数理解析研究所講究録
第 499 巻 1983 年 119-134

逆階乗級数で定義される関数の漸近展開とその応用

福原満洲雄 (Masuo Hukuhara)

1. 問題の提起

微分方程式の解法に役立つ特殊関数を常微分方程式の解の中に求めるという考えは古くからあったが，こういう観点から動く分岐点をもたない高階の微分方程式の検討に最初に手をつけたのは Picard であったと思われる．しかし，彼はこの問題の困難さを指摘するに止まった．それ故に，この障壁を乗越えた Painlevé の業績は高く評価された．

彼の仕事はその弟子達に受継がれたが，その活動は必ずしも活溌とは言い難い．近頃，日本では，Painlevé によって決定され，Gambier によって補充された方程式の研究が盛になった．そのこと自体それなりに結構なことである．だが応用上役立つ関数はそれのみではない．そのような例としてよくΓ関数が引合いに出される．これが代数的微分方程式の解にならないことは古くから知られている．

ここでさらに問題の察点に戻って考えてみよう。

新しく求められた超越関数が応用上役に立つためには、その性質がよく分って、使い易くなければならない。微分方程式の解析的理論は、Boutroux も指摘しているように、複素関数の理論と密接な関連の下に発展してきた。関数論では特に1価関数の取扱いが進んでいたから、微分方程式の解で、しかも1価となるものを求めようという考えが生まれて来る。これは自然な成行きであった。

1階の代数的微分方程式の一般解が1価になるとすれば、Riccati の微分方程式に代数的に帰着されるか、一般解が楕円関数で表わされることが Fuchs, Poincaré によって注意され、その証明の欠陥が Painlevé によって補われた。次に2階以上の微分方程式を問題とするようになるが、一般解が1価であるより前に、動く分岐点をもたない必十条件を満たす微分方程式の決定が大きな困難に遭遇したのである。

ところで、Γ関数が微分方程式の取扱いに重要な役割を果していることは周知の事実である。それが代数的微分方程式の解でないからといって、これを単なる例外として、この関数をもっと深く考察することを忽にすべきでない。

Γ関数が顕著な性質をもっていることは、それが関数方程式

(1) $$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

の解であり，有理型関数であるということにある.

(1)は最も簡単な差分方程式である. 差分方程式は，係数が有理関数であるという条件の下で，有理型関数を解にもつことが容易に示される. この事実に着目するならば，差分方程式は応用にも役に立つ，新しい超越関数の源泉にもなり得るであろう. このような見地から差分方程式を見直す余地があるように思われる.

2. 問題の設定

Γ関数が定積分

(2) $$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$$

で定義されることはよく知られている. これは $\mathrm{Re}\, x>0$ において広義一様収束であり，従って，そこでxの正則関数である. これが関数方程式(1)を満たしているから，この関係を使って，それが虚軸を越えて左に解析接続され，0, −1, −2, …… を1位の極とする有理型関数であることがいえるのである.

(2)による定義を形式的に拡張しようと思えば，方法はいろいろあり得るが，この関数が微分方程式の解にならないということが余りに強調され過ぎて，それが微分方程式によ

って定義されるものでないという印象を強く与え過ぎていることを見逃してはならない。

定積分として考える前に，不定積分

(3) $$F_x(t)=\int_0^t t^{x-1}e^{-t}dt$$

を考えれば，これは線形微分方程式

(4) $$tF''(t)-(x-1)F'(t)+F(t)=0$$

の解である。これに対して，$t=0$ は確定特異点，$t=\infty$ は不確定特異点である。それ故，$\Gamma(x)$ は $t=0$ において $x-1$ をべキ指数とする (4) の解の ∞ における値である，ということができる。このとき，x は微分方程式 (4) の係数の中に含まれる助変数である。

ここで漠然としているが，次のような問題が考えられる。

"線形微分方程式の確定特異点において，局所的に定義された解を解析接続して，他の特異点に達したとき，その点における解の値を，微分方程式の係数の中に含まれる助変数の関数と考えて，それが解析接続によって定義される範囲で，その性質を調べること。"

