数理解析研究所講究録
第 504 巻 1983 年 38-53

Representations of harmonizable processes

東京電機大・理工　垣原祐一郎 (Yûichirô Kakihara)

1. 序

実数直線$\mathbb{R}$上のスカラー値確率過程に対し定常性の拡張としてLoéve [7] は調和可能性を導入し，Rozanov [16] は Loéve の定義より弱い条件の調和可能性を与えた。これらは Rao [13] により各々強および弱調和可能性と呼ばれた。これらの間の関係については Niemi [9] および Rao [14] によって解明された。一方 Bochner [3] は V-有界性を導入している。（弱または強）調和可能性と V-有界性の関係については Niemi [9]，Miamee and Salehi [8] および Rao [13, 14] によって考察された。更に（弱または強）調和可能過程の定常過程への拡大は重要な問題であり Abreu [1]，Niemi [11]，Miamee and Salehi [8] および Rao [14] によって考察された。

我々は Hilbert 空間値確率過程について上記の性質や問題を考察する。このために H を Hilbert 空間，$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を確率測度空間として Hilbert 空間 $L_0^2(\Omega : H)$ を考える。$L_0^2(\Omega : H)$ は Ω 上の H-値

強確率変数で平均0およびμに関して二乗可積分なものの全体である。そこで$\mathbb{R}$上の$L_0^2(\Omega:H)$-値過程に弱および強調和可能性，V-有界性などを導入し，スカラー値の場合と同様の結果を得る。

2節では空間$L_0^2(\Omega:H)$の *normal Hilbert* $B(H)$-*module* としての性質を述べる。ここに$B(H)$はH上の有界線形作用素の全体である。さらに一般の *normal Hilbert* $B(H)$-*module* の性質にも触れる。3節では$L_0^2(\Omega:H)$-値測度と$T(H)$-値両測度（*bimeasures*）について述べる。これらの測度に対して変分（*variation*），半変分（*semivariation*）および作用素半変分（*operator semivariation*）を導入し，それらの間の関係を調べる。ここに$T(H)$はH上の *trace class* 作用素の全体である。最後に4節において$\mathbb{R}$上の$L_0^2(\Omega:H)$-値過程について考察する。まず連続過程（*continuous process*）に対してグラム直交列表現（*Gramian orthogonal series representation*）が可能なことを述べる。次に弱および強調和可能性（*weak and strong harmonizabilities*）を定義し，任意の弱調和可能過程はある強調和可能過程の列で近似されることを述べる。またV-有界性（V-*boundedness*）を定義し，$\mathbb{R}$上の過程が弱調和可能であることの必要十分条件がV-有界かつ連続であることを述べる。最後に弱調和可能過程が定常過程（*stationary process*）への拡大をもつための必要十分条件を与える。本稿で述べた結果の大部分は著者の論文［4, 5, 6］に見られる。ここでは証明なしに述べさせていただいた。

2. 空間 $L_0^2(\Omega:H)$

Hを Hilbert 空間（内積を$(\cdot,\cdot)$，ノルムを$\|\cdot\|$と書く），$B(H)$をH上の有界線形作用素の全体（ノルムを$\|\cdot\|$と書く），$T(H)$をH上の trace class 作用素の全体（trace を$\mathrm{Tr}(\cdot)$，trace norm を$\|\cdot\|_\tau$と書く）とする。また$(\Omega,\mathcal{F},\mu)$を確率測度空間として空間$L_0^2(\Omega:H)$を考える。これはΩ上のH-値強確率変数$x(\cdot)$で$\int_\Omega x(\omega)\mu(d\omega)=0$ および$\int_\Omega \|x(\omega)\|^2\mu(d\omega)<\infty$を満たすものの全体である。 $x, y\in L_0^2(\Omega:H)$に対し

$$(x,y)_2=\int_\Omega (x(\omega),\ y(\omega))\mu(d\omega),\qquad \|x\|_2=(x,x)_2^{1/2}$$

と定義すると$(\cdot,\cdot)_2$は内積となり，これによって$L_0^2(\Omega:H)$は Hilbert 空間になる。 $L_0^2(\Omega:H)$には$T(H)$-値の内積$[\cdot,\cdot]$（Gramian と呼ばれる）が次のように定義される： $x, y\in L_0^2(\Omega:H)$に対し

$$([x,y]\phi,\psi)=\int_\Omega (x(\omega),\psi)(\phi,\ y(\omega))\mu(d\omega),\qquad \phi,\psi\in H.$$

