数理解析研究所講究録
第 499 巻 1983 年 100-110

Wright の方程式

東北大理　加藤順二（Junji Kato）

$$\text{(E)} \qquad \dot{x}(t) = a\{1 - x(t-h)\}x(t)$$

$h>0$, a : 定数

を Wright の方程式という。

E. M. Wright [1]（および [2]）はこの方程式を L. Cherwell から素数の分布の問題に関連して生ずるモデルとして紹介された（このとき、$h=1$, $a=\log 2$）。

その後、G. H. Hutchinson [3] によって生態系のモデルとして取り上げられて以来多くの人によって研究されており、Hutchinson の方程式と呼ばれることもある。

ある種の生態系の増加率に関するモデル

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = a \qquad \text{マルサスのモデル}$$

$$= a(1-Mx(t)) \qquad \text{threshold（閾）をもつモデル}$$

に比較して（E）は遅れ効果を反映したより現実的なモデルとなっている。

（E）は明らかに２つの定数解

$$x(t) \equiv 0, \quad x(t) \equiv 1$$

をもっている。

（E）の $t=0$ を初期時間とする解を求めるためには、まず $[-h, 0]$ における $x(t)$ の値 ── 初期関数 ── が既知でなくてはならない。逆に、連続な初期関数が与えられたならば、$[0, h]$ 上では（E）は常微分方程式となり解を求めることができる。逐次、$[h, 2h]$, $[2h, 3h]$, … における解が求められる。したがって、（E）の $x(0)=0$ をみたす解は $x(t) \equiv 0$ に限る。逆に、$x(0) \neq 0$ ならば、すべての $t>0$ に対して $x(t) \neq 0$ となることがわかる。

一方、$x(t) \equiv 1$ に関しては様子が異なり、$x=1$ を上下に横切る解が存在し得る。

今、変数変換

$$t = hs, \quad y(s) = x(t) - 1$$

を施こすと（E）は

（E′）　$$\dot{y}(s) = -b\,y(s-1)\{1+y(s)\}, \quad b = ah$$

に変換され、解 $x(t) \equiv 0$, $x(t) \equiv 1$ はそれぞれ、解 $y(s) \equiv -1$, $y(s) \equiv 0$ に対応している。（E′）を自励線形系

（L）　$$\dot{y}(s) = -b\,y(s-1)$$

の摂動系と考える。（L）の解の漸近挙動は常微分方程式の場合と同様に、特性方程式

(C) $$\lambda = -be^{-\lambda}$$

の根の実部の分布状態に依存している。そして、

$b<0$ のとき正実根λが存在する、したがって、発散する解が存在する。

$b=0$ のときは自明。

$b>0$ のとき、正実根は存在しない、したがって、発散する解があればそれは振動していることがわかる。

さらに、

$b<\frac{\pi}{2}$ ならばすべての解は0に収束。

$b=\frac{\pi}{2}$ ならば、周期解 $y(s)=\sin\frac{\pi}{2}s$ があり、

$b>\frac{\pi}{2}$ ならば、発散する解が存在する。

以上のことをもとにして、

<u>定理</u>(Wright [4]) (E′)に対して、

(i) $0<b<\frac{\pi}{2}$ ならば零解は漸近安定、すなわち、$\delta>0$ が存在して、$\|y_0\|<\delta$ ならば $y(s)\to 0$ $(s\to\infty)$.

(ii) とくに、$0<b<\frac{37}{24}$ ならば、$y(0)>-1$ をみたす解はすべて0に収束する。

(iii) $b>\frac{\pi}{2}$ ならば、$y(s)>0$ $(s\in(-1,0])$ をみたす解 $y(s)$ に対して、$y(s)=0$ となる s を小さい順に

$$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots$$

とするとこれは無限列となり、すべての k に対して

$$z_k - z_{k-1} > 1, \quad 0 \leqq (-1)^k y(s) \leqq e^b - 1 \quad (s \in [z_k, z_k+1])$$

をみたす。さらに、z_k を初期関数 y_0 の関数と考えたときこれは連続である。

こゝで、実数値連続関数 $y(s)$ に対して y_s は

$$y_s(\theta) = y(s+\theta) \quad (\theta \in [-1, 0])$$

で定義された $C([-1,0]; R)$ の元を表わし、$C([-1,0]; R)$ は一様 norm で位相が与えられているものとする。

関数 $y(s)$ は長さ 1 の区間で高々 1 度 0 となり、その点の前後ではその符号を変えるときに slowly oscillating と呼ばれる。上の結果は (iii) の仮定のもとで $y(s)$ が slowly oscillating であることを示している。

