数理解析研究所講究録
第504巻 1983年 54-65

Banach quasi-sublattice について

東京理科大理　宮島静雄 (Shizuo Miyajima)

§1　序

(vector) sublattice の概念の拡張として次のものが自然に考えられる:

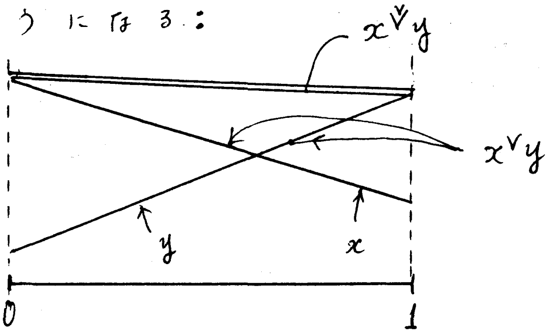
定義 1. vector lattice E の部分空間 F が E から自然に導かれる順序に関してまた vector lattice になるとき, F を E の quasi-sublattice という。

F を E の quasi-sublattice とするとき, $x, y \in F$ の F での上限, 下限をそれぞれ $x \veebar y$, $x \barwedge y$ で表わす。$x, y \in F$ の E での上限と下限を通常のように $x \vee y$ と $x \wedge y$ で表わすと明らかに $x \veebar y \geq x \vee y$, $x \barwedge y \leq x \wedge y$ が成り立つ。

最も簡単な具体例において上記のことを図解してみよう。$E = C([0,1])$ を通常の如く順序を入れた vector lattice とし, F を $[0,1]$ 上の affine 関数の全体とする。すなわち

$$F = \{ f \in E \ ; \ \exists a, b \in \mathbb{R} \ \forall x \in [0,1] \ f(x) = ax + b \}.$$

このときFはEのquasi-sublatticeとなり $x\dot{\vee}y$ と $x\vee y$ の関係は下図のようになる：



また一般にEをvector latticeとし，PをEの上で定義されたpositive projectionとする（i.e., $P: E\to E$ linear, $P^2=P$, $x\geq 0 \Rightarrow Px\geq 0$）。このときPの値域FはEのquasi-sublatticeである。実際 $x, y\in F$ のFでの上限が $P(x\vee y)$ で与えられることがすぐ分る。

一方上のaffine関数の例において $f\in E$ に対して $f(0)$ と $f(1)$ をそれぞれ0, 1での値とするaffine関数を Pf とするとPはE上のpositive projectionとなり F＝Pの値域 となる。

ここでは一例のみ挙げたが，多くの自然な例においてはquasi-sulatticeを値域に持つpositive projectionが存在している。そこで一般のquasi-sublatticeにおいてその構造は，quasi-sublatticeの概念の推移性から，本物のsublatticeをとることとpositive projectionの値域をとることの組み合せで与えられるのではないかと予想される。§2においてこれを確かめ，§3でBanach latticeにおいて並行的に定義されるBanach quasi-sublattice の構造を調べる。

§2 quasi-sublattice

F を E の quasi-sublattice とする（§1 定義1）。§1 で定義した記号 $x \mathbin{\dot\vee} y$, $x \mathbin{\dot\wedge} y$ に加えて以下では次の記号を用いる：　$x^{++} := x \mathbin{\dot\vee} 0$,　$x^{--} := (-x) \mathbin{\dot\vee} 0$,　$|x|_F := x \mathbin{\dot\vee} (-x)$

ここで $x \in F$。

lemma 1.　F は vector lattice E の quasi-sublattice とする。F の元の有限族 $\{a_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$, $\{b_{kl}\}_{k\in K, l\in L}$ が

$$\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} a_{ij} = \bigvee_{k\in K}\bigwedge_{l\in L} b_{kl}$$

をみたすとすると

$$\dot{\bigvee_{i\in I}}\dot{\bigwedge_{j\in J}} a_{ij} = \dot{\bigvee_{k\in K}}\dot{\bigwedge_{l\in L}} b_{kl}$$

が成り立つ。

proof)　最初に $a_{ij} \in F$　$\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} a_{ij} \geq 0$ のとき $\dot{\bigvee_{i\in I}}\dot{\bigwedge_{j\in J}} a_{ij} \geq 0$ が成り立つことを示そう。実際 E における分配則から

$$\bigwedge_{\sigma\in\Sigma}\bigvee_{i\in I} a_{i\sigma(i)} = \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} a_{ij} \geq 0$$