さらに$\mathrm{Tr}([x,y])=(x,y)_2$が成立する（cf. Umegaki and Bharucha-Reid [17]）。

2.1. 定義. Xが normal pre-Hilbert $B(H)$-module であるとは，Xが left $B(H)$-module（$B(H)$の action は$(a,x)\longrightarrow a\cdot x\in X$, $a\in B(H)$, $x\in X$と書く）でかつX上に$T(H)$-値内積$[\cdot,\cdot]$（Gramian）が存在して次を満たすことである： $x, y, z\in X$, $a\in B(H)$に対し

(1) $[x,x]\geqq 0$ で 等号は$x=0$のときに限る；

(2) $[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$;

(3) $[a\cdot x, y] = a[x, y]$;

(4) $[x, y]^* = [y, x]$.

Gramian を特に $[\cdot,\cdot]_X$ と書くこともある。 *normal pre-Hilbert* B(H)-*module* X には $(x, y)_X = \mathrm{Tr}([x, y])$, $\|x\|_X = (x, x)_X^{1/2}$, $x, y \in X$ と定義することによって内積とノルムがはいる。 X がこのノルムに関して完備なとき normal Hilbert B(H)-module と呼ぶ (Ozawa [12] では Hilbert B(H)-module と呼ばれた)。∎

$L_0^2(\Omega : H)$ は *normal Hilbert* B(H)-*module* であることがわかる。

2.2. 定義 [12]. X を *normal Hilbert* B(H)-*module* とし $\{x_j\} \subset X$ とする。 $\{x_j\}$ が modular orthonormal であるとは

(1) $[x_j, x_k] = 0$, $j \neq k$;

(2) $[x_j, x_j]^2 = [x_j, x_j]$, $\|x_j\|_X = 1$, $^\forall j$.

を満たすことである。 $\{x_j\}$ が *modular orthonormal* で *maximal* なとき X の modular basis と呼ばれる。∎

2.3. 補題 [12]. *normal Hilbert* B(H)-*module* X の *modular orthonormal family* $\{x_j\}$ に対し次の条件は同値である:

(1) $\{x_j\}$ は X の *modular basis*;

(2) $^\forall x \in X$ に対し $x = \sum_j [x, x_j]\cdot x_j$ (Σ は $\|\cdot\|_X$ について収束)。∎

$L_0^2(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) ; \int_\Omega f(\omega)\mu(d\omega) = 0 \}$ として、これの内積を $\langle\cdot,\cdot\rangle$ と書くことにする。 $L_0^2(\Omega : H) = L_0^2(\Omega) \otimes H$ と書けることに注意すると、

$L_0^2(\Omega : H)$ の modular basis は次のようにして得られる。

2.4. 補題. $\{f_j\}$ を $L_0^2(\Omega)$ の orthonormal basis とし, $\phi_0 \in H$, $\|\phi_0\| = 1$ とする。このとき $\{f_j \otimes \phi_0\}$ は $L_0^2(\Omega : H)$ の modular basis をなす。▮

2.5. 定義. X を normal Hilbert $B(H)$-module とする。X の部分集合 Y が <u>submodule</u> であるとは, $x, y \in Y$, $a \in B(H)$ に対し $x+y$, $a \cdot x \in Y$ かつ Y が $\|\cdot\|_X$ に関し閉であることをいう。このとき Y 自身 normal Hilbert $B(H)$-module になっている。X の submodule への projection P を <u>Gramian projection</u> と呼ぶ。このとき P は $[P^2x, y] = [Px, y] = [x, Py]$, $x, y \in X$ を満たす。Z を別の normal Hilbert $B(H)$-module とする。X から Z への作用素 U が <u>Gramian unitary</u> であるとは, U が onto で $\forall x, y \in X$, $\forall a, b \in B(H)$ に対し

$$U(a\cdot x + b\cdot y) = a\cdot(Ux) + b\cdot(Uy), \qquad [Ux, Uy]_Z = [x, y]_X$$

を満たすことである。X と Z が <u>同型</u> ($X \cong Z$ と書く) であるとは X から Z への Gramian unitary 作用素が存在することである。▮

