

関数方程式の確率分布論への応用

統計数理研 清水良一 (Ryoichi Shimizu)

与えられた性質をもつ確率分布を決定することが問題である。多くの場合、その性質は分布関数 $F(x) = P\{X \leq x\}$ あるいは特性関数 (以下 ch. f. と略す) $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$ などに関する方程式として記述される。これらの関数は、一定の条件を満たさなければならないから、問題はある種の制約条件付きの関数方程式に帰着する。以下にいくつかの例をあげる。

§1. $X = (X_1, X_2, X_3)$ は 3 次元空間を運動する粒子のある時刻における速度を、直交座標系 $\Sigma = (0; e_1, e_2, e_3)$ について表示したものとし、次のことを仮定する。

a) X_1, X_2, X_3 は互いに独立で、同じ分布 F に従う確率変数である。

b) Σ と異なる座標系 $\Sigma' = (0; e'_1, e'_2, e'_3)$ があって、 X の e'_1, e'_2 への射影 Y_1, Y_2 が互いに独立である。

このとき、 X_j の分布 F について何がいえらるだろうか？

この問題は、分布 F の ch. f. $\varphi(t)$ を使って記述することができるが、これを次のようにもっと一般化しておく。 $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ は ch. f., $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$ は 0 でない実数の組とする。
方程式

$$(1) \quad \prod_{j=1}^n \varphi_j(a_j u + b_j v) = \prod_{j=1}^n \varphi_j(a_j u) \prod_{j=1}^n \varphi_j(b_j v),$$

を考える。上記の条件 a), b) はこの方程式のある特別な場合と同等である。これはいわゆる *Cauchy's equation* の一種で、これから

$$\prod_{j=1}^n \varphi_j(a_j t) = \exp\{Q(t)\},$$

を導くことができる。ただし Q は高々 n 次の多項式である。 a_j が他の a と異なるなら、 $\varphi_j(t)$ 自身がこの形に書けるが、一般の場合に $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ を決定するためには、ch. f. に関する次の定理を必要とする。

定理 1 ([4]). $\varphi(t) = \exp\{\text{多項式}\}$ が ch. f. なら、この多項式は 2 次式で、 $\varphi(t)$ は正規分布の ch. f. である。

定理 2 ([1]). $\varphi(t), \psi(t)$ が共に ch. f. で、かつ $\varphi(t) \cdot \psi(t)$ が正規分布の ch. f. なら、 $\varphi(t), \psi(t)$ はともに正規分布である。

かくして、関数方程式 (1) の解は、

$$\varphi_j(t) = \exp \left\{ i\mu_j t - \frac{1}{2}\sigma_j^2 t^2 \right\}, \quad j=1, \dots, n$$

とくに、条件 a), b) と満足する分布 F は正規分布である (2), (12), (3)).

§2. X_1, X_2, \dots, X_n が分布 F からの無作為標本で、 a_1, \dots, a_n は 0 でない実数とする。"一次統計量 $a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$ が X_1 と同じ分布に従う," という性質は F の ch.f. $\varphi(t)$ を使って、

$$(2) \quad \varphi(t) = \prod_{j=1}^n \varphi(a_j t)$$

と書くことができる。すぐ分るように、 F が一点に退化していなければ——すなわち、 $|\varphi(t)| \neq 1$ ならば—— $|a_j| < 1$, $j=1, \dots, n$ である。したがって、

$$(3) \quad |a_1|^\alpha + \dots + |a_n|^\alpha = 1,$$

を満足する $\alpha > 0$ が一意的に定まる。 $\alpha \leq 2$ であれば、指数 α の対称な安定分布の ch.f. $\varphi(t) = e^{-\lambda|t|^\alpha}$ が方程式 (2) を満足する。係数 a_j が定数でなく、 X_1, \dots, X_n と独立な確率変数であるとする——つまりが a_j がある確率空間 (Ω, \mathcal{A}, P) で定義された実数値関数とすると——解くべき方程

式は,

$$(4) \quad \varphi(t) = \int_{\mathbb{H}} \prod_{j=1}^n \varphi(a_j(\theta)t) dP(\theta).$$

である。このときは、関係式 (3) が確率 1 で成り立つことを仮定する。 $t=0$ の近傍で $\log \varphi(t)$ が定義されるから、 $\log \varphi(0) = 0$ となる枝を選べると、(4) は、

$$(5) \quad \varphi(t) = \int_{\mathbb{H}} \exp \left\{ \sum_{j=1}^n \log \varphi(a_j(\theta)t) \right\} dP(\theta)$$