が成り立つ，ここで $\Sigma = J^I$。よって任意の $\sigma\in\Sigma$ に対し

$$\bigvee_{i\in I} a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

となり $\dot\vee$ と $\vee$ の関係から $\dot{\bigvee_{i\in I}} a_{i\sigma(i)} \geq 0$。これより F における分配則を用いて

$$\dot{\bigvee_{i\in I}}\dot{\bigwedge_{j\in J}} a_{ij} = \dot{\bigwedge_{\sigma\in\Sigma}}\dot{\bigvee_{i\in I}} a_{i\sigma(i)} \geq 0$$

を得る。

次に $\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} a_{ij} = \bigvee_{k\in K}\bigwedge_{\ell\in L} b_{k\ell}$ にもどり $i\in I$ を固定すると，

$\bigvee_{k\in K}\bigwedge_{\ell\in L} b_{k\ell} \geq \bigwedge_{j\in J} a_{ij}$ が成り立つが．これより

$$\bigvee_{k\in K}\bigwedge_{\ell\in L} (b_{k\ell} - \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j\in J} a_{ij}) \geq 0$$

が言える。 前半のことより（ $b_{k\ell} - \bigwedge\!\!\!\bigwedge a_{ij} \in F$ に注意）

$$\bigvee\!\!\!\bigvee_{k\in K} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\ell\in L} (b_{k\ell} - \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j\in J} a_{ij}) \geq 0$$

となる。 これから

$$\bigvee\!\!\!\bigvee_{k\in K} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\ell\in L} b_{k\ell} \geq \bigvee\!\!\!\bigvee_{i\in I} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j\in J} a_{ij}$$

を得るが対称性から上式で等号が成り立つ。//

Theorem 1. F を vector lattice E の quasi-sublattice とする。 F_0 を F の生成する E の sublattice とすると，F_0 上で定義された positive projection P で値域が F となるものが存在する。更に P は F_0 から F への写像として lattice homomorphic にとれる。

proof） $F_0 = \{ \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} a_{ij} \ ;\ I, J \text{ finite set. } a_{ij}\in F \}$

と表わされる（ Bleier， p. 74）ことと，lemma 1 から

$$P : \bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} a_{ij} \longmapsto \bigvee\!\!\!\bigvee_{i\in I} \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{j\in J} a_{ij} \quad (I, J \text{ finite}, a_{ij}\in F)$$

は F_0 上で定義された写像となる。 $P^2 = P$ なることは明らかであり， $P \geq 0$ も lemma 1 の証明中で示されている。

P が linear であることも分配則を用いて証明される。定理の最後の主張も同様。//

定理1の逆を述べておこう。

Proposition 1. E が vector lattice で P を E 上で定義された positive projection とする。このとき P の値域 PE は E の quasi-sublattice となり PE の元の有限族 $\{a_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ に対し

$$P\left(\bigvee_{i\in I}\bigwedge_{j\in J} a_{ij}\right) = \mathop{\dot{\bigvee}}_{i\in I}\mathop{\dot{\bigwedge}}_{j\in J} a_{ij}$$

が成り立つ。

<u>Remark</u>: Theorem 1 は quasi-sublattice が常に sublattice をとり，更に positive projection の値域をとるという2回の操作で得られることを示している。

§3. Banach quasi-sublattice

quasi-sublattice の概念に Banach lattice のカテゴリーで対応するものを次のように定義する：

定義2. Banach lattice E の閉部分空間 $\mathbf{F}$ が E の Banach quasi-sublattice であるとは F が E から自然に導入される順序とノルムに関して Banach lattice になることを言う。

明らかに F が E の Banach quasi-sublattice であることは F が E の quasi-sublattice で $\forall x\in F$ $\| |x|_F \| = \|x\|$ が成り立つことと同等である。これから P を E 上の $\|P\|\leq 1$ なる

positive projection とすると，P の値域は E の Banach quasi-sublattice となる。 もっと具体的な Banach quasi-sublattice の例としては $E = C(\overline{D})$ （ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2+y^2 < 1\}$ ）としたとき $F = \{ f \in E : \Delta f = 0 \text{ in } D\}$ としたものがある。 この例において $I = \{ f \in E ; f=0 \text{ on } \partial D\}$ とし $\pi : E \to E/I$ を canonical surjection とすると，$\pi(F)$ は E/I の sublattice であり，$\pi|_F$ は isometric であることに注意しよう（最大値原理）。

Theorem 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-sublattice とし，$\widetilde{F}$ を F の生成する E の closed vector sublattice とする。このとき次の a), b) は同値：

(a) E の closed ideal I で canonical surjection $\pi : E \to E/I$ の F への制限が isometric かつ F から E/I への束準同型となるものが存在する。