Ozawa [12] によると, 任意の normal Hilbert $B(H)$-module X に対しある Hilbert 空間 K が存在し $X \cong K \otimes H \cong S(K, H)$ となる。ただし $S(K, H)$ は K から H への Hilbert-Schmidt class 作用素の全体である。これより, $L_0^2(\Omega : H)$ の submodule はある $L_0^2(\Omega)$ の閉部分空間 L があって $L \otimes H$ なる形をしている。Z が normal Hilbert $B(H)$-module であって $Z \cong K' \otimes H$ であれば, $X \cong Z \Longleftrightarrow K \cong K'$ (Hilbert 空間として) $\Longleftrightarrow \dim K = \dim K'$ となる。

3. $L_0^2(\Omega : H)$-値測度と $T(H)$-値両測度

前節と同じ記号を用いる。簡単のため $X = L_0^2(\Omega : H)$ と書く。$\mathbb{R}$ を実数直線，$\mathcal{B}$ を $\mathbb{R}$ の Borel σ-algebra，$\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ を rectangles の全体 $R(\mathcal{B} \times \mathcal{B}) = \{A \times B \,;\, A, B \in \mathcal{B}\}$ から生成される algebra とする。この節では $\mathcal{B}$ 上の X-値測度および $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$ 上の $T(H)$-値両測度を考察する。

3.1. 定義. $ca(\mathbb{R} : X)$ で $\mathcal{B}$ 上の X-valued bounded countably additive (CA) measures の全体とする。$\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ の <u>variation</u> $|\xi|(A)$, <u>semivariation</u> $\|\xi\|(A)$, および <u>operator semivariation</u> $\|\xi\|_0(A)$, $A \in \mathcal{B}$ は各々次式で定義される：

$$|\xi|(A) = \sup\left\{ \sum_{j=1}^{n} \|\xi(A_j)\|_2 \,;\, \{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathcal{B} \text{ は } A \text{ の有限分割} \right\};$$

$$\|\xi\|(A) = \sup\left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi(A_j) \right\|_2 \,;\, \begin{array}{l} \{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathcal{B} \text{ は } A \text{ の有限分割} \\ \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\} \subset \mathbb{C},\ |\alpha_j| \leq 1,\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right\};$$

$$\|\xi\|_0(A) = \sup\left\{ \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \xi(A_j) \right\|_2 \,;\, \begin{array}{l} \{A_1, \cdots, A_n\} \subset \mathcal{B} \text{ は } A \text{ の有限分割} \\ \{a_1, \cdots, a_n\} \subset B(H),\ \|a_j\| \leq 1,\ 1 \leq j \leq n \end{array} \right\};$$

ただし，$\mathbb{C}$ は複素数全体である。$\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ が <u>of bounded operator semivariation</u> (<u>of BOS</u>) であるとは $\|\xi\|_0(\mathbb{R}) < \infty$ となることをいう. $ca(\mathbb{R} : X)$ の要素で of BOS なものの全体を $bca(\mathbb{R} : X)$ と書く。$\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ が <u>orthogonally scattered</u> (<u>OS</u>) であるとは $\forall A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$ に対し $[\xi(A), \xi(B)] = 0$ となることである。$ca(\mathbb{R} : X)$ の要素で OS なものの全体を $caos(\mathbb{R} : X)$ と書く。∎

3.2. 命題. (1) $\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ と $A \in \mathcal{B}$ に対し次が成立する：

$$\|\xi(A)\|_2 \leq \|\xi\|(A) \leq \|\xi\|_o(A) \leq |\xi|(A).$$

(2) $\xi \in caos(\mathbb{R}:X)$ ならば $\|\xi(A)\|_2 = \|\xi\|(A) = \|\xi\|_o(A)$, $\forall A \in \mathcal{B}$ が成立する。したがって $caos(\mathbb{R}:X) \subset bca(\mathbb{R}:X)$ である。∎

写像 $M: \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to T(H)$ の $A\times B \in R(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ における値を $M(A,B)$と書くことにする。

3.3. 定義. $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}; T(H))$ で写像 $M: \mathcal{B}\times\mathcal{B} \to T(H)$ のうち次の条件を満たすものの全体を表わす：

(1) M は $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上で *finitely additive*；