B関数

(5) $$B(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt$$

の場合には，不定積分は微分方程式

(6) $$y' = \left(\frac{p-1}{t} + \frac{q-1}{t-1}\right) y$$

の解で，この方程式は 0, 1 を確定特異点とする．積分の収束条件は

$$\mathrm{Re}\, p > 0 \,, \quad \mathrm{Re}\, q > 0$$

であり，この範囲で (5) の右辺は p, q の正則関数を表わし，それを解析接続することによって $B(p, q)$ が定義される．それ故，これも我々が設定した問題の範疇に属する．

3. 関数の有限部分

前述のように設定された問題では，不定積分として定義される関数の特異点における値をどう考えたらよいかという問題がある．無暗に一般的に考えることは問題を発散させるだけで得策ではない．我々が考えている特異点は確定特異点，不確定特異のどちらかである．後者の場合には，有限な極限値があるような方向から特異点に近づく場合を考え，その極限値をもって，そこにおける関数の値と考えればよい．Γ関数はこの場合である．ところが，前者の場合には，有限な極限値が存在するか否かは，特異点に近づく方向には依存しない．この場合には，その点における有限部分を次のように定義する．

$(x-a)^\lambda (\log(x-a))^m$ と a において 0 とならない正則関数 $\varphi(x)$ との積

(7) $$f(x)=(x-a)^\lambda(\log(x-a))^m\varphi(x)$$

は a を単純な確定特異点とするといい，λ を a における特性べキ指数という．ただし，λ が 0 または正の整数で，$m=0$ ならば，この関数は a において正則，λ が零点としての位数である．$m=0$ で，λ が負の整数ならば，a は この関数の一次位の極である．この二つの場合には，$f(x)$ は a において有理型であるという．

$f(x)$ が a を確定特異点とするということは，a を単純な確定特異点とする関数 $f_1(x), \cdots\cdots, f_m(x)$ と a において有理型な関数 $f_0(x)$ の和として

(8) $$f(x)=f_0(x)+f_1(x)+\cdots\cdots+f_m(x)$$

のように表わされることを意味する．このとき $f_0(x)/(x-a)$ の a における留数を $f(x)$ の a における有限部分と定義し，記号では，これを

(9) $$\ulcorner f(x)\lrcorner^{x=a} \quad あるいは \quad \ulcorner f(x)\lrcorner^{a}$$

で表わす．

a を確定特異点とする関数 $f(x)$ を道 L に沿って解析接続し，b に達したとき，b がその確定特異点ならば，$f(x)$ の a, b における有限部分の差を

(10) $$\text{「}f(x)\text{」}_a^b = \text{「}f(x)\text{」}^b - \text{「}f(x)\text{」}^a$$

で表わす. この値を, 道 L に沿っての $f(x)$ の有限部分という. もし b が $f(x)$ の不確定特異点ならば, $\text{「}f(x)\text{」}^b$ は $f(x)$ の L に沿っての b における極限値を表わすものとする.

$\text{「}f(x)\text{」}_a^b$ は道 L に依存するが, それぞれの場面に応じて, どのような道に沿って解析接続しているか分るので, 道 L は明示しない, というより, 必要ならば, 説明の中で分るようにしておく.

このように定義された有限部分は, ふつう発散積分の有限部分といわれているものの拡張になっている. この発散積分の有限部分という概念は Hadamard の発想であり, さらに発展して Schwarz の超関数となり, 関数解析の分野で重要な役割を果していることはよく知られているが, この概念を常微分方程式の解析的理論に活用することは余り考えられていないようである.