(b) positive projection $P \in \mathcal{L}(\widetilde{F})$ で $\|P\| \leq 1$ かつ値域が F となるものが存在する。

proof) (a)$\Rightarrow$(b)： I を (a) の条件をみたす ideal, π を canonical surjection $E \to E/I$ とする。$\{a_{ij}\}_{i\in I, j\in J}$ を F の元の有限族とすると $\|\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij}\| \geq \|\pi(\bigvee_i \bigwedge_j a_{ij})\| = \|\bigvee_i \bigwedge_j \pi(a_{ij})\|$ $= \|\pi(\curlyvee_i \curlywedge_j a_{ij})\| = \|\curlyvee_i \curlywedge_j a_{ij}\|$ が成り立つ。 これは，

Theorem 1 の写像 P が $\tilde{F}$ から F の上への contractive positive projection に一意的に拡張できることを示しているので (b) が成り立つ。

(b) $\Rightarrow$ (a): P を $\tilde{F}$ から F への作用素として見ると，§2 Proposition 1 から lattice homomorphic である。従って $\mathrm{Ker}\,P$ は $\tilde{F}$ の closed ideal となり明らかに $\forall x \in F$ に対し $x^{++} - x^{+}$, $|x|_F - |x|$ は $\mathrm{Ker}\,P$ に属する。$I = \mathrm{Ker}\,P$ として (a) が成立することを見るには上記のことから $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ ($x \in F$, $\pi : E \to E/I$ は natural map) が成り立つことを見ればよい。

また $x \in F$ に対して

$$\|\pi(x)\| = \|\,|\pi(x)|\,\| = \|\pi(|x|)\| = \|\pi(|x|_F)\|$$

かつ $\|x\| = \|\,|x|_F\|$ だから $F \ni x \geq 0$ に対し $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ が言えれば十分である。そこで $F \ni x \geq 0$ とし任意の $y \in I$ をとると $(x+y)^{+} \geq (x - |y|)^{+}$ より

$$\|x+y\| \geq \|(x+y)^{+}\| \geq \|(x-|y|)^{+}\| \geq \|P(x-|y|)^{+}\| = \|P(x-|y|)^{++}\|$$

となり最後の項は $\|x\|$ に等しい。これで $\|\pi(x)\| \geq \|x\|$ が示された。//

次に positive linear functional の拡張可能性を示すための補題を示そう。

lemma 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-sublattice とすると任意の $x \in F$ に対し $\|x^{++}\| = \|x^+\|$ が成り立つ。

proof) $x \in F$ と $n \in \mathbb{Z}_+$ に対し $x_n := n x^{++} + x \ (\in F)$ とおく。$x_n = (n+1)x^{++} - x^{--} = n x^{++} + x^+ - x^-$ と書けるから $|x_n|_F \geq (n+1)x^{++} + x^- \geq n x^{++} + x^+ + x^-$ と $|x_n| \leq n x^{++} + x^+ + x^-$ が成り立つ。故に

$$\| |x_n|_F \| \geq \| (n+1)x^{++} + x^- \| \geq \| n x^{++} + x^+ + x^- \| \geq \| |x_n| \| = \| |x_n|_F \|$$

が言えて $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ で $\| n x^{++} + x^+ + x^- \| = \| (n+1)x^{++} + x^- \|$ が成立する。これから帰納的に $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ で

$$\| n x^{++} + x^- \| \leq n \|x^+\| + \|x^-\|$$

が証明される。上式を n で割り, $n \to \infty$ とすれば $\|x^{++}\| \leq \|x^+\|$ を得るので, $\|x^{++}\| = \|x^+\|$ が示された。//

Proposition 2. F を Banach lattice E の Banach quasi-sublattice とすると, F 上の任意の positive linear functional φ はノルムを保って E 上の positive linear functional に拡張できる。

proof) $p(x) := \|\varphi\| \|x^+\| \quad (x \in E)$ とおくと p は E 上の positively homogeneous, subadditive function で, lemma 2 から $\forall x \in F$ で $\varphi(x) \leq p(x)$ が成り立つ。Hahn-Banach の定理より φ の E 上への linear extension ψ で $\forall x \in E \ \psi(x) \leq p(x)$ を満たすものが存在するが, これが条件をみたす拡張であること

は容易に分る。 //

Remark: Prop. 2 は sublattice の場合によく知られている結果 (Schaefer, p86 Prop. 5.6) の拡張である。

特に AM-space の Banach quasi-sublattice については次のような事が分っている。

Proposition 3 F が AM-space E の Banach quasi-sublattice であれば F も AM-space となる。

(この証明は簡単なので略す。詳しくは Miyajima を見よ。)