(2) M は $R(\mathcal{B}\times\mathcal{B})$ 上の $T(H)$-valued positive definite kernel (PDK), すなわち $\forall\{A_1,\dots,A_n\} \subset \mathcal{B}$ と $\forall\{a_1,\dots,a_n\} \subset B(H)$ に対して $\sum_{j,k} a_j M(A_j, A_k) a_k^* \geq 0$ が成立する；

(3) $\{A_n\}, \{B_n\} \subset \mathcal{B}$, $A_n, B_n \downarrow \emptyset$ $(n \to \infty)$ であれば $\|M(A_n, B_m)\|_\tau \to 0$ $(n, m \to \infty)$.

$\mathbb{M}$の元は $T(H)$-valued bimeasure と呼ばれる。$M \in \mathbb{M}$ の variation $|M|(A,B)$ および operator semivariation $\|M\|_o(A,B)$ は各各次式で定義される：

$$|M|(A,B) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \|M(A_j, B_k)\|_\tau \,;\, \begin{array}{l}\{A_1,\dots,A_m\} \subset \mathcal{B} \text{ は } A \text{ の有限分割} \\ \{B_1,\dots,B_n\} \subset \mathcal{B} \text{ は } B \text{ の有限分割}\end{array}\right\};$$

$$\|M\|_o(A,B) = \sup\left\{\left\|\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_j M(A_j, B_k) b_k^*\right\|_\tau ;\, \begin{array}{l}\{A_1,\dots,A_m\}, \{B_1,\dots,B_n\} \subset \mathcal{B} \text{ は} \\ \text{各々 } A, B \text{ の有限分割}, \\ \{a_1,\dots,a_m\}, \{b_1,\dots,b_n\} \subset B(H), \\ \|a_j\|, \|b_k\| \leq 1,\ \forall j,k\end{array}\right\}.$$

$M \in \mathbb{M}$ が <u>*of BOS*</u> または <u>*of bounded variation*</u> (<u>*of BV*</u>) であるとは、各々 $\|M\|_o(\mathbb{R},\mathbb{R}) < \infty$ または $|M|(\mathbb{R},\mathbb{R}) < \infty$ を満たすときをいう。$\mathbb{M}_b$ または $\mathbb{M}_v$ で各々 *of BOS* または *of BV* な $\mathbb{M}$ の元全体を表わす。$\|M(A,B)\|_\tau \leqq \|M\|_o(A,B) \leqq |M|(A,B)$, $\forall A, B \in \mathcal{B}$ であるから、$\mathbb{M}_v \subset \mathbb{M}_b$ が成立する。▮

$\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ に対して

$$M_\xi(A,B) = [\xi(A), \xi(B)], \quad A, B \in \mathcal{B} \tag{3.1}$$

とおくと、M_ξ は $\mathcal{B}\times\mathcal{B}$ 上に一意に拡張され $M_\xi \in \mathbb{M}$ となる。

3.4. 補題. $\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ とし、M_ξ は (3.1) 式で定義されたものとする。このとき次が成立する: $A, B \in \mathcal{B}$ に対して

(1) $\|M_\xi\|_o(A,B) \leqq \|\xi\|_o(A)\cdot\|\xi\|_o(B)$;

(2) $\|M_\xi\|_o(A,A) = \|\xi\|_o(A)^2$;

(3) $|M_\xi|(A,B) \leqq |\xi|(A)\cdot|\xi|(B)$.

したがって、$\xi \in bca(\mathbb{R} : X) \Longleftrightarrow M_\xi \in \mathbb{M}_b$ となる。特に ξ が OS ならば $\mathrm{supp}\, M_\xi \subset \{A\times A;\, A \in \mathcal{B}\}$ となるので $F_\xi(A) = M_\xi(A,A)$, $A \in \mathcal{B}$ とおくことにより $F_\xi \in ca(\mathbb{R} : T(H))$ ($\mathcal{B}$ 上の $T(H)$-*valued bounded* CA *measures* の全体) となり、さらに $\forall A \in \mathcal{B}$ に対して

$$\|\xi(A)\|_2 = \|\xi\|_o(A) = |F_\xi|(A)^{1/2} = |M_\xi|(A,A)^{1/2}$$

が成立する。この場合 $M_\xi \in \mathbb{M}_v$ である。▮

次に $\mathbb{R}$ 上の $B(H)$-値函数の $\xi \in bca(\mathbb{R} : X)$ および $M_\xi \in \mathbb{M}_b$ に対する積分を考えよう。

