解対称性群を許容するような場合にも同様の事情が成立することを見よう。重が  $S$  個の対称性作用素(7)を許容し、かつ次の条件が満たされるものとする。

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta] &\equiv 0 \quad \text{mod. } (X_1, \dots, X_l) & \left( \begin{array}{l} l=1, \dots, s-1 \\ \alpha, \beta=1, \dots, l+1 \end{array} \right), \\ \text{rank} \left( \sum^i X_\alpha \right) &= S. \end{aligned} \quad (10)$$

このことは、適当な局所座標系  $(y^1, \dots, y^N)$  によつて  $X_\alpha$  が次の形にかけらることが証明できる。

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial y^1}, \quad X_\alpha = \frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \xi_\alpha^\beta(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y^\beta} \quad (\alpha=2, \dots, S)$$

$y^i$  は方程式

$$X_\alpha y^i = \delta_{i\alpha} \quad \left( \begin{array}{l} \alpha=1, \dots, S \\ i=\alpha, \dots, N \end{array} \right), \quad dy^1 \wedge \dots \wedge dy^N \neq 0$$

を解いて求める。この局所座標系を用いて今までと同様の議論を行うと重が次の形をしてゐることがわかる。

$$\begin{aligned} y_{\tau+1}^\alpha &= y_\tau^\alpha + g^\alpha(y_\tau^{\alpha+1}, y_\tau^{\alpha+2}, \dots, y_\tau^N) \quad (\alpha=1, \dots, S), \\ y_{\tau+1}^\varepsilon &= g^\varepsilon(y_\tau^{S+1}, y_\tau^{S+2}, \dots, y_\tau^N). \end{aligned} \quad (11)$$

この場合も  $y^{\alpha+1}, \dots, y^N$  に関して閉じた差分方程式が得られ、 $y^\alpha, y^{\alpha+1}, \dots, y^1$  は順次積分操作で解ける形になってゐる。

Prop. 3 (1) で与えられる重が  $S$  個の対称性作用素 (7) を許容し、それらが条件 (8) (又は (10)) を満たしてゐるならば、重は適当な局所座標系  $(y^1, \dots, y^N)$  によつて (9) (又は (11)) の形に表わすことができる。

3.  $N=1$  の場合

最後に 今までの議論を  $N=1$  の場合 つまり 1変数差分方程式に適用しよう.  $\mathbb{R}$  の適当な領域上で定義された差分方程式を考える.

$$\Phi : \quad x_{t+1} = \phi(x_t) \quad (12)$$

$\Phi$  は差分方程式 (12) と同時に写像  $x \mapsto \phi(x)$  も表すことにする.  $X = \xi(x) \cdot d/dx$  が  $\Phi$  の対称性作用素であるための条件は Prop. 1 から次の関数方程式が成立することである.

$$\xi(\phi(x)) = \xi(x) \cdot \frac{d\phi}{dx}(x). \quad (13)$$

(13) をみたす  $\xi \neq 0$  がみつければ, (5) によって新しい局所座標  $y$  を次式で導入する.

$$y = \int \frac{dx}{\xi(x)}. \quad (14)$$

Prop. 2 によれば  $\Phi$  は  $y$  の有効領域において線形方程式

$$y_{t+1} = y_t + A \quad (A: \text{定数}) \quad (15)$$

であらわされる.

N.B. 写像の正則点・特異点 は 写像を表現する座標系



の選択によらない。実際 (1) 及び (4) で表わされている写像に対して

$$\frac{\partial x_{t+1}^i}{\partial x_t^j} = \sum_{k,l} \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right)_{t+1} \cdot \left( \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \right)_t \cdot \frac{\partial y_{t+1}^k}{\partial y_t^l}$$

であるから  $\text{rank}(\partial x_{t+1}^i / \partial x_t^j) = \text{rank}(\partial y_{t+1}^i / \partial y_t^j)$ 。と  
 こゝで (15) では 特異点 は現れないので 表現 (15) は (12) の  
 特異点 を含まない領域 (のある範囲) で有効である。後  
 程 例を用いながら示す。重の非正則点はその零点に対応  
 する ことがあふ。

(13) を少し変更して次の関数方程式が成立すると仮定する。

$$\eta(\phi(x)) = B \cdot \eta(x) \cdot \frac{d\phi}{dx}(x) \quad \left( \begin{array}{l} B: \text{定数} \\ B \neq 0, 1 \end{array} \right) \quad (16)$$

このとき、新しい局所座標  $z$  を

$$z = \int \frac{dx}{\eta(x)} \quad (17)$$

を導入すると  $z$  の有効領域に於いて重は

$$z_{t+1} = \frac{1}{B} z_t + A \quad (A: \text{定数}) \quad (18)$$

とあらわされる。このときは  $\left( \int \frac{dx}{\eta(x)} - \frac{AB}{B-1} \right) \eta(x) \cdot \frac{d}{dx}$   
 が対称性作用素を与えることを注意する。

例1 リカッパ方程式を考へる。

$$x_{i+1} = \frac{cx_i + d}{ax_i + b} \quad \left( \begin{array}{l} a, b, c, d: \text{定数} \\ a \neq 0, ad - bc \neq 0 \end{array} \right) \quad (19)$$

