数理解析研究所講究録
第 499 巻 1983 年 111-118

Permutability

東工大理　小沢 満 (Mitsuru Ozawa)

問題. $f(z)$, $g(z)$ を有理型函数とし, $f(g(z))=g(f(z))$ をみたすとき, f, g の関係を求めよ。

$f_n(z)$ を $f_0(z)=z$, $f_n(z)=f(f_{n-1}(z))$ により定義し f の n-th iteration という。このとき $f_m(f_n(z))=f_n(f_m(z))$ であるから, f の iteration は f と可換である。f の iteration 以外にも f と可換なことはありうる。

例 1. $(z+\sin z)\circ(2k\pi+z+\sin z)=(2k\pi+z+\sin z)\circ(z+\sin z)$.

2. $$\left(\int_0^z e^{t^p}dt\right)\circ\left(\omega\int_0^z e^{t^p}dt\right)=\left(\omega\int_0^z e^{t^p}dt\right)\circ\left(\int_0^z e^{t^p}dt\right),$$
$$\omega^p=1.$$

一般論として得られていることのうちで注目に値するものは I. N. Baker, Math. Zeits. 69 (1958), 121−163 のものである。その証明は不動点の性質によっている。

$f(z)$, $g(z)$ は超越整函数とする。

$f(z)$, $g(z)$ が可換ならば，$\exists n$, $\exists R_0>0$, $\forall r>R_0$

$$M(r, f_n) > M(r, g).$$

$M(r, f) = \max_{|z|\leqq r} |f(z)|$. f_n は f の n-th iteration.

この応用としてつぎのことが示されている。

$f(z) = ae^{bz}+c$ と $g(z)$ とが可換 $(a\neq 0,\ b\neq 0)$ ならば，$g(z)$ はつぎのどれかである。

(i) $g(z) \equiv$ const. ($f(z)$ の不動点)

(ii) $g(z) = z$

(iii) $g(z) = f_n(z)$.

これは全ての可換な函数が決定されている唯一つの超越整函数である。Baker のこの結果の応用として e^{z^p} と可換な函数はその iteration に限ることがいえる。

以下では $f(z)$ を与えて，増大の程度が $f(z)$ のそれと殆んど同じである，$f(z)$ と可換な函数 $g(z)$ をきめる方法を例によって説明する。ただし一般論としてはまだ何もいえていない。

例 1. $f(z) = e^z + z$ のとき，有限位数の整函数

$g(z)$ は (i) $z+c,\ e^c=1$ (ii) $e^z+z+2n\pi i$ (n は integer) である。

これは小林忠の結果で 数理解析研講究録348参照

例2. $f(z)=\int_0^z P(t)e^{t^q}dt$, $P(t)$: 次数 p の多項式.

$g(z)$ は $m(r,g)\leqq \sigma m(r,f)$ である $f(z)$ と可換な超越整函数ならば, $g(z)=\omega f(z)$, $\omega^q=1$.

ここで $m(r,g)$ は g の接近函数, σ は正の定数.

注意. $\omega=1$ はつねに起る. しかし $\omega=1$ 以外の 1 の q 乗根がつねに起るとは限らない。その例.

$$f(z)=\int_0^z t^2 e^{t^4}dt \text{ のときは } g(z)=f(z) \text{ or } -f(z) \text{ だけ.}$$

$$f(z)=\int_0^z t\, e^{t^3}dt \text{ のときは } g(z)=f(z) \text{ だけ.}$$

例3. $f(z)=(z-1)e^z/z$. $g(f(z))=f(g(z))$.

さらに $T(r,g)\leqq \sigma r/\pi$ なる正数 σ があるならば $g(z)=f(z)$. ここで $T(r,g)$ は g の特性函数.

例4. $f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)^{\mu_n}$, f の位数 <1.

$a_n>0$, $a_n\longrightarrow\infty$ $(n\longrightarrow\infty)$, $\{\mu_n\}$ は素数で $\mu_n<\mu_{n+1}$

$\mu_n \geqq 3$ をみたすとする. $f(g(z)) = g(f(z))$, $m(r, g) \leqq \sigma m(r, f)$ なる正数 σ があるならば, $g(z) = f(z)$.

以上の例はすべて $f(z)$ がある種の特徴をもっているものである。なんら特徴のない函数の場合には増大の状態に制限を付けても可換な函数を決定することは容易ではない。例えば

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, q\right),$$

$$E(x, q) = (1-x) \exp\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{q}x^q\right)$$

零点 $\{a_n\}$ の分布は全く一般的であり重複度はすべて1に等しい。

のときには全く手掛りがない。また一般論としては何もいえない。

つぎに例2の証明の概略をのべる。

$$f(g(z)) = g(f(z))$$

より, 微分して

$$f'(g(z))\, g'(z) = g'(f(z))\, f'(z).$$

この式によって

(1) $\quad P(g(z))\, e^{g(z)^{q}}\, g'(z) = g'(f(z))\, P(z)\, e^{z^{q}}.$

$\{w_j\}$ は $g'(z)$ の零点集合とする。 第二主要定理により

$$(s-1)(1+o(1))\, m(r,f) \leqq \sum_{1}^{s} \overline{N}(r, w_j, f) + O(\log r).$$

ここで $\overline{N}(r, w_j, f)$ は $|z| \leqq r$ 中の w_j 点の個数を重複度1として数えた個数函数. このとき $P(x_t)=0$ として

$$\begin{aligned} \text{右辺} &\leqq \overline{N}(r, 0, g') + \sum_{1}^{p} \overline{N}(r, x_t, g) \\ &\leqq m(r, g') + p\, m(r, g)\,(1+o(1)) \\ &\leqq (p+1)(1+o(1))\, m(r,g) + m(r, g'/g) \\ &= (p+1)(1+o(1))\, m(r,g) + O(\log r) \\ &\leqq (p+1+o(1))\, \sigma\, m(r,f). \end{aligned}$$

以上より

$$s-1 \leqq (p+1)\sigma.$$

これより $g'(z)=0$ の根の個数は有限である. よって

$$g'(z) = R(z)\, e^{L(z)}, \qquad L(0)=0$$

R, L は多項式で $\deg L = l \leqq q$.

(1) に代入して

(2) $\quad P(g(z))\, R(z) = R(f(z))\, P(z)\, e^{M(z)},$

(3) $\quad g(z)^{q} + L(z) = L(f(z)) + z^{q} - M(z) + 2n\pi i,$

ここで $M(z)$ は次数 $\leqq q$ の多項式で n は整数.

$f(z)$, $g(z)$ の $z=\infty$ のまわりでの漸近的な状況は良く知られている。これを使って (3) により $l=q$ がいえさらに $\longrightarrow\infty$ である sector は全く一致することが示される。$f(z)\longrightarrow\alpha_j \neq \infty$, $g(z)\longrightarrow\beta_j \neq\infty$ $j=1,\cdots,q$ である sector も一致する. この $\longrightarrow$ は共に非常に急速で多項式 $\longrightarrow\infty$ なる速度と区別出来る。このことを使うと

$$-L(f(z))+g(z)^{q}=c\ (\mathrm{const})$$

微分して

$$q\,g(z)^{q-1}\,g'(z)=L'(f(z))\,f'(z).$$

$f'(z)=P(z)\,e^{z^{q}}$ は有限個の zeros のみをもつから $f(z)-w$ は高々有限個の重複 zeros のみをもつ. そこで

$$L'(w)=q A_q (w-w_1)^{\nu_1}\cdots(w-w_j)^{\nu_j}$$

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_j=q-1$$

とおく. $j\geqq 2$ ならば $L'(f(z))f'(z)$ は位数 ν_1, ν_2 のどちらかの zeros を無限個有する. $g(z)$ もそうである. $g(z)^{q-1}g'(z)$ は位数 $q-1$ の無限個の zeros をもつ. これは $\nu_1+\nu_2\leqq q-1$ に反する. これより $j=1$. よって

$$L'(w)=q A_q (w-w_1)^{q-1}.$$

$$L(w) = A_q (w - w_1)^q + B$$

ゆえに

$$g(z)^q - A_q (f(z) - w_1)^q = D, \quad (D は定数).$$

$D \neq 0$ で $q \geq 3$ ならば Picard の uniformization theorem に反する。($y^q + X^q = 1$ の genus ≥ 1 if $q \geq 3$.)

$q = 2$ ならば

$$f(z) - w_1 = i\left(\frac{D}{A_2}\right)^{1/2} \sin H(z).$$

これは $f'(z)$ が有限個の zeros のみを持つことに反する。

以上より $D = 0$. これより

$$g(z) = A_q^{1/q} \omega (f(z) - w_1), \qquad \omega^q = 1.$$

これより

$$f'(A_q^{1/q} \omega (f(z) - w_1)) A_q^{1/q} \omega f'(z)$$
$$= A_q^{1/q} \omega f'(f(z)) f'(z)$$

となるから

$$P(A_q^{1/q} \omega (f(z) - w_1)) e^{A_q (f(z) - w_1)^q}$$
$$= P(f(z)) e^{f(z)^q}.$$

よって $N(z)$ を次数 $\leq q$ の多項式, s を整数として

$$P(A_q^{1/q} \omega (f(z) - w_1)) = P(f(z)) e^{N(z)}$$
$$A_q (f(z) - w_1)^q = f(z)^q - N(z) + 2s\pi i.$$

ここで $z \longrightarrow \infty$ のとき $f(z) \longrightarrow \alpha_j (\neq \infty)$ となる sector

で $z \longrightarrow \infty$ とすると $N(z) \longrightarrow \infty$ しかし

$$A_q(f(z)-w_1)^q, \quad f(z)^q$$

は共に有限値に近ずくから $N(z)$ の次数 $=0$ でなければ矛盾。よって $N(z)$ は定数。再び

$$A_q(f(z)-w_1)^q = f(z)^q + 2s\pi i + N$$

より $2s\pi i + N$ は定数 0 であることになる。

これは $g(z)^q = f(z)^q$ であることを示している。

同時に $A_q = 1$, $w_1 = 0$. そして $g(z) = \omega f(z)$,

$\omega^q = 1$.