3.5. 定義. (1) $\mathbb{R}$上の <u>B(H)-valued simple function</u> は次の形をしたものである：

$$\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j} a_j, \qquad A_j \in \mathcal{B},\ a_j \in B(H),\ 1 \leqq j \leqq n.$$

ただし 1_A は $A \in \mathcal{B}$ の characteristic function である。$L^0(\mathbb{R} : B(H))$ で $\mathbb{R}$上の B(H)-valued simple functions の全体を表わす。

(2) $\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ とする。$A \in \mathcal{B}$ が <u>ξ-null</u> であるとは $\|\xi\|_0(A) = 0$ のことをいう。ξ-a.e. は ξ-null set の complement の意味に使う。

(3) $\xi \in ca(\mathbb{R} : X)$ とする。$\Phi \in L^0(\mathbb{R} : X)$ に対して <u>ξ-ess. sup norm</u> を

$$\|\Phi\|_\infty = \inf\{\alpha > 0\ ;\ \{s \in \mathbb{R}\ ;\ \|\Phi(s)\| > \alpha\} \text{ が } \xi\text{-null}\}$$

で定義する。$L^0(\mathbb{R} : B(H))$ の函数列で ξ-a.e. に一様近似される $\mathbb{R}$上の B(H)-値函数の全体を $L^\infty(\mathbb{R}, \xi ; B(H))$ と書く。$L^\infty(\mathbb{R}, \xi : B(H))$ は ξ-ess. sup-norm によって Banach algebra になる。ξ が of BOS のときは、$C(\mathbb{R} : B(H)) \subset L^\infty(\mathbb{R}, \xi : B(H))$ に注意する。ここで $C(\mathbb{R} : B(H))$ は $\mathbb{R}$上の B(H)-値有界連続 (B(H)のノルムで) 函数の全体である。∎

3.6. 定義. $\xi \in bca(\mathbb{R} : X)$ とする。

(1) $\Phi = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_j} a_j \in L^0(\mathbb{R} : B(H))$ の ξ に関する $A \in \mathcal{B}$ 上の積分を

$$\int_A \Phi\, d\xi = \sum_{j=1}^{n} a_j \xi(A_j)$$

で定義する。このとき次の不等式が成立する：

$$\left\| \int_A \Phi\, d\xi \right\|_2 \leqq \|\Phi\|_\infty \cdot \|\xi\|_0(A). \tag{3.2}$$

$\Psi = \sum_{k=1}^{m} 1_{B_k} b_k \in L^0(\mathbb{R} : B(H))$ として (Φ, Ψ) の $M_\xi \in \mathbb{M}_b$ に関する $A \times B \in R(\mathcal{B} \times \mathcal{B})$ 上の積分は

$$\iint_{A\times B} \Phi \, dM_\xi \Psi^* = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_j M_\xi(A\cap A_j, B\cap B_k) b_k^*$$

で定義される。このとき次の不等式が成立する：

$$\left\| \iint_{A\times B} \Phi \, dM_\xi \Psi^* \right\|_\tau \leqq \|\Phi\|_\infty \cdot \|\Psi\|_\infty \cdot \|M_\xi\|_o(A, B). \qquad (3.3)$$

(2) $\Phi, \Psi \in L^\infty(\mathbb{R}, \xi : B(H))$ に対して $\exists\{\Phi_n\}, \{\Psi_n\} \subset L^0(\mathbb{R} : B(H))$ があって $\|\Phi_n - \Phi\|_\infty, \|\Psi_n - \Psi\|_\infty \to 0 \ (n\to\infty)$ となる。そこで Φ の ξ に関するA上の積分 および (Φ, Ψ) の M_ξ に関する $A\times B$ 上の積分を各々

$$\int_A \Phi \, d\xi = \lim_{n\to\infty} \int_A \Phi_n \, d\xi ;$$

$$\iint_{A\times B} \Phi \, dM_\xi \Psi^* = \lim_{n,m\to\infty} \iint_{A\times B} \Phi_n \, dM_\xi \Psi_m^*$$