(19) を考へる領域は特定しないでおく。関数方程式(13)は

$$\xi\left(\frac{cx+d}{ax+b}\right) = \xi(x) \cdot \frac{bc-ad}{(ax+b)^2}.$$

ちよつとした計算で次のような1つの解 $\xi$ が求まる:

$$\xi(x) = ax^2 + (b-c)x - d. \quad (14) \text{ に従つて新変数 } y \text{ を求める}$$

と以下のようになる。

i)  $(b-c)^2 + 4ad > 0$  のとき

$$y = \frac{1}{a(x_1 - x_2)} \log \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right|, \quad \text{但し } \xi(x_1) = \xi(x_2) = 0, \quad x_1 \neq x_2$$

ii)  $(b-c)^2 + 4ad = 0$  のとき

$$y = -\frac{1}{a(x - x_1)}, \quad \text{但し } \xi(x_1) = 0.$$

iii)  $(b-c)^2 + 4ad < 0$  のとき

$$y = \frac{1}{a\omega} \tan^{-1} \left[ \frac{1}{\omega} \left( x + \frac{b-c}{2a} \right) \right], \quad \text{但し } \omega = \sqrt{-\frac{d}{a} - \left(\frac{b-c}{2a}\right)^2}$$

何れの場合も (19) は  $y$  に関する線形方程式(15)の形になる。

例2  $J=[0,1]$  上で定義された差分方程式

$$x_{t+1} = ax_t(1-x_t) \quad (a: \text{定数}, 0 < a \leq 4) \quad (20)$$

を考える. (20) に対して関数方程式 (16) を適用する. 示す  
よし.

$$\eta(ax(1-x)) = B \cdot \eta(x) \cdot a(1-2x) \quad (B \neq 0, 1) \quad (21)$$

さて, 関数  $\psi(x) = ax(1-x)$  は  $x = 1/2$  で  $\psi' = 0$  となる. 従  
って 前述の N.B. によって  $J$  全体で (20) を線形方程式の形に  
表現し直すことはできない. そこで,  $J$  の一部で (21) を満  
たす  $\eta(x)$  を探すことにする.  $\eta$  の候補として ( $k$  次多項式)<sup>1/k</sup>  
という関数を考えれば,  $a=2$  及び  $4$  のときには次のようなものが  
見つかることができる.

(i)  $a=2$  のとき.  $\eta(x) = \frac{1}{2} - x$ ,  $B = \frac{1}{2}$ . そこで,  $x$  の範  
囲を  $0 \leq x < 1/2$  に制限して (20) を線形化する.

$$z = \int \frac{dx}{\frac{1}{2} - x} = -\log\left(\frac{1}{2} - x\right). \quad z_{t+1} = 2 \cdot z_t - \log 2. \quad (22)$$

(22) の一般解を求めて  $x$  に戻せば 次の解を得る.

$$x_t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} A^{2^t}, \quad A = 1 - 2x_0. \quad (23)$$

我々は  $x \in [0, \frac{1}{2})$  に制限して  $A > 0$  の場合を考えたが、 $\frac{1}{2} \leq x < 1$  のまじり  $A \leq 0$  のときも実は (23) は (20) の解になっている。  
よって、(23) は J 上の差分方程式 (20) の  $a=2$  のときの解である。

ii)  $a=4$  のとき、 $0 < x < \frac{1}{2}$  の範囲において、次のような (21) の解が見つかる。

$$\eta(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

(17) に従えば

$$z = \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \cos^{-1}(1-2x), \quad \text{従って } x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos z \quad (23)$$

ここで、(23) に  $0 \leq x \leq 1$  なる  $x$  に対して有効な変換式とみたとすると、(20) は次式の如くになる。

$$\cos z_{t+1} = \cos(2z_t) \quad (24)$$

いさゆる piecewise linear な方程式にかき直せる。(24) を  $z_{t+1} = 2z_t$  と表現できる領域については N.B. で述べた如く制限があったが、幸いなことに (24) は J 上の差分方程式 (20) の書換えである。これから次の解を得る。

$$\chi_{\tau} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(A \cdot 2^{\tau}), \quad A = \cos^{-1}(1 - 2\chi_0) \quad (25)$$

#### 4. 最後に

本報告に現れる対称性作用素を1つの基礎的道具として Hamilton, Lagrange 両古典力学系を差分方程式で記述する試みが行われてきた [3, 4]. 対称性作用素を差分方程式の解の陽的表現を求めるのに応用したものが本報告である. この議論では特殊関数方程式 (3) (又は (13), (16)) の非自明な解を求める必要がある. 対称性にかんじた様々の議論を差分方程式について行うとき、往々にして二種の関数方程式の解を求めたり 解の構造を知る必要が生じる. そのための有効な手段は残念ながら 少ないように思われる.

#### REFERENCES

- [1] A. Cohen, An introduction to the Lie theory of one-parameter groups, G. E. Stechert, New York, 1931
- [2] G. W. Bluman and J. Cole, Similarity methods for differential equations, Springer-Verlag, New York, 1974.
- [3] S. Maeda, Canonical structure and symmetries for discrete systems, Math. Japon., 25 (1980), 405-420.
- [4] S. Maeda, Lagrangian formulation of discrete systems and concept of difference space, Math Japon., 27 (1982), 336-345.