<u>定理</u> (Kakutani-Markus [5]). (E′) の条件 $y(0) > -1$ をみたす解 $y(s)$ に対して、

(i). $b > \frac{1}{e}$ で $y(s) \to 0 \ (s \to \infty)$ ならばいくらでも大きな τ に対して $y(s) = 0$ となる $s \geqq \tau$ が存在する。

(ii). $0 < b \leqq \frac{1}{e}$ で、$y(s)$ が slowly oscillating ならば、ある τ に対して、$s \geqq \tau$ で $y(s)$ は単調に 0 に収束する。

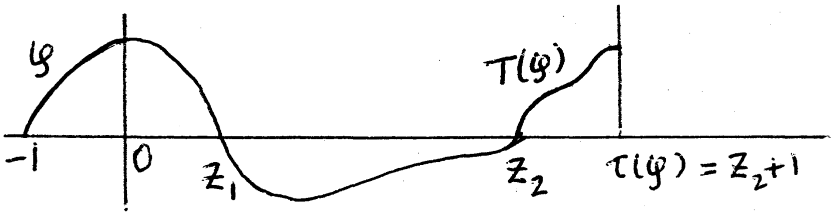
$b > \frac{\pi}{2}$ の場合を考える。

$\varphi(-1) = 0$, $\|\varphi\| \leqq e^b - 1$, $0 < \dot{\varphi}(s) \leqq b e^b$ $(s \in [-1, 0))$

をみたす $\varphi \in C([-1,0], R)$ の全体を S とすると、これは凸部分集合となるがコンパクトではない。このとき、初期関数を φ とする解 $y(s)$ の $s > 0$ における2番目の零点 z_2 に対して $\tau(\varphi) = z_2 + 1$ とおいて変換

$$T : \varphi \longmapsto y_{\tau(\varphi)}$$

を定めると、これは Wright の定理(iii)によって、S から S への連続な写像となる。



明らかに、$y(s)$ が slowly oscillating な周期解であるための必要十分条件は、ある自然数 n と正数 σ に対して、y_σ が T^n の不動点となることである。このことを用いて、G. S. Jones は次の定理を与えた。

<u>定理</u>(Jones [6]). $b > \frac{\pi}{2}$ のとき、(E′)は定数解以外に slowly oscillating な周期解をもつ。

Jones の証明は F. E. Browder [7] の与えた不動点

定理を用いたが不完全であった。R. Grafton [8] は別の不動点定理を与えて、それを用いてこの定理の完全な証明を与えた。

変数変換 $1+y(s)=e^{z(s)}$ によって、(E′) は

(F) $$\dot{z}(s) = -f(z(s-1))$$

に変換される。ここで、$f(z)=b(e^z-1)$ は $b>0$ のとき

(H) $$f(0)=0,\quad \dot{f}(z)>0\ (z\in R),\quad \inf\{f(z): z\in R\}>-\infty$$

をみたしている。J. L. Kaplan と J. A. Yorke を この一般的な方程式 (F) に対して次の結果を示した。

<u>定理</u> (Kaplan-Yorke [9]). 条件 (H) および、$\dot{f}(0)>\frac{\pi}{2}$ のもとで、(F) は slowly oscillating な周期解をもつ。さらに、このような周期解 $z^0(s)$ が一意的ならば、それは次の意味で漸近安定である: $z(s)$ が $z(0)>-1$ をみたす slowly oscillating な解ならば、

$$z(s)-z^0(s) \longrightarrow 0\quad (s\to\infty).$$

条件 (H) を

(H*) $$zf(z)>0\ (z\neq 0),\quad f(-z)=-f(z),\quad \int_0^z f(u)du \to \infty\ (z\to\infty)$$

でおきかえると次が示されている。

<u>定理</u>(Kaplan-Yorke [10])。条件(H^*)および

$$\left(\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}-\frac{\pi}{2}\right)\left(\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}-\frac{\pi}{2}\right)<0$$

のもとで(F)は周期4の周期解で自明でないものをもつ。

例えば、

$$\dot{y}(s)=-b\{1-y(s)^2\}y(s-1)$$

に対しては変数変換 $y\mapsto z$: $y=(e^{2z}-1)/(e^{2z}+1)$ によって(F)を得る。このとき、$f(z)=b(e^{2z}-1)/(e^{2z}+1)$ は、$b>0$ のとき定理の仮定をみたしている。同様に、次の結果が得られている。