で定義する。これらの積分が *well-defined* であることは (3.2), (3.3) の不等式からわかる。∎

最後に $bca(\mathbb{R} : X)$ の元の *orthogonally scattered dilation* について述べたい。

3.7. 定義. (1) $F \in ca(\mathbb{R}; T(H))$ に対して $\tilde{F}(A, B) = F(A\cap B)$, $A, B \in \mathcal{B}$ とおくと $\tilde{F} \in M$ となることがわかる。そこで F の <u>*operator semivariation*</u> $\|F\|_o(\cdot)$ を $\|F\|_o(A) = \|\tilde{F}\|_o(A, A)$, $A \in \mathcal{B}$ で定義する。$ca(\mathbb{R} : T(H))$ の要素で of BOS なものの全体を $bca(\mathbb{R} : T(H))$ と書く。

(2) $T^+(H)$ を $T(H)$ の *nonnegative* な要素の全体とし, $\xi \in bca(\mathbb{R} : X)$, $F \in bca(\mathbb{R} : T^+(H))$ とする。F が ξ の <u>*majorant*</u> であるとは

$$\left[\int_{\mathbb{R}} \Phi \, d\xi, \int_{\mathbb{R}} \Phi \, d\xi\right] \leqq \int_{\mathbb{R}} \Phi \, dF \Phi^*, \quad \forall \Phi \in L^0(\mathbb{R} : B(H))$$

となることである。$\mathfrak{M}(\xi)$ で ξ の *majorants* の全体を表わす。

(3) $\xi \in bca(\mathbb{R} : X)$ が <u>*orthogonally scattered dilation*</u> (<u>OSD</u>) をもつと

は，Xを submodule として含むある normal Hilbert $B(H)$-module Y および ある $\eta \in caos(\mathbb{R} : Y)$ が存在して　$\xi(\cdot) = P\eta(\cdot)$ となることである。ここにP はYからXへの Gramian projection である。∎

そこで次の定理を得る。

3.8. 定理.　$\xi \in bca(\mathbb{R} : X)$ が OSD をもつためには $\mathfrak{M}(\xi) \neq \emptyset$ であることが必要十分である。∎

3.9. 注意.　$\xi \in bca(\mathbb{R} : X)$ とする。　$H = \mathbb{C}$ の場合 $\mathfrak{M}(\xi) \neq \emptyset$ となることは Niemi [10] による (cf. [8])。　$H = \mathbb{C}^n$ $(1 \leq n < \infty)$ の場合に $\mathfrak{M}(\xi) \neq \emptyset$ となることは Rosenberg [15] による。　Abreu [2] は上の定理と同様の結果を得ている。∎

4. $L_0^2(\Omega : H)$-値過程

2, 3 節の準備の下で $\mathbb{R}$ 上の $L_0^2(\Omega : H)$-値過程を考察する。　$X = L^2(\Omega : H)$, $\mathcal{B}$ 等の記号は前節と同様である。

4.1. 定義.　(1)　$\mathbb{R}$ 上の <u>X-valued process</u>（または <u>H-valued second order stochastic process with zero mean</u>）とは $\mathbb{R}$ から X への写像 $t \to x(t)$ のことである。これを $\{x(t)\}$ または $\{x(t, \cdot)\}$ と書く。

(2)　X-値過程 $\{x(t)\}$ の <u>covariance function</u> Γ は $\Gamma(s,t) = [x(s), x(t)]$, $s, t \in \mathbb{R}$ で定義される。Γ は $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ 上の $T(H)$-値 PDK である。

(3)　X-値過程 $\{x(t)\}$ が <u>連続</u> であるとは，$t \to x(t)$ が $\|\cdot\|_2$ で連続なことをいう。

(4) X-値過程 $\{x(t)\}$ が <u>weakly harmonizable</u> (<u>WH</u>) であるとは，ある $M \in \mathbb{M}_b$ が存在して，$\{x(t)\}$ の covariance function Γ が

$$\Gamma(s,t) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i(su-tv)}\, M(du,dv), \quad s,t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

と書けることである。 WH processes 全体を（WHP）と書く。

(5) X-値過程 $\{x(t)\}$ が <u>strongly harmonizable</u> (<u>SH</u>) であるとは，ある $M \in \mathbb{M}_v$ が存在して，$\{x(t)\}$ の covariance function Γ が (4.1) の形に書けることである。 SH processes の全体を（SHP）と書く。