有限部分の線形性, すなわち α, β を定数とすれば

(11) $$\text{「}\alpha f(x)+\beta g(x)\text{」}^a = \alpha\text{「}f(x)\text{」}^a + \beta\text{「}f(x)\text{」}^a$$

が成立つことは明らかであろう. もし $f(x)$ が助変数 ρ を含むならば, これを $f(x,\rho)$ とも書くから, x の関数としての有限部分であることを明示したければ,

$$\text{「}f(x,\rho)\text{」}^{x=a}$$

と書かねばならない. そのとき, 積分記号下の微分公式は

$$(12)\qquad \frac{\partial}{\partial p}\left[f(x,p)\right]^{x=a}=\left[\frac{\partial}{\partial p}f(x,p)\right]^{x=a}$$

のように拡張される.

4. 差分方程式の役割

特に線形の場合には, 常微分方程式と差分方程式とは, Laplace 変換, Euler 変換, Mellin 変換などで, 一方から他方へ移り得ることがよく知られている. 必然的にこの両者間には密接な関係がある.

微分方程式については, 過去において多くの研究があり, それが差分方程式にも影響して類似な事実を探求することが行われた. 例えば, 微分方程式の解の漸近展開の研究は Poincaré に始まり, その結果はさらに拡張されていったが, それと類似な結果を差分方程式に拡張することは Birkhoff, Trjitzinsky 等によって行われた.

微分方程式の場合には, 線形であっても, 特異点のまわりで1価とならないのがふつうであるから, 差分方程式の解が1価であることは注目すべきであろう.

超幾何型線形微分方程式の場合に, これに p を助変数とする Euler 変換を行って得られる線形微分方程式の解の接続係数を p の関数と考えると, 比較的簡単にそれが満たす差分方

程式が得られる．これは昨年度の研究集会で報告した．

また，大久保の研究では，微分方程式のべき級数解の係数をきめる漸化式において，正の整数値のみをとる番号 n を複素変数として得られる差分方程式の解の漸近展開を利用して，主要解の行列式の値をもとめている．

以上の考察からも，差分方程式の研究が微分方程式の研究に重要な意味をもつことが理解される．

5．逆階乗級数の漸近展開．

微分方程式の場合には，特異点を中心とする形式的べき級数解を利用するのがふつうであり，また，それが適切なのであるが，差分方程式の場合には，べき級数解より逆階乗級数解すなわち

$$(13) \qquad y(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \big/ \Gamma(x+\alpha+\nu+1)$$

のような級数解を利用する方が適切であろう．

逆階乗級数を利用する方が有利である理由は，差分方程式の場合には形式解をもとめる計算に適していることもあるが，その収束域が半平面であって，その和として表わされる関数が ∞ で正則であることを必要としない点にもある．x^{-1} のべき級数は，それが 0 でない収束半径をもてば，その和は ∞ において正則となるから，∞ を特異点とする解に対して，べ

キ級数解は漸近展開とはなっても，収束にはならない．これに反して，逆階乗級数は，それが収束な範囲で，その和が∞を特異点とする解になり得る．しかも，その一般項は項の番号が増すと共に高位の無限小となって，漸近展開としての意味も有する．

また，今回の秋季総合分科会では次の事実を報告した；

0でない収束半径をもつべキ級数

(14) $$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots+a_\nu x^\nu+\cdots\cdots$$

が与えられたとき，

(15) $$f_\alpha(x)=x^\alpha f(x)$$

に Riemann-Liouville 積分を行い，これを

(16) $$(I_0^\rho f_\alpha)(x)=\frac{1}{\Gamma(\rho)}\int_0^x(x-t)^{\rho-1}f_\alpha(t)dt$$

と書く．形式的に項別積分を行えば；

(17) $$(I_0^\rho f_\alpha)(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu x^\nu\frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\rho+\alpha+\nu+1)}$$

となり，xに関してはべキ級数，ρに関しては逆階乗級数になる．xのべキ級数として収束半径はρに無関係であり，収束円内で考えるならば；$\mathrm{Re}\,\rho\to+\infty$のとき(17)は漸近展開としての意味をもつ．これは当然のことといってよいが，(14)の収束円外でも(17)は漸近展開として有効である．