Theorem 3. F が AM-space E の Banach quasi-sublattice とすると, E の closed ideal I で natural map $\pi : E \to E/I$ の F への制限が F から E/I への isometric lattice homomorphism となるものが存在する。

proof) $X := \{ f \in E' ;\ f \geq 0,\ \|f\| \leq 1 \}$, $Y := \{ \varphi \in F' ;\ \varphi \geq 0,\ \|\varphi\| \leq 1 \}$ とおくと X, Y はそれぞれ E', F' の w*-compact convex subset で, 各々の 0 でない端点全体を X_0, Y_0 とおくと, X_0, Y_0 の元は E, F 上の lattice homomorphic functional から成る。Proposition 2 は restriction

$$r : \begin{cases} X \longrightarrow Y \\ f \longmapsto f|_F \end{cases}$$

が全射であることを示している。 ここで $\varphi \in Y_0$ に対して

$r^{-1}(\varphi)$ は X の空でない face となるから $r^{-1}(\varphi)\cap X_0 \neq \phi$ であることに注意しよう。

ここで $X_1 := r^{-1}(Y_0)\cap X_0$ とし，$I := \{x\in E\,;\,\forall f\in X_1\ f(|x|)=0\}$ とおくと I が定理の条件をみたすことを見よう。

まず $\pi : E \to E/I$ を natural map として $x\in F$ に対し $\|x\| = \|\pi(x)\|$ となることは次の2つのことから分る：

(i) $x\in F$，$y\in I$，$f\in X_1$ とすると $\|x+y\| \geq |f(x+y)| = |f(x)|$

(ii) $x\in F$ とすると $\|x\| = \|\,|x|_F\,\| = \sup\{|\varphi(x)|\,;\,\varphi\in Y_0\}$
$= \sup\{|f(x)|\,;\,f\in X_1\}$．（2つめの等号は $\varphi\in Y_0$ が lattice homomorphic なことから出，最後の等号は $r(X_1)=Y_0$ から従う。）

また $\pi|_F$ が F から E/I への lattice homomorphism であることは $x, y\in F$，$f\in X_1$ に対して

$$f(x \overset{\vee}{\vee} y - x\vee y) = r(f)(x \overset{\vee}{\vee} y) - f(x\vee y) = 0$$

であることから言える。//

Corollary 1. F が AM-space E の Banach quasi-sublattice であ（る）ための条件は E の closed sublattice $\hat{F}$ と positive contractive projection $P\in\mathcal{L}(\hat{F})$ で $P\hat{F} = F$ をみたすものが存在すること。

Proof) 十分性は定義のあとの注意から明らか。必要性は $\hat{F}$ を F の生成する E の closed sublattice とすると，定理

2, 3 から $P\hat{F}=F$ なる contractive positive projection $P\in\mathcal{L}(\hat{F})$ が存在することが出るのでよい。//

Remark. Cor. 1 は Theorem 1 の Banach lattice version が E が AM-space のときに成り立つことを示している。一般の E に対して同じことが成り立つかどうかは分っていない。

定理3より, E が最初から $C(K)$ (K: compact Hausdorff) の closed sublattice として実現されている場合, この§の最初にあげた例における "Poisson の積分公式" と同じようなことが言える:

Corollary 2. K が compact Hausdorff space, E は $C(K)$ の closed sublattice とする。このとき E の任意の Banach quasi-sublattice F に対して closed subset $K_0\subset K$ で $F|_{K_0}:=\{x|_{K_0};\ x\in F\}$ が $C(K_0)$ の sublattice で $\forall x\in F$ に対し $\|x\|=\|x|_{K_0}\|$ が成り立つものが存在する。更に F が定数関数を含めば, 次の条件 (i), (ii) をみたす compact Hausdorff 空間 K_1, 連続写像 $p: K_0\to K_1$, $\mu: K\to\mathcal{M}_1^+(K_1)$ が存在する:

(i) 写像 $p^*:\begin{cases} C(K_1)\to C(K_0) \\ g\ \longmapsto g\circ p\end{cases}$ は $C(K_1)$ から $F|_{K_0}$

の上への isometric lattice isomorphism

(ii) $\forall x \in F$, $\forall s \in K$

$$x(s) = \int p^{*-1}(x|_{K_0})\, d\mu_s$$

が成り立つ。(μ_s は μ の s での値)

References

[1] Bleier,R.D.:Free vector lattices,Trans.A.M.S.,176(1973), 73-78

[2] Miyajima,S.:Structure of Banach quasi-sublattices, Hokkaido Math.J.,12(1983),83-91

[3]Schaefer,H.H. : Banach Lattices and Positive Operators, Springer(1974)