数理解析研究所講究録
第 499 巻 1983 年 143-152

Cauchy's Functional Equation in Number Theory.

C. N. R. S., 早大　J.-L. Mauclaire
明治学院大　村田 玲音

この集会は，特殊関数方程式——特定の形の関数等式を満たす関数を求める問題——を様々な分野からながめようとの主旨であったので，我々は整数論，特に数論的関数の解析的研究の立場から参加した。ここで，数論的関数とは，$\mathbb{N}\cup\{0\}$ 上で定義された複素数値関数のことをいう。$\mathbb{N}$という離散的な集合上で定義されている為，同じく関数方程式 $f(m\cdot n)=f(m)+f(n)$ といったものを考えても f が $\mathbb{R}$ 上の連続関数である場合とは違ったとりあつかいが必要になる。

本稿では，関数方程式 $f(mn)=f(m)+f(n)$，或は $f(mn)=f(m)\cdot f(n)$ によって数論的関数の形がどの程度まで決定できるか？　という方向の問題をとりあつかう。ここに書く内容，特に §2 は，1981 年 12 月に，この数解

研で「数論的関数の特徴付けの問題」という題名で我々が話したものと、かなり重なり合うので、ここでは証明は省き、結果を中心に書いてゆきたい。証明等について興味のある方は文献［8］を参照して頂きたい。

§1. 加法的関数.

上記の問題の発端は、以下に挙げる Shannon の結果であろう。Shannon は確率論的、或(あるい)は情報理論の研究から次の定理を得た（［1］）：

定理（Shannon）　数論的関数 $f(n)$ が、条件

$$(*) \qquad f(mn) = f(m) + f(n) \qquad \forall m, n \in \mathbb{N}$$

をみたし、更に $f(n+1) \geq f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(1) \geq 0$ であるなら、$f(n) = c \cdot \log n$ （c: positive constant）。

さて、この定理の中に現われた関数等式(*)をみたす数論的関数は「各素数に於る f の値を決めてやれば、$f(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ がすべて決まってしまう」性質を持っている為、度々(しばしば)整数の数論的性質と結びつき、解析数論の一つの重要な研究対象となっている。そこで次の定義を置く。

定義 1　(*) の性質を持つ数論的関数を完全加法的という。

定義 2. $m, n \in \mathbb{N}$ が $(m, n) = 1$ であれば常に $(*)$, 即ち $f(mn) = f(m) + f(n)$ をみたす時, f のことを加法的という。ただし (m, n) は m, n の最大公約数の意。

完全加法的な f の例としては上の $c \times \log$ の他にも沢山あって, 例えば n の素因数分解を $n = p_1^{e_1} \times \cdots \times p_r^{e_r}$ とする時 $\Omega(n) = e_1 + \cdots + e_r$ によって $\Omega(n)$ を定義すればこの $\Omega(n)$ は完全加法的である。又, $n = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ の時 $\omega(n) = r$ によって $\omega(n)$ を定義すれば, この $\omega(n)$ は加法的であって, 完全加法的ではない。

1946年に Erdös は [2] の中で Shannon の結果を大巾に拡げ, 次の結果を得た。

定理 (Erdös) 加法的関数 $f(n)$ が次の 1°) 或は 2°) を満たすなら $f(n) = c \times \log n$ となる。

1°) $f(n+1) \geqq f(n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2°) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (f(n+1) - f(n)) = 0.$

Erdös は同じ論文の中で, この問題に関連していくつかの予想を提出している。$f(n)$ が加法的である事は仮定しておいて, 更に

予想 1 : $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n \leqq x} |f(n+1) - f(n)| = 0$ なら $f = c \times \log$。

予想2： $f(n+1)-f(n)=O(1)$ なら $f(n)=\log n+O(1)$.