(6) X-値過程 $\{x(t)\}$ が <u>stationary</u> であるとは，その covariance function $\Gamma(s,t)$ が $s-t$ だけに依存して，$\Gamma(s,t) = \tilde{\Gamma}(s-t)$ とおくとき，$\tilde{\Gamma}$ が $\mathbb{R}$ 上の $T(H)$-値弱連続函数となることをいう。 stationary processes の全体を（SP）と書く。 ∎

まず連続過程に対する列表現を与える。

4.2. 命題 (Gramian orthogonal series representation). $\{x(t)\}$ が $\mathbb{R}$ 上の X-値連続過程ならば，$\exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ および $\exists\{a_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ ($\mathbb{R}$ 上の $T(H)$-値連続函数列）が存在して次を満たす：

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)x_n, \quad t \in \mathbb{R} \quad (\|\cdot\|_2 \text{ で収束});$$

$$[x_n, x_m] = \begin{cases} \text{projection} & (n=m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}; \qquad \|x_n\|_2 = 1, \ \forall n. \ ∎$$

この命題から次の定理を得る。

4.3. 定理. $\{x(t)\}$ が $\mathbb{R}$ 上の X-値 WH過程ならば，ある SH過程の列 $\{x_n(t)\}$, $n \geq 1$ があって $x_n(t) \to x(t)$ ($n \to \infty$, $\|\cdot\|_2$ で

収束), $\forall t \in \mathbb{R}$ を満たす。また、この収束は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合上では一様である。∎

WH過程も次のように表現される。

4.4. 定理. $\{x(t)\}$ が $\mathbb{R}$ 上の X-値 WH過程であるためには、ある $\xi \in bca(\mathbb{R} : X)$ が存在して $x(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itu} \xi(du)$, $t \in \mathbb{R}$ となることである。この ξ は一意に決まり、$\{x(t)\}$ の representing measure (表現測度) と呼ばれる。∎

$\mathbb{R}$ 上の $B(H)$-値一様可測函数で Lebesgue 測度 ds に関して (一様) Bochner 可積分なものの全体を $L^1(\mathbb{R} : B(H))$ と書く。$\phi \in L^1(\mathbb{R} : B(H))$ のノルムは $\|\phi\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \|\phi(s)\| ds$ で定義される。また ϕ の Fourier transform は

$$\hat{\phi}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-itu} \phi(t) dt, \qquad u \in \mathbb{R}$$

で定義される。$\mathbb{R}$ 上の $B(H)$-値連続函数のうち無限遠点で消滅するものの全体を $C_0(\mathbb{R} : B(H))$ と書く。$\Phi \in C_0(\mathbb{R} : B(H))$ のノルムは $\|\Phi\| = \sup\{\|\Phi(u)\| ; u \in \mathbb{R}\}$ で定義する。$\phi \in L^1(\mathbb{R} : B(H))$ ならば $\hat{\phi} \in C_0(\mathbb{R} : B(H))$ かつ $\|\hat{\phi}\| \leqq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|\phi\|_1$ が成り立つ。

4.5. 定義. $\{x(t)\}$ を $\mathbb{R}$ 上の X-値過程とする。

(1) $\{x(t)\}$ が有界であるとは、$\exists \alpha > 0$ があって $\|x(t)\|_2 \leqq \alpha$, $\forall t \in \mathbb{R}$ となることである。また $\{x(t)\}$ が可測であるとは、$x(\cdot)$ が $\mathbb{R}$ 上の X-値強可測函数となることである。

(2) $\{x(t)\}$ が V-bounded (V-B) であるとは、$\{x(t)\}$ が有界かつ可測

で，さらに covariance function Γ に対して $^\exists\alpha>0$ が存在して

$$\left\|\iint_{\mathbb{R}^2}\phi(s)\Gamma(s,t)\psi(t)^* ds\,dt\right\|_\tau \leqq \alpha\cdot\|\hat{\phi}\|\cdot\|\hat{\psi}\|,\quad {}^\forall\phi,\ \psi\in L^1(\mathbb{R}:B(H))$$

