数理解析研究所講究録
第499巻 1983年 162-165

ワイエルシュトラウスの関数のみたす関数方程式.

京大理 山口 昌哉
京大理 畑 政義.

1875年にワイエルシュトラウスが発見した，到るところ微分が不可能な連続関数：

$$W(a, b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

について，簡単のために $b=2$ の場合を考えて見よう。一般の a, b （実の定数）について $ab \geq 1$ の場合にはこの関数は $[0, 1]$ で連続且つ到るところ有限な微係数をもたないことが $0 < a < 1$ の仮定のもとに G. H. Hardy によって証明されている。$b=2$ の場合は $\frac{1}{2} \leq a < 1$ であるような a についてこの条件はみたされている。

一方 $\varphi(x) = 2x$ $(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$，$\varphi(x) = 2(1-x)$ $(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$ として $[0, 1]$ 区間の連続関数を定義しておけば，上の関数は

次の(1)と同じものとなる。

$$(1)\qquad F(a,x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi\varphi^n(x))$$

ここで $\varphi^n(x)=\varphi(\varphi(\cdots\cdots))$ つまり φ の n 回繰返えし代入であり、$n=0$ では、$\varphi^0(x)=x$ としておこう。このように書いて見れば、この F は次のような簡単な関数方程式をみたすことは見易い。

$$(2)\qquad F(a,x)=aF(a,\varphi(x))+\cos\pi x.$$

そこでこのことを一般化して、

$$(3)\qquad F(a,x)=aF(a,\varphi(x))+g(x)$$

ただし $g(x)$ は有界な関数としておけば、この方程式の解は

$$(4)\qquad F(a,x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^n g(\varphi^n(x))$$

とかけて、少し一般的な関数がえられる。$g\equiv\cos(\pi x)$ とすればもとのワイエルシュトラウスになるが、$g(x)=x$ とし更に $F(a,x)-x=\sum_{n=1}^{\infty} a^n\varphi^n(x)$ とおくと、$a=\frac{1}{2}$ のとき、高木貞治が1903年に発見した簡単なしかし

ワイエルシュトラウスの関数と同じ関数的性質をもつものとなる。非常に人工的ではあるが，(3)は次のような初期値問題としてもかける。

$$
(5)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = \dfrac{\partial}{\partial a}\{aF(a, \varphi(x))\} \\ F(0, x) = g(x). \end{cases} \qquad 0 \leq a < 1.
$$

初期関数 $g(x)$ として滑らかな関数をもってきても，aがある値（上の二つの例では $a=\frac{1}{2}$）をこえたとき，解$F(a,x)$はxに関し連続で且つ到るところ微係数がないとなる。

$\varphi(x)$のかわりに $\psi(x) = 2x$ $(0 \leq x \leq \frac{1}{2})$，$\psi(x)=$ $(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$ を用いても同様なことがいえる。今(3)において，$a=\frac{1}{2}$ とおき $g(x)=\frac{\varphi(x)}{2}$ とおくと高木関数がえられるが，De Rahm は1957年に次のような関数方程式の解を考えた。ただしαは $0<\alpha<1$ とする。

$$
(6)\quad \begin{cases} F(x) = \alpha F(2x) & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}) \\ F(x) = (1-\alpha)F(2x-1) + \alpha & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1) \end{cases}
$$

この書き方でかけば，高木関数の方程式は，$T(x)$とすると，

$$
(7)\quad \begin{cases} T(x) = \frac{1}{2}T(2x) + x \\ T(x) = \frac{1}{2}T(2(1-x)) + 1-x \end{cases}
$$

(6) の解を $M_\alpha(x)$ と書くことにするが，これは有名なルベックの特異関数であって，ほとんど到るところ導関数は0で且つ狭い意味の単調増加関数である。ところで面白いのはこの二つの関数 $M_\alpha(x)$ と $T(x)$ とがきれいな関係で結ばれていることである。その関係は次の(8)である：

$$(8) \qquad \left.\frac{\partial M_\alpha(x)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\frac{1}{2}} = 2T(x)$$

この関係をみちびくためには，$M_\alpha(x)$ は

$$(9) \qquad M_\alpha\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) = (1-\alpha)M_\alpha\left(\frac{i}{2^k}\right) + \alpha M_\alpha\left(\frac{i+1}{2^k}\right)$$

$$0 \leq i \leq 2^k-1, \qquad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

$T(x)$ は

$$(10) \qquad T\left(\frac{2i+1}{2^{k+1}}\right) = \frac{1}{2}T\left(\frac{i}{2^k}\right) + \frac{1}{2}T\left(\frac{i+1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$0 \leq i \leq 2^k-1, \qquad k = 1, 2, \cdots\cdots$$

という，それぞれ差分方程式の無限系列をみたす。この事実から上の(8)が示される。

以上