<u>定理</u>(Kaplan-Yorke [10]).

$$\dot{z}(s)=-f(z(s-1))-f(z(s-2))$$

において．f が(H^*)に加えて．

$$\left(\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)\left(\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z}-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right)<0$$

をみたせば、6を周期とする非自明周期解がある。

この定理は遅れを2つもった方程式

$$\dot{y}(s)=-b(1+y(s))\{y(s-1)+y(s-2)\}$$

の周期解の存在について述べているが、遅れの比が整数比でないときは Kaplan-Yorke の方法は有効でないが、H.O. Walther によって次の結果が与えられている。

<u>定理</u>（Walther [11]）．方程式

$$(E_1)\qquad \dot{x}(t) = -b\left\{\int_0^{\tau} x(t-\theta)\,d\eta(\theta) - 1\right\}x(t)$$

において、$\eta(\theta)$ は $[0,1]$ で -1，$[\tau,\infty)$ で 0 となる非減少関数とする。このとき、$b > \frac{\pi}{2}$ ならばある $c > 0$ が存在して、$\tau \in (1, 1+c)$ に対して定数解でない周期解が存在する。

方程式 (E_1) は特別な場合（$\eta(\theta) = 0\ (\theta > 1)$）として (E) を含んでいるが、その他、$\eta(\theta) = -\frac{1}{2}\ (\theta \in (1,\tau))$ とおいて

$$\dot{x}(t) = -\frac{b}{2}\{x(t-1) + x(t-\tau) - 2\}x(t)$$

あるいは、$x = 1 + y$ とおいて、

$$(E_2)\qquad \dot{y}(t) = -\frac{b}{2}(1 + y(t))(y(t-1) + y(t-\tau))$$

を含んでいる。しかし、τ に制限があり一般にはまだ未解決で、R.D. Braddock - P. van den Driessche [12] は数値計算例を $\tau = 10$ のときに求めて、b の値と共に複雑なループをもった周期解が存在することを示した。

Wright の方程式はさまざまな方面でモデルとして生ず

る重要な方程式で比較的簡単な形をしており、よく研究されているが、まだ未知の部分も多い。

周期解の安定性

任意なτに対して (E_2) の周期解の存在

周期解の個数

quickly oscillating な周期解の存在

等々多くの問題がまだ十分に答えられていない。なお、[13]には多くの文献が述べられている。

文献

[1] E. M. Wright, On a sequence defined by a non-linear recurrence formula, J. London Math. Soc., 20(1945), 68-73.

[2] E. M. Wright, A functional equation in the heuristic theory of primes, Math. Gazette, 45(1961), 15-16.

[3] G. E. Hutchinson, Circular causal systems in ecology, Ann. N. Y. Acad. Sci., 50(1948), 221-246.

[4] E. M. Wright, A nonlinear difference-differential equations, J. Reine Angew. Math., 194(1955), 66-87.

[5] S. Kakutani - L. Markus, On the non-linear difference-differential equation $y'(t) = [A - By(t - \tau)]y(t)$, Ann.

Math. Studies, 41(1958).

[6] G. S. Jones, The existence of periodic solutions of $f'(x) = -\alpha f(x-1)\{1 + f(x)\}$, J. Math. Anal. Appl., 5(1962), 435-450.

[7] F. E. Browder, On a generalization of the Schauder fixed point theorem, Duke Math. J., 26(1959), 291-303.

[8] R. B. Grafton, A periodicity theorem for autonomous functional differential equations, J. Diff. Eq., 6(1969), 87-109.

[9] J. L. Kaplan - J. A. Yorke, On the stability of a periodic solution of a differential delay equations, SIAM J. Math. Anal., 6(1975), 268-282.

[10] J. L. Kaplan - J. A. Yorke, Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential-delay equations, J. Math. Anal. Appl., 48(1974), 317-324.

[11] H. O. Walther, Existence of a non-constant periodic solution of a non-linear autonomous functional differential equation representing the growth of a single species population, J. Math. Biol., 1(1975), 227-240.

[12] R. D. Braddock - P. van den Driessche, On a two lag differential delay equation, J. Austral. Math. Soc. Ser.B,

24(1983), 292-317.

[13] R. D. Nussbaum, Periodic solutions of some nonlinear autonomous functional differential equations, Springer Lec. Note in Math., 730(1979), 283-325.