を満たすことである。$\mathbb{R}$上の X-値 V-B過程の全体を（V-BP）で表わす。∎

4.6. 定理. $\mathbb{R}$上の X-値過程が WH であるためには，それが連続で V-B であることが必要十分である。∎

4.7. 命題. $\mathbb{R}$上のX-値 WH過程 が stationary であるためには，その表現測度が OS であることが必要十分である。∎

4.8. 注意. (1) 明らかに次の包含関係が成立する：

$$(SP)\subset(SHP)\subset(WHP)\subset(V\text{-}BP).$$

(2) $B(X)$ を X上の有界線形作用素とすると，(WHP) および (V-BP) は left $B(X)$-module である。すなわち，$\{x(t)\}\in$ (WHP)（または (V-BP)），$T\in B(X)$ ならば，$\{Tx(t)\}\in$ (WHP)（または (V-BP)）である。(SP) および (SHP) は一般には left $B(X)$-module ではないが，left $B(H)$-module ではある。∎

最後に WH過程 の stationary dilation について述べる。

4.9. 定義. $\mathbb{R}$上の X-値過程 $\{x(t)\}$ が <u>stationary dilation</u> をもつとは，ある確率測度空間 $(\tilde{\Omega},\tilde{\mathfrak{F}},\tilde{\mu})$ があって $X=L_0^2(\Omega:H)\subset L_0^2(\tilde{\Omega}:H)\triangleq Y$ を満たし，かつある Y-値定常過程 $\{y(t)\}$ があって $x(t)=Py(t)$, $t\in\mathbb{R}$ となることである。ここに P は Y から X への Gramian projection である。∎

次の定理は 3.8. 定理 と 3.9. 注意 から出る。

4.10. 定理. $\{x(t)\}$を$\mathbb{R}$上の$\mathcal{X}$-値WH過程とし, ξをその表現測度とする。$\{x(t)\}$が *stationary dilation* をもつためには $\mathfrak{M}(\xi) \neq \emptyset$ であることが必要十分である。

謝辞

東京工業大学の梅垣寿春教授には, 本稿を書くにあたり有益な助言とコメントをいただきました。ここに深く感謝いたします。

References

[1] J. L. Abreu, A note on harmonizable and stationary sequences. Bol. Soc. Mat. Mexicana 15 (1970), 48-51.

[2] J. L. Abreu, Transformation valued measures. Advances Math. 27 (1978), 1-11.

[3] S. Bochner, Stationarity, boundedness, almost periodicity of random valued functions. Proc. Third Berkeley Symp. Math. Stat. Prob., Vol.2, pp. 7-27 (1956).

[4] Y. Kakihara, Hilbert A-module-valued measures and a Riesz type theorem. Submitted to J. Math. Anal. Appl.

[5] Y. Kakihara, A note on harmonizable and V-bounded processes. Submitted to J. Multivar. Anal.

[6] Y. Kakihara, Hilbert space valued strongly and weakly harmonizable processes. Submitted to J. Multivar. Anal.

[7] M. Loève, Probability Theory, Third Ed., Van Nostrand, New York, 1963.

[8] A. G. Miamee and H. Salehi, Harmonizability, V-boundedness and stationary dilation of stochastic processes. Indiana Univ. Math. J. 27 (1978), 37-50.

[9] H. Niemi, Stochastic processes as Fourier transforms of stochastic measures. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 591 (1975), 1-47.

[10] H. Niemi, On orthogonally scattered dilation of bounded vector measures. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI Math. 3 (1977), 43-52.

[11] H. Niemi, On stationary dilation and linear prediction of certain stochastic processes. Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 45 (1975), 111-130.

[12] M. Ozawa, Hilbert B(H)-modules and stationary processes. Kodai Math. J. 3 (1980), 26-39.

[13] M. M. Rao, Representation of weakly harmonizable processes. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 78 (1981), 5288-5289.

[14] M. M. Rao, Harmonizable processes: Structure theory. Enseignement math. 28 (1982), 295-351.

[15] M. Rosenberg, Quasi-isometric dilation of operator-valued measures and Grothendieck's inequality. Pacific J. Math. 103 (1982), 135-161.

[16] Yu. A. Rozanov, Spectral theory of abstract functions. Theory Prob. Appl. 4 (1959), 271-287.

[17] H. Umegaki and A. T. Bharucha-Reid, Banach space-valued random variables and tensor products of Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 31 (1970), 49-67.