数理解析研究所講究録
第504巻 1983年 73-89

多値確率変数に対する大数の強法則

東理大理工　日合文雄（Fumio Hiai）

§1. 序論

大数の法則は中心極限定理と並んで確率論において最も重要な収束定理である。大数の強法則には大別して2通りのものがある。第1は独立同分布な確率変数列に対する大数の強法則であり，第2は平均が等しくあるL^p-ノルム条件をもつ独立な確率変数列に対する大数の強法則である。第1の強法則はバナッハ空間に値をとる確率変数列に対しても一般的に成立する。しかし，第2の強法則はバナッハ空間に値をとる確率変数列に対して無条件には成立しなくて，その成立にはバナッハ空間のある種の幾何学的条件が関連する。

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$を確率測度空間とし，$\mathfrak{X}$をバナッハ空間とする。$L^p(\Omega;\mathfrak{X})$を$\mathfrak{X}$-値のL^p-空間とする（$1\le p<\infty$）。つまり$L^p(\Omega;\mathfrak{X})$は強可測な$f:\Omega\longrightarrow\mathfrak{X}$で$\|f(\cdot)\|\in L^p$を満たすものからなる空間である。バナッハ空間$\mathfrak{X}$が<u>B-凸</u>であると

は，ある$\delta > 0$と整数$k \geq 2$が存在して任意の$x_1, \cdots, x_k \in \{x \in \mathfrak{X} : \|x\| \leq 1\}$に対して

$$\inf_{\varepsilon_i = \pm 1} \| \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i \| \leq (1-\delta) k$$

が成立することである。$\{r_n\}$をランダム符号の列，i.e.，± 1の値を確率$1/2$づつでとる独立同分布な確率変数列とする。$\mathfrak{X}$が<u>タイプp</u> ($1 \leq p \leq 2$) であるとは，$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < \infty$を満たす任意の列$\{x_n\} \subset \mathfrak{X}$に対して$\sum_{n=1}^{\infty} r_n x_n$がa.s.収束することである。これは，ある$C > 0$が存在して任意の$x_1, \cdots, x_n \in \mathfrak{X}$ ($n \geq 1$) に対して

$$E \| \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \|^p \leq C \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p$$

が成立することと同値である。ヒルベルト空間はタイプ2であり，一様凸なバナッハ空間はB-凸である。また$\mathfrak{X}$がB-凸であることと$\mathfrak{X}$がタイプp ($\exists p > 1$) であることは同値である。

バナッハ空間に値をとる確率変数列に対する大数の強法則に関して，主な結果を次にあげておく。

(I) $\{f_n\} \subset L^1(\Omega ; \mathfrak{X})$が独立同分布ならば

$$\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(\omega) - x \| \longrightarrow 0 \ \text{a.s.} \quad (x = E(f_n)).$$

(II) 次の条件は同値である：

(i) $\{f_n\} \subset L^2(\Omega ; \mathfrak{X})$が独立で$E(f_n) = 0$ ($n \geq 1$) かつ$\sup_n E\|f_n\|^2 < \infty$ならば$\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(\omega) \| \longrightarrow 0$ a.s.

(ii) $\mathfrak{X}$ は B-凸である。

(III) $1 \leq p \leq 2$ のとき，次の条件は同値である：

(i) $\{f_n\} \subset L^p(\Omega; \mathfrak{X})$ が独立で $E(f_n) = 0 \ (n \geq 1)$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} E\|f_n\|^p < \infty$ ならば $\|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(\omega)\| \to 0$ a.s.

(ii) $\mathfrak{X}$ はタイプ p である。

上の結果(I)-(III)の証明および関連結果については，Beck [4]，Hoffmann-Jørgensen [13, 14]，Woyczyński [18] などを見よ。

本論では多値確率変数に対する大数の強法則について考察する。ここで多値確率変数とはバナッハ空間の閉集合（とくにコンパクト集合）を値とする確率変数のことであり，バナッハ空間に値をとる通常の確率変数を特別の場合として含む。多値の大数の強法則はまず $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合を値とする独立同分布な確率変数列に対して Artstein-Vitale [2] により得られた。その後の研究としては，Cressie [7]，Hess [11]，Puri-Ralescu [16]，Giné-Hahn-Zinn [10] などがある。これらが扱っている多値の大数の強法則はすべて独立同分布の場合である。本論ではより一般ないくつかの多値の大数の強法則を与える。とくに同分布とは限らない場合も考察する。

§2. 多値確率変数

以下常に$(\Omega, \mathcal{A}, P)$を確率測度空間とし，$\mathfrak{X}$を可分な実バナッハ空間とする。$\mathfrak{X}^*$を$\mathfrak{X}$の共役空間とする。次の記号を用いる：

$$\mathcal{K}(\mathfrak{X}) = \{ X \subset \mathfrak{X} : \text{空でない閉集合} \},$$
$$\mathcal{K}_c(\mathfrak{X}) = \{ X \subset \mathfrak{X} : \text{空でない閉凸集合} \},$$
$$\mathcal{C}(\mathfrak{X}) = \{ X \subset \mathfrak{X} : \text{空でないコンパクト集合} \},$$
$$\mathcal{C}_c(\mathfrak{X}) = \{ X \subset \mathfrak{X} : \text{空でないコンパクト凸集合} \}.$$

$X, Y \in \mathcal{K}(\mathfrak{X})$に対して

$$h(X, Y) = \max\{ \sup_{x \in X} d(x, Y), \sup_{y \in Y} d(y, X) \},$$
$$\| X \| = h(X, \{0\}) = \sup_{x \in X} \| x \|,$$
$$s(X, x^*) = \sup_{x \in X} \langle x, x^* \rangle, \qquad x^* \in \mathfrak{X}^*.$$

$h(X, Y)$はXとYのハウスドルフ距離であり，$s(X, \cdot)$はXの支持函数といわれる。

多値函数$F : \Omega \longrightarrow \mathcal{K}(\mathfrak{X})$は任意の開集合$O \subset \mathfrak{X}$に対して

$$F^{-1}(O) = \{ \omega \in \Omega : F(\omega) \cap O \neq \emptyset \} \in \mathcal{A}$$

のとき可測といわれる。可測な多値函数を多値確率変数（または確率集合）と呼ぶ。p乗可積分なFの選択函数の全体をS_F^pで表わす。すなわち

$$S_F^p = \{ f \in L^p(\Omega; \mathfrak{X}) : f(\omega) \in F(\omega) \ a.s. \}, \quad 1 \le p < \infty.$$

さて

$\mathcal{L}^p[\Omega;K(\mathfrak{X})]=\{F:\Omega\longrightarrow K(\mathfrak{X})$ 可測, $\|F(\cdot)\|\in L^p\}$, $1\leq p<\infty$ とすると, $\mathcal{L}^p[\Omega;K(\mathfrak{X})]$ は 距離 $H_p(F,G)=\{\int_\Omega h(F(\omega),G(\omega))^p dP\}^{1/p}$ により完備距離空間となる。ただし $F(\omega)=G(\omega)$ a.s. のとき $F=G$ とする。さらに

$$\mathbb{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]=\{F\in\mathcal{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]:\text{強可測}\}$$

とする。ここで F が強可測とは F が単純多値函数列の a.s. 極限となることである。これは $N\in\mathcal{A}$, $P(N)=0$ が存在して $\{F(\omega):\omega\in\Omega\setminus N\}$ が $K(\mathfrak{X})$ で可分となることと同値である。ただし $K(\mathfrak{X})$ 上でハウスドルフ距離 h から入る位相を考えている。$\mathcal{C}(\mathfrak{X})$ は h に関して可分だから $F\in\mathcal{L}^p[\Omega;\mathcal{C}(\mathfrak{X})]$ はすべて強可測である。次の包含関係がある:

$$\begin{array}{ccccccc} L^p(\Omega;\mathfrak{X}) \subset \mathcal{L}^p[\Omega;\mathcal{C}_c(\mathfrak{X})] & \subset & \mathbb{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})] & \subset & \mathcal{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})] \\ \cap & & & & \cap \\ \mathcal{L}^p[\Omega;\mathcal{C}(\mathfrak{X})] & & \subset & & \mathcal{L}^p[\Omega;K(\mathfrak{X})] \end{array}$$

$\mathfrak{X}$ が無限次元のとき $\mathbb{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]\neq\mathcal{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]$ が普通である。

今 $K_{bc}(\mathfrak{X})=\{X\in K_c(\mathfrak{X}):\text{有界集合}\}$ とする。$C(U^*)$ を $U^*=\{x^*\in\mathfrak{X}^*:\|x^*\|\leq 1\}$ 上の有界連続函数からなるバナッハ空間とする。$X\in K_{bc}(\mathfrak{X})$ ならば $s(X,\cdot)\in C(U^*)$ である。$\{s(X,\cdot):X\in K_{bc}(\mathfrak{X})\}$ で生成される $C(U^*)$ の閉部分空間を $\hat{\mathfrak{X}}$ で書くと, $X\longmapsto s(X,\cdot)$ により $K_{bc}(\mathfrak{X})$ はバナッハ空間 $\hat{\mathfrak{X}}$ に次のように埋入される:

(i) 埋入は等距離, i.e., $h(X,Y)=\sup_{x^*\in U^*}|s(X,x^*)-s(Y,x^*)|$,

(ii) 和は保存される, i.e., $s(\mathrm{cl}(X+Y),x^*)=s(X,x^*)+s(Y,x^*)$,

(iii) 非負の実数倍は保存される, i.e., $s(\alpha X,x^*)=\alpha s(X,x^*)$, $\alpha\geq 0$.

これにより $\mathbb{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]$ は $L^p(\Omega;\hat{\mathfrak{X}})$ の中に自然に埋入される。この埋入は等距離であり，和および非負の実数倍は保存される。従って $\mathbb{L}^p[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]$ （とくに $\mathcal{L}^p[\Omega;\mathcal{C}_c(\mathfrak{X})]$）に属する多値確率変数はバナッハ空間に値をとる通常の確率変数とみなすことができる。

多値確率変数 $F:\Omega\to K(\mathfrak{X})$ の平均値は F の積分

$$\int_\Omega F\,dP=\left\{\int_\Omega f\,dP : f\in S_F^1\right\}$$

で定義される。多値可測函数の積分は Aumann [3] により導入された。後で必要となる多値積分の結果を次にあげる。さらに詳しくは Debreu [9], Castaing [5], Hiai-Umegaki [12] などを見よ。

$F,G:\Omega\to K(\mathfrak{X})$ は可測で $S_F^1\neq\emptyset$, $S_G^1\neq\emptyset$ とする。

<u>(1°)</u> $\mathrm{cl}\int_\Omega(F\dotplus G)\,dP=\mathrm{cl}\left(\int_\Omega F\,dP+\int_\Omega G\,dP\right)$, ただし $(F\dotplus G)(\omega)=\mathrm{cl}(F(\omega)+G(\omega))$.

<u>(2°)</u> $\mathrm{cl}\int_\Omega\overline{\mathrm{co}}\,F\,dP=\overline{\mathrm{co}}\int_\Omega F\,dP$, ただし $(\overline{\mathrm{co}}\,F)(\omega)=\overline{\mathrm{co}}\,F(\omega)$.

<u>(3°)</u> $s\left(\mathrm{cl}\int_\Omega F\,dP,\ x^*\right)=\int_\Omega s(F(\omega),x^*)\,dP$, $x^*\in\mathfrak{X}^*$.

<u>(4°)</u> $F\in\mathbb{L}^1[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]$ ならば $\mathrm{cl}\int_\Omega F\,dP$ は $F\in L^1(\Omega;\hat{\mathfrak{X}})$ としてとったボホナー積分に等しい。

(5°) $F\in\mathcal{L}^1[\Omega;\mathcal{C}_c(\mathfrak{X})]$ ならば $\int_\Omega F\,dP\in\mathcal{C}_c(\mathfrak{X})$.

(6°) $F\in\mathcal{L}^1[\Omega;K_c(\mathfrak{X})]$ で F の値がすべて弱コンパクトならば $\int_\Omega F\,dP$ は弱コンパクト凸集合である。

$K(\mathfrak{X})$ 上の σ-集合体としてすべての開集合 $O\subset\mathfrak{X}$ に対する $\{X\in K(\mathfrak{X}):X\cap O\neq\emptyset\}$ の全体で生成される σ-集合体を採用し，それを $\mathcal{G}$ とする。多値函数 $F:\Omega\longrightarrow K(\mathfrak{X})$ が可測であることは $(\mathcal{A},\mathcal{G})$ に関して可測であることを意味する。$\mathcal{G}|\mathcal{C}(\mathfrak{X})$ は $\mathcal{C}(\mathfrak{X})$ のボレル σ-集合体と一致し，またすべての開集合 O に対する $\{X\in\mathcal{C}(\mathfrak{X}):X\subset O\}$ の全体でも生成される（[6, Theorem II-10] を見よ）。$\{F_n\}$ を多値確率変数 $F_n:\Omega\to K(\mathfrak{X})$ の列とする。$\{F_n\}$ が独立（または同分布）であるとは $\{F_n\}$ が $(\Omega,\mathcal{A},P)$ から $(K(\mathfrak{X}),\mathcal{G})$ への可測函数列として独立（または同分布）であることである。F_n がすべて $\mathcal{C}(\mathfrak{X})$ に値をとるときは，$\{F_n\}$ の独立性はすべての開集合 $O_1,\cdots,O_n\subset\mathfrak{X}$ $(n\geq 1)$ に対して

$$P\Big(\bigcap_{i=1}^{n}\{\omega:F_i(\omega)\subset O_i\}\Big)=\prod_{i=1}^{n}P(\{\omega:F_i(\omega)\subset O_i\})$$

が成立することと同値である。

$K(\mathfrak{X})$ の中の列に対して，距離 h による収束とは別に，Mosco [15] により導入されたより弱い収束を考える。$\{X_n\}\subset K(\mathfrak{X})$ に対して次のように定める：

$$s\text{-}\liminf X_n=\{x\in\mathfrak{X}:\|x_n-x\|\longrightarrow 0,\ \exists x_n\in X_n,\ n\geq 1\},$$

$w\text{-}\lim\sup X_n = \{x \in \mathfrak{X} : x_k \xrightarrow{w} x,\ \exists x_k \in X_{n_k},\ n_1 < n_2 < \cdots\}$.
$X \in K(\mathfrak{X})$が存在して $s\text{-}\lim\inf X_n = w\text{-}\lim\sup X_n$ のとき
$X_n \longrightarrow X$ と書く。

§3. 大数の強法則

まずいくつかの補題を用意する。

補題1　$\{X_n\} \subset \mathcal{C}(\mathfrak{X})$とする。ある$X \in \mathcal{C}_c(\mathfrak{X})$が存在して
$h(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \overline{co}\, X_i, X) \longrightarrow 0$ ならば、$h(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, X) \longrightarrow 0$.

証明　この補題は$\mathfrak{X}$が有限次元のとき[2]で与えられた。
$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ とおく。$h(\overline{co}\, Y_n, X) \longrightarrow 0$ だから $C \in \mathcal{C}_c(\mathfrak{X})$ が存在して $Y_n \subset C$ $(n \geq 1)$. よって$\{Y_n\}$は$\mathcal{C}(\mathfrak{X})$で相対コンパクトであることが容易にわかる。$Y \in \mathcal{C}(\mathfrak{X})$を$\{Y_n\}$の任意の集積点とし、$h(Y_{n'}, Y) \longrightarrow 0$ となる部分列$\{Y_{n'}\} \subset \{Y_n\}$をとる。$\mathfrak{X}$の点を分離する$\mathfrak{X}^*$の列$\{x_k^*\}$を$\|x_k^*\| \leq 2^{-k}$のようにとり、有界線形写像 Φ, Φ_k $(k \geq 1)$: $\mathfrak{X} \longrightarrow \ell^1$ を次のように定める：

$$\Phi(x) = (\langle x, x_1^* \rangle, \langle x, x_2^* \rangle, \cdots),$$

$$\Phi_k(x) = (\langle x, x_1^* \rangle, \cdots, \langle x, x_k^* \rangle, 0, 0, \cdots), \quad x \in \mathfrak{X}.$$

$\Phi_k(\mathfrak{X})$は有限次元で、

$$h(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} co\, \Phi_k(X_i), \Phi_k(X)) = h(\Phi_k(\overline{co}\, Y_n), \Phi_k(X))$$
$$\leq h(\overline{co}\, Y_n, X) \longrightarrow 0$$