この2つの予想は Katai [3], Wirsing [4] によって共に肯定的に解決された。これらの結果を更に精密化したものもいくつか知られている(例えば Mauclaire [5])。上記の 1°), 2°), 予想1は、いずれも「加法的関数としての log を特徴付ける」結果である。この3つの定理の証明を見るといずれも証明を2つの steps に分ける事が出来る。

1st step： 与えられた条件から、$f(n)$ が完全加法的である事を導く。

2nd step： $f(n)=c\log n$ と書ける事を示す。

このうち、1st step の方が比較的易しいが、両者で全く違った方法を使わねばならず、色々な工夫が必要である。

§2. 乗法的関数

この§では、乗法的(multiplicative)と呼ばれる別の種類の数論的関数について述べる。§1の定義1, 2と極めて似た形の次の定義を置く。

定義3. 数論的関数 $f(n)$ が、条件

(＊＊) $$f(mn)=f(m)\cdot f(n) \qquad \forall m,n\in\mathbb{N}$$

を満たす時、この f のことを、完全乗法的であるという。

定義 4．　$m, n \in \mathbb{N}$ が $(m, n) = 1$ をみたすなら常に (**) が成り立つ時，f のことを乗法的という。

加法的と乗法的との違いは，(*) と (**) の違いである。従って，　exp（加法的関数）＝乗法的関数 になる。（かし，log の多価性がある為，この逆は一般には言えない。又，乗法性の為に，乗法的関数の値のバラツキは，加法的関数に比べるとかなり激しい。こうした事情を反映して，乗法的関数に対しては，加法的関数の場合の様な「特徴付け問題」が殆んど研究されていない。我々がこの問題に関して得た結果は，主に次の２つである。

定理 1 （cf．［6］）　S を密度 0 である様な $\mathbb{N}$ の部分集合とする（ S の密度が 0 とは，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \#\{n ; n \in S, n \leq x\} = 0$ の意味）。この時，$f(n)$ が乗法的，かつ $|f(n)| = 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

更に　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leq x \\ n \notin S}} |f(n+1) - f(n)| = 0$　であるなら，

f は完全乗法的である。

定理 2 （cf．［7］）　f を乗法的関数とする。次の条件 I), II), III) を満たす，単調増加な正値関数 $g(x)$ が存在するとする：

I)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$　，　$g(2x) = O(g(x))$．

II) $\lim_{x\to\infty} g(x)^{-1}\sum_{n\leq x}|f(n+1)-f(n)| = 0$,

III) $\limsup_{x\to\infty} g(x)^{-1}\left|\sum_{n\leq x} f(n)\right| > 0$.

この時. $f(n)$ は完全乗法的で，更に適当な $\lambda \geqq -1$ を用いて， $|f(n)| = n^{\lambda}$ と書く事が出来る。

この定理 2 の系として，次の結果を得る（cf [7]）。

<u>系.</u> f は乗法的とし，次の I′), II), III′) をみたす. 単調増加・正値関数 $g(x)$ が存在するとする。

I′) $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(dx)}{g(x)} = h(d)$ が $\forall d\in\mathbb{N}$ に対して存在する。

II) （定理 2 の II) と同じ）

III′) $\lim_{x\to\infty} g(x)^{-1}\left(\sum_{n\leq x} f(n)\right) = M$ が存在し, $M \neq 0$.

この時. $f(n)$ の形は完全に決って, $f(n) = n^{\lambda}$, $\lambda\geqq -1$。

乗法的関数の特徴付けの問題を考える際には. 加法的関数の場合の事も考え合わせて, n^{c} $(c\in\mathbb{C})$ の特徴付けが最初の問題となる。この問題を考える時にも. §1 の末尾に書いたように. 問題を 2 steps に分けて考えた方がよい。ただその際, 問題なのは. 2nd step で解かねばならない,

「$f(n) = n^c$ と書ける事を示す」部分に、良い方法がない事である。この為，我々の2つの定理は、いずれも、1st step の段階までしか達していない。定理2の系では、I′)，III′）によって，$f(n)$ が正値である事が証明でき，従って log をとって加法的関数の理論に帰着できるのである。

ここで，我々の解き残した問題を3つ挙げておく。いずれも、2nd step の，形を決める段階に属する問題である。

問題 1　　f を乗法的とし，$|f(n)| = 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)，更に

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} |f(n+1) - f(n)| = 0 \quad \text{であるなら，}$$

$f(n) = n^{it}$ ($t \in \mathbb{R}$) である。

問題 2　　S は定理1に挙げたものとする。f が加法的で

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{n\le x \\ n\notin S}} |f(n+1) - f(n)| = 0 \quad \text{であるなら，}$$

