数理解析研究所講究録
第504巻 1983年 66-72

連続関数のある種の平均について

武蔵工大　伊藤隆司
奈良知恵

I を実数空間内の任意の区間とする。I 上で定義された狭義単調（増加又は減少）な実数値連続関数 φ と $0 \leq t \leq 1$ なる数 t を固定して、区間 I 内の二数 a, b の平均値を Hardy-Littlewood-Pólya [2] は

$$(1) \qquad \varphi^{-1}\{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\}$$

と定義している。

この定義は無限次元にまで自然に拡張される。即ち X をコンパクトな空間、X 上の I に値をとる連続関数の全体を $C(X;I)$ とする。上に述べた関数 φ と X 上の確率測度 μ を固定して、$C(X;I)$ に属する関数 f の平均値を

$$(2) \qquad \varphi^{-1}\left\{\int_X \varphi\circ f \, d\mu\right\}$$

と定義する。勿論Xが二点よりなる場合(2)は(1)となる。このfの平均値をfのHardy-Littlewood-Pólya型の平均値と呼び$M_{\varphi,\mu}(f)$と書くことにする。更に、φとμを固定しfを変数とみて$C(X;I)$上の汎関数$M_{\varphi,\mu}$が得られるがこの様な汎関数を$C(X;I)$上のHLP-meanと呼ぶことにする。

$C(X;I)$上に一様収束の位相及び普通の意味の順序構造を考えた時、HLP-mean $M_{\varphi,\mu}=M$ は$C(X;I)$上の汎関数として次の性質 I), II), III), (*) 及び IV) をもつ事は明らかである。

I) Mは連続,

II) $M(a\mathbf{1})=a \quad (\forall a\in I)$,

III) $M(f)\leq M(g) \quad (\forall f\leq g)$.

更にFubiniの定理から

(*) $M_y[M_x[h(x,y)]]=M_x[M_y[h(x,y)]] \quad \forall h\in C(X\times X;I)$

が成立する。こゝにM_x, M_yはそれぞれx, yを変数とする関数にMを作用させる事とする.

特にμの台がX全体ならば

IV) $M(f)<M(g) \quad (\forall f\leq g$ かつ $f\neq g)$

が成立する。

そこで一般に$C(X;I)$上の汎関数Mで上の性質 I), II) 及び III)

を満足するものを $C(X;I)$ 上の mean と定義する。更に性質 IV) を満足するとき狭義単調増加な mean と呼ぶことにする。(*) を bisymmetric equation と呼び、mean M が (*) を満足するとき bisymmetric mean と呼ぶ。

明らかに HLP-mean は bisymmetric mean であるが逆は一般に成立しない。しかし「狭義の単調増加な bisymmetric mean は HLP-mean である」事が成立する。即ち狭義単調増加という条件のもとでは、bisymmetric equation (*) が Hardy-Littlewood-Pólya 型の mean を完全に特徴付けていることになる。

定理　$C(X;I)$ 上の mean M が狭義単調増加で bisymmetric equation (*) を満足しているならば、I 上で定義された狭義単調連続関数 φ と X 上の確率測度 μ でその台が X 全体となるものが存在して

$$M(f) = \varphi^{-1}\left\{\int_X \varphi\circ f \, d\mu\right\} \qquad \forall f \in C(X;I)$$

が成立する。こゝに φ は affine 同値を除いて一意で μ も又一意に決まる。

証明の筋道　まず mean の間の可換性を導入する。M を $C(X;I)$ 上の mean, L を $C(Y;I)$ 上の mean とする (X, Y は

コンパクトな空間)。 MとLが可換であるとはすべての $h \in C(X \times Y; I)$ に対して

$$L_y[M_x[h(x,y)]] = M_x[L_y[h(x,y)]]$$

が成立することとする。この様に定義すればMが bisymmetric mean とはMがM自身と可換なこととなる。

定理の証明は次の3段階に分けられる.

1. <u>HLP-meanと可換なmean</u>　大雑把に言って「HLP-meanと可換なmeanは又HLP-mean」が成立する.

<u>Proposition 1</u>　M, Lをそれぞれ $C(X;I)$ 及び $C(Y;I)$ 上のmeanとする。MとLとが可換でかつLが $C(Y;I)$ 上の point evaluation でない HLP-mean で $L = L_{\varphi,\mu}$ と表現されるとする。このときMも又 $C(X;I)$ 上の HLP-mean で $M = M_{\varphi,\nu}$ と表現される。こゝに ν はX上の確率測度で一意的に決まる。

2. <u>二次元のmean</u>　Xが二点よりなるとき $C(X;I)$ は $I \times I$ と同一視出来て, $C(X;I)$ 上のmeanは $I \times I$ 上の単調増加な連続関数Nで $N(a,a) = a$ $(\forall a \in I)$ となるものになる。これを二次元のmeanと呼ぶ。二次元のmean N が bisymmetric とはすべての $a, b, c, d \in I$ に対して

$$N[N(a,b),N(c,d)]=N[N(a,c),N(b,d)] \quad (b と c とが可換)$$

が成立することである。

次の proposition は証明しようとしている定理の二次元の場合にあたっている。しかしこの結果は J. Aczél の本 [1] の中ですでに知られている。

<u>Proposition 2</u>　$I\times I$ 上の二次元の mean N が狭義単調増加で bisymmetric ならば I 上で定義された狭義単調な連続関数 φ と $0<t<1$ なる t が存在して

$$N(a,b)=\varphi^{-1}\{t\varphi(a)+(1-t)\varphi(b)\} \qquad \forall a,b\in I$$

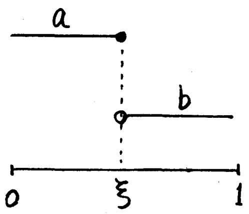
となる。こゝに φ は affine 同値を除いて一意で t も又一意に決まる。

これは次の様にしても示される。まず N が変数に関して対称: $N(a,b)=N(b,a)$ を仮定する。この場合は bisymmetric equation を用いて構成的に φ が作れて $N(a,b)=\varphi^{-1}\{\frac{1}{2}\varphi(a)+\frac{1}{2}\varphi(b)\}$ $(a,b\in I)$ が示される。非対称の場合は、N から出発して帰納的に $N_{n+1}(a,b)=N[N_n(a,b),N_n(a,b)]$ として $\lim_{n\to\infty}N_n(a,b)=N_\infty(a,b)$ を作る。このとき N_∞ が二次元の狭義単調増加な bisymmetric mean で対称であり、更に N_∞ と N とが可換なことが証明できる。よって Proposition 1 を用いればよい。

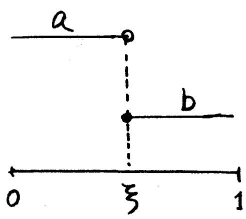
3. $C([0,1];I)$ 上の mean と可換な二次元の mean を作る事

M を $C([0,1];I)$ 上の mean とする。M はもともと $C([0,1];I)$ 上で定義されているが、この定義域を $[0,1]$ 上の I に値をとる半(上半又は下半)連続関数の全体にまで自然に拡張される事に注意する。 $a, b \in I$ と $0 < \xi < 1$ に対して記号 $\hat{x}_{a,b,\xi}$ 及び $\check{x}_{a,b,\xi}$ で $[0,1]$ 上の次の様な上半及び下半連続関数を表わすものとする。

$\hat{x}_{a,b,\xi}$



, $\check{x}_{a,b,\xi}$



<u>Proposition 3.</u> M を $C([0,1];I)$ 上の狭義単調増加な bisymmetric mean とする。このとき高々可算個の $\xi \in (0,1)$ を除いて

$$M(\hat{x}_{a,b,\xi}) = M(\hat{x}_{a,b,\xi}) \qquad \forall a, b \in I$$

が成立する。この様な ξ に対して、この値をもって (a,b) における値として得られる $I \times I$ 上の関数 N は二次元の mean で狭義単調増加かつ bisymmetric である。更に N は M と可換となるだけでなく M と可換な mean とはすべて可換になる。

この proposition の証明の主要な点は N が $I \times I$ 上連続なこと、N が bisymmetric equation を満たし M と可換なこと、N が $I \times I$ 上

狭義単調増加なことの三点である。

以上の三つの proposition を用いて定理の証明は次の様になる。Mを定理で与えられた mean とする。Proposition 1 及び Proposition 2 から M と可換な二次元の mean N で狭義単調増加かつ bisymmetric なものの存在を示せばよい。X が非連結のとき N の作り方は容易である。X が連結のときは（X は二点以上よりなるとしてよい）X から区間 $[0,1]$ の上への連続写像 τ をとって，$M^\tau(g) = M(g\circ\tau)$ $(g \in C([0,1];I))$ として M を $C([0,1];I)$ 上の mean M^τ に移す事が出来る。このとき M^τ は mean として M の性質をすべて受継ぎ M と可換になる。こゝで Proposition 3 を M^τ に適用して N が作れる（詳しい証明は [3] 参照）。

以上.

References

[1] J.Aczél, Lectures on functional equations and their applications, Academic Press, New York and London, 1966.

[2] G.H.Hardy, J.E.Littlewood and G.Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, 1934.

[3] T.Ito and C.Nara, Hardy-Littlewood-Pólya's means of continuous functions, to appear.