このことをもっと詳しく説明すれば次のようになる。

$f(x)$ の 0 を中心とする星状正則域 すなわち $0, x$ を結ぶ線分上で，x まで含めて，$f(x)$ が正則であるような x の集合 $\mathfrak{D}$ において，$\mathrm{Re}\,\rho \to +\infty$ のとき，(17) の右辺は $x \in \mathfrak{D}$ に関して広義一様に左辺の漸近展開となる。

証明には Cauchy の積分表示を利用する。

この結果を利用すれば，大久保が仮定した pentagonal condition は不用となる。なぜなら，この仮定は，各特異点におけるべき級数解がその収束円の内部で $\mathrm{Re}\,\rho \to +\infty$ のとき解の漸近展開となることを利用するため，主要解を表わすべき級数の収束円が空でない共通部分をもつ，というために導入されたものだからである。

6. 接続問題への応用

$f(x)$ の星状正則域 $\mathfrak{D}$ の頂点 b が $f(x)$ の確定特異点である場合を考える。このとき，$(I_0^\rho f_\alpha)(x)$ も b を確定特異点とする。その b における有限部分は ρ の関数となるが，展開式 (14) は b においても，$(I_0^\rho f_\alpha)(x)$ の有限部分をとることにより，漸近展開としての意味をもつ，すなわち $\mathrm{Re}\,\rho \to +\infty$ のとき漸近展開

$$(18) \qquad \ulcorner (I_0^\rho f_\alpha)(x) \lrcorner^{x=b} \simeq \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu b^\nu \frac{\Gamma(\alpha+\nu+1)}{\Gamma(\rho+\alpha+\nu+1)}$$

が成立つ．

これを証明するには，Hadamard の Thèse 以後発展した Taylor 級数で定義される関数の星状正則域の頂点，すなわち中心から出る半直線上にあって，中心に最短距離にある $f(x)$ の特異点における関数の order に関する結果を利用する．

必ずしも超幾何型でなくてもよいが，話を分り易くするため，線形微分方程式

$$(19)\qquad p_n(x)y^{(n)}+p_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots\cdots+p_0(x)y=0$$

が超幾何型であるとする，すなわち (19) は Fuchs 型で，$p_n(x)$ は丁度 n 次の多項式，$p_k(x)$ は高々 k 次の多項式とする．

Euler 変換 $z=\mathcal{E}^{\rho}y$ を行って得られる微分方程式

$$(20)\qquad q_n(x,\rho)z^{(n)}+q_{n-1}(x,\rho)z^{(n-1)}+\cdots\cdots+q_0(x,\rho)z=0$$

も超幾何型であり，特に

$$(21)\qquad q_n(x,\rho)=p_n(x)$$

であり，(19)，(20) の特異点は一致している．その一つの特異点 a において単純な確定特異点をもつ (19) の解 —— そのベキ指数は整数でないとする —— を $\varphi(x)$ とすれば，

$$(22)\qquad \psi(x,\rho)=(I_0^{\rho}\varphi)(x)$$

は (20) の解で，a を単純な確定特異点とし，そのベキ指数は $\alpha+\rho$ である．(19) の特異点 b は $\psi(x,\rho)$ の確定特異点

でもある.

bが$p_n(x)$のm位の零点ならば, (20)はbにおいて$n-m$個の正則解をもち, それらは$z, z', \cdots, z^{(n-m-1)}$の$b$における値を与えることによってきまる. 特に$z^{(j)}(b)=1$ $(0 \leqq j < n-m)$を除いて$z(b), \cdots, z^{(n-m-1)}(b)$が$0$となる解を$\Phi_j(x,\rho)$と書く. ρに特別な値を与えなければ, $\psi(x,\rho)$のbにおける正則部分は$\Phi_j(x,\rho)$ $(j=0, 1, \cdots\cdots, n-m-1)$の1次結合であるから, それを

$$c_0(\rho)\Phi_0(x,\rho)+c_1(\rho)\Phi_1(x,\rho)+\cdots\cdots+c_{n-m-1}(\rho)\Phi_{n-m-1}(\rho)$$

と書く, $\psi(x,\rho)$のbにおける有限部分は$c_0(\rho)$であるから, $c_0(\rho)$の$\mathrm{Re}\,\rho \to +\infty$に対する漸近展開が得られる.