$f(n) = c \log n$ である。

問題 3　　a を2以上の自然数，ε を $+1$ 又は -1 のいずれかにとって固定する。f が加法的関数で

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\le x} |f(an+\varepsilon) - f(n) - f(a)| = 0$$

であるなら，$f(n) = c \log n$ である。

最後に、上記の定理2，及びそのあとの系で用いた仮定に関連して，2，3 註を付けておきたい。

<u>註 1.</u>　$g(x)$ に関する仮定 I′)，$\lim_{x\to\infty}\frac{g(dx)}{g(x)} = h(d)$ $(\forall d \in \mathbb{N})$，について。

$g(x)$ の他の性質，$g(x) \nearrow$，$g(x) \geqq 0$，$g(x) \to +\infty$ 等を用いるとこの I′) から，

$$g\left(\frac{u}{v}x\right) = \left\{\frac{h(u)}{h(v)} + o(1)\right\} \cdot g(x) \quad (\forall u, v \in \mathbb{N}^{\times})$$

を得る。従って，$\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+}$ に対して $h(\lambda)$ を定義する事が出来て，

$$g(\lambda x) = \{h(\lambda) + o(1)\}\, g(x) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+}),$$

即ち，

$$\frac{\log g(\lambda x)}{\log g(x)} = 1 + o(1) \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}^{+}).$$

ここに現われた条件，$\frac{G(\lambda x)}{G(x)} \sim 1$，をみたす関数のことを <u>slowly-oscillating function</u> と呼び，こうした関数については，かなり詳しい事が分っている（例えば [9]）。

<u>註 2.</u>　やはり条件 I′) について。

ここでは，$\forall d \in \mathbb{N}$ に対して $\lim_{x\to\infty} g(dx)/g(x)$ の存在を仮定したが，これは次の様にゆるめる事が出来る。

I″) 乗法的に独立な或る2つの自然数 $a, b \geqq 2$ に対して
$\lim_{x\to\infty} g(ax)/g(x) = h(a)$，$\lim_{x\to\infty} g(bx)/g(x) = h(b)$ が存在

する。(ここで、a と b とが乗法的に独立であるとは、$\log a$ と $\log b$ とが $\mathbb{Z}$ 上一次独立なことをいう。)

<u>註 3</u>　定理 2 の条件 I) について。

$g(2x) = O(g(x))$ とは $|g|$ が余り極端に大きくならぬ事を保証する為の仮定である。この仮定より直ちに

$$^{\exists}x_0,\ \text{s.t.}\ ^{\forall}x \geqq x_0 \text{ で } g(2x) \leqq M \cdot g(x)$$

なる $M > 0$ の存在が言えるが、この M を用いて、上の仮定より次が導ける。

$$|g(x)| \leqq c \cdot x^{\alpha}, \quad \alpha = \log M / \log 2, \quad c > 0.$$

(以上)

References.

[1]. A. Renyi: Probability Theory, North-Holland Applied Mathematics and Mechanics Vol. 10, Chap. IX.

[2]. P. Erdös: On the distribution function of additive functions, Ann. of Math., Vol. 47, No. 1 (1946) pp. 1 - 20

[3]. I. Katái: On a problem of P. Erdös, Journal of Number Theory, Vol. 2 (1970) pp. 1 - 6

[4]. E. Wirsing: A characterization of log n as an additive arithmetical function, Symposia Mathematica, Vol IV pp. 45 - 57 (1968/69)

[5]. J.-L. Mauclaire: Sur certaines fonctions arithmétiques, Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU, (1976/77) No. 26, 7 P.

[6]. Mauclaire-Murata: On the regularity of arithmetic multiplicative functions. I, Proc. of the Japan Acad. Vol. 56 Ser. A, No. 9 (1980) pp. 438 - 440

[7]. Mauclaire-Murata: ____________. III, ibid. Vol. 57 Ser. A, No. 6 (1981) pp. 335 - 336

[8]. Mauclaire, Murata: 数論的関数の特徴付けの問題, 数理解析研究所講究録 Vol. 456, pp. 111 - 122

[9]. J.Korevaar, T.van Aardenne-Ehrenfest, N.G.de Bruijn: A note on slowly oscillating functions, Nieuw Arch. Wiskunde (2), Vol. 23 (1949) pp. 77 - 86