となるが、これをさらに一般化して、方程式

$$(6) \quad \varphi(t) = \int_{\mathbb{H}} \exp \int_{-1}^1 |a|^{-\alpha} \log \varphi(at) \mathcal{V}(da; \theta) dP(\theta),$$

$$|t| < t_0 \equiv \sup \{ |t| \mid \varphi(u) \neq 0, u < |t| \}$$

を考察することができる。ただし、 $\{ \mathcal{V}(\cdot; \theta) \mid \theta \in \mathbb{H} \}$ は、有限区間 $(-1, 1)$ 上の確率分布の族である。この方程式を解くために、実数値関数 $H(x)$, $I(x)$ を

$$\log \varphi(e^{-x}) = H(x) + i I(x),$$

$$x > x_0 \equiv -\log t_0$$

によって定義する。(6) は、これを少し一般化すれば H および I に関する方程式として、

$$(7) \quad \exp \left\{ -e^{-\alpha x} (H(x) + i I(x)) \right\} =$$

$$\int_{\mathcal{H}} \exp\left\{-e^{-\alpha x} \left(\varrho_0 \int_0^{\infty} H(x+y) \tilde{U}_0(dy; \theta) + i \varrho_1 \int_0^{\infty} I(x+y) \tilde{U}_1(dy; \theta)\right)\right\} dP(\theta),$$

$x > x_0$

となる。ただし, $0 < \varrho_0 \leq 1$, $0 < \varrho_1 \leq 1$, また $\tilde{U}_0(x; \theta) = U_0^+(x; \theta) - U_0^-(x; \theta)$, と書けて, $U_0^+(x; \theta)$, $U_0^-(x; \theta)$ は x について非減少, かつ $\{U_0^+(x; \theta) + U_0^-(x; \theta) \mid \theta \in \mathcal{H}\}$ は $(0, \infty)$ 上の確率分布の族である。 \tilde{U}_1 も同様の関数である。(7) から, 不等式

$$(8) \quad \exp\{-e^{-\alpha x} H(x)\} \leq \int_{\mathcal{H}} \exp\left\{-e^{-\alpha x} \varrho_0 \int_0^{\infty} H(x+y) \tilde{U}_0\right\} dP(\theta)$$

が得られる。いま, $H(x)$ に関するゆるい *growth condition* と, 分布

$$G(x) = \int_{\mathcal{H}} (U_0^+(x; \theta) + U_0^-(x; \theta)) dP(\theta)$$

が平均値をもつことを仮定すると, (8) から $H(x)$ の有界性が得られる。これと, ch.f. $\varphi(t)$ の性質から, $I(x)$ の方も有界であることが導かれる (正確には, $\alpha \neq 1$ なら $I(x)$ が有界, $\alpha = 1$ なら, $I(x+u) - I(x)$ が任意に固定した u について有界)。そして, 方程式 (7) は誤差項を伴う関数方程式

$$(9) \quad H(x) = \varrho \int_0^{\infty} H(x+y) d(G_1(y) - G_2(y)) + R(x) \cdot H(x)$$

に帰着する。ただし $0 < g \leq 1$, G_1, G_2 は単調非減少関数で,
 $G_1(x) + G_2(x)$ が $(0, \infty)$ 上の分布関数, $R(x) = O(e^{-\alpha x})$ であ
 る。いまの場合, $H(x)$ は $g=1, G_2(x) \equiv 0$,

$$G_1(x) = \int_{\Theta} (\bar{U}_0^+(x; \theta) + \bar{U}_0^-(x; \theta)) dP(\theta)$$

とにおいて得られる方程式 (9) を, そして $I(x)$ の方は (9) にお
 いて $g=1, H(x) = I(x)$

$$G_1(x) = \int_{\Theta} \bar{U}_0^+(x; \theta) dP(\theta),$$

$$G_2(x) = \int_{\Theta} \bar{U}_0^-(x; \theta) dP(\theta)$$

とにおいて得られる方程式を満たすのである。かんたんのため,
 $V(x)$ が $0, \pm e^{-\rho}, \pm e^{-2\rho}, \dots$ に集中していないこと, したが
 って, $G_i(x)$ が格子 $0, \rho, 2\rho, \dots$ に集中していないことを
 仮定すると, (9) の解は

$$H(x) = \lambda + A(x)e^{-\alpha x},$$

と書くことができる。ただし λ は実定数 ($g < 1$ なら $\lambda=0$),
 $A(x)$ は有界な関数である ([8])。これを (7) に代入すると,
 両辺から λ を消去することができる。この議論を繰り返して
 使うと, 結局 $A(x) \equiv 0$ を導くことができる。したがって,

$I(x)$ は (7) から $H(x)$ の項をすべて除いて得られる方程式を満たすことになり, ほぼいまと同じ方法によって, $I(x)$ の方も定数であることが導かれるのである. もとの方程式 (4) にもどって,

$$(10) \quad P_r \{ \text{ある } i, j \text{ について } \log |a_i| / \log |a_j| = \text{無理数} \} > 0$$

を仮定すると, (4) の解は, 安定分布に限ること, とくに, $\alpha = 2$ の場合には (10) の仮定なしに $\varphi(t) = e^{i\mu t - \frac{\sigma^2}{2} t^2}$ が得られる.