漸近展開が項別微分できることを利用すれば, xで項別微分を行うことにより, $c_1(\rho), \cdots\cdots, c_{n-m-1}(\rho)$の漸近展開も得られる.

接続係数をρの関数とみなしたとき, それが満たす差分方程式が求まっている. その解である$c_0(\rho), c_1(\rho), \cdots\cdots, c_{n-m-1}(\rho)$の$\mathrm{Re}\,\rho \to +\infty$に対する漸近展開も分るのであるから, そのような差分方程式の解の性質を調べることが接続問題に重要な意味をもつことになる.

7、差分方程式の解の性質

Γ関数については, 古くからStirlingの公式が知られてい

3. さらに複素関数論的手法により，$\log\Gamma(x)$ が次のように表わされることが知られている．

$$(23)\quad \begin{cases} \log\Gamma(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\log x - x + \ln\sqrt{2\pi} + J(x), \\ J(x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{2k(2k-1)x^{2k-1}}. \end{cases}$$

ここで B_k は Bernoulli 数である．漸近展開は

$$(24)\qquad |\arg x| < \pi - \varepsilon, \quad x \to \infty$$

のとき有効である．$\varepsilon > 0$ はいくら小さくてもよい．

$$(24)'\qquad |\arg x - \pi| < \pi - \varepsilon, \quad x \to \infty$$

のとき有効な漸近表示を求めるには，等式

$$(25)\qquad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

を利用すればよい．

$$(26)\qquad g(x) = 1/\Gamma(1-x)$$

は差分方程式

$$(27)\qquad g(x+1) = -x\,g(x)$$

の解になっている．

Γ関数について知られているこのような事実が，一般にどの程度まで，差分方程式の解に拡張できるかが問題である．

連立差分方程式をベクトル記号で

$$(28) \qquad y(x+1) = A(x)\, y(x)$$

あるいは

$$(28)' \qquad y(x-1) = A(x)\, y(x)$$

のように書く．y は n ベクトル，A は $n\times n$ 行列で，$A(x)$ は ∞ を極または正則点とする x の関数とする．

m は正または負の整数とし，

$$y(x) = \Gamma(x)^m z(x)$$

とおけば，(28) は

$$z(x+1) = x^{-m} A(x)\, z(x)$$

に変換されるから，m を適当に選ぶことにより，$A(x)$ は ∞ において正則かつ $\neq 0$ としても一般性を失わない．

(28)$'$ についても同様なことがいえる．

また，(28) を $y(x)$ で解いて，x を $x-1$ で置換えるか，または，(28) で x を $-x$ で置換え，$y(-x)$ を改めて未知関数 $y(x)$ とすれば，(28)$'$ のようになる．もちろん，$A(x)$ はそれに応じて変形されるが，(28)，(28)$'$ は本質的には同じものである．

$A(x)$ が x の有理関数であるとすれば，展開式を

$$A(x) = A_0 + x^{-1}A_1 + \cdots\cdots + x^{-\nu}A_\nu + \cdots\cdots \qquad (A_0 \neq 0)$$

としても一般性を失わないことが，以上の所論によって分る．特殊な条件をつけなければ，$\lambda^x x^\rho$ と x^{-1} のべき級数の積

として表わされる形式解が n 個求められる。(28), (28)' に対して、これを漸近展開とする解の存在もいえる。このことに注意すれば、(25) のような等式も一般化される。

このようにして、差分方程式の解の性質が次才に明らかにされる見込みがある。線形微分方程式、特に超幾何型の場合に、その接続問題の解決に差分方程式はかなり有効な手段を提供すると思われる。

ついでであるが、超幾何型というと特殊な場合のように見えるかも知れないが、一般の有理関数係数の線形微分方程式は、超幾何型から特異点の合流によって得られるものであるから、特異点の合流が解の性質にどのような影響を与えるかを詳しく追求することが、次の問題となるであろう。