§3. 方程式 (6), (7), あるいは (9) の確率分布論への応用は広い. そのいくつかをさらにあげる. ([3, 5-11]).

X_1, X_2, \dots は互いに独立で, 共通の分布 F に従う確率変数の列, $N (= 1, 2, 3, \dots)$ はこれらとは独立な変数で, $E(\log N) < \infty$ であるとする.

$$(X_1 + X_2 + \dots + X_N) / n^{1/\alpha}$$

が X_1 と同じ分布に従う, という条件は, F の ch.f. を使って,

$$(11) \quad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) \varphi^n(t/n^{1/\alpha}),$$

と表わされる. ただし $p(n) = P_r \{ N = n \}$ である. これは (6)

において $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, かつ V が一点に退化した場合に相当する. $\alpha \geq 2$ なら無条件で, また $0 < \alpha < 2$ なら, $\log N$ が格子 $0, \rho, 2\rho, \dots$ に集中していない, という条件のもとで, (11) の解は "trivial" なものに限る ([10]):

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \alpha > 2 \\ \exp\left\{-\lambda |t|^\alpha \left(1 + \beta \frac{t}{|t|} \tan \frac{\pi}{2} \alpha\right)\right\}, & 0 < \alpha \leq 2, \alpha \neq 1, \\ \exp\{i\mu t - \lambda |t|\}, & \alpha = 1, \end{cases}$$

ただし $\lambda > 0$, $|\beta| \leq 1$ である. この ch.f. は狭義安定分布と呼ばれる.

X は正の値をとる確率変数, $G_0(x)$ は右連続な単調非減少関数で, $G_0(0) = 0$, かつ $\mu \equiv E\{G_0(X)\} < \infty$ とする. $x \geq 0$ に対して

$$(12) \quad R(x) \equiv E\{G_0(X-x) | X > x\} - \mu,$$

とおく. $R(x) \equiv 0$ のとき, X (あるいはその分布 F) は G_0 に関する記憶をもたないという. 指数分布 $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ がこの性質をもつ. いま正の数 λ と分布 G_1 を

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} dG_0(x) = \mu,$$

および $dG_1(x) = \mu^{-1} e^{-\lambda x} dG_0(x)$ で定義し, $H(x) = (1 - F(x)) e^{\lambda x}$ とおく. (12) は (9) において, $G_2(x) \equiv 0$ とおいたものと同等である. G_0 の増加点が格子 $0, \rho, 2\rho, \dots$ に集中していなければ, したがって, G_1 が格子分布でなければ, そして, $|R(x)| \leq \varepsilon e^{-\delta x}$, であれば $H(x) = \text{const.} + A(x) e^{-\delta x}$ と書ける. これより

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} + \theta \cdot \varepsilon \cdot e^{-\lambda x}$$

と書けることを示すのはよいである. θ は G_0 と θ だけで定まる量である. X が "近似的に" G_0 に関する記憶をもたなければ, X の分布は指数分布に近いということになる.

REFERENCES

- [1] Cramér, H., Über eine Eigenschaft der normalen Verteilungsfunktion, *Math. Zeitschr.*, 41(1936), 405-414.
- [2] Darmais, G., Analyse generale des liaisons stochastiques, *Rev. Inst. Internationale Statist.*, 21(1953), 2-8.
- [3] Kagan, A.M., Linnik, Yu.V., and Rao, C.R., *Characterization Problems in Mathematical Statistics*, J. Wiley, 1973.
- [4] Marcinkiewicz, J., Sur une propriété de la loi de Gauss., *Math. Zeitschr.*, 44(1939), 612-618.
- [5] Shimizu, R., Characteristic functions satisfying a functional equation (I), *Ann. Inst. Statist. Math.*, 20(1968), 187-209.
- [6] Shimizu, R., Solution to a functional equation and its application to some characterization problems, *Sankhyā, A*, 40(1978), 319-332.
- [7] Shimizu, R., On a lack of memory property of the exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 31(1979), 367-372.

- [8] Shimizu, R., Functional equation with an error term and the stability of some characterizations of the exponential distribution, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 32(1980), 1-16.
- [9] Shimizu, R., On the stability of characterizations of the normal distribution, *Statistics and Probability: Essays in Honor of C.R. Rao*, Noth-Holland, 1981, 661-670.
- [10] Shimizu, R. and Davies, L., General characterization theorems for the Weibull and the stable distributions, *Sankhyā, A*, 43(1981), 282-310.
- [11] Shimizu, R. and Davies, L., On the stability of characterizations of non-normal stable distributions, *Statistical Distributions in Scientific Work*, 4(1981), D. Reidel, 433-446.
- [12] Skitovich, V.P., Linear forms in independent random variables and the normal distribution law, *Izvestiia AN SSSR., ser Mat.*, 18(1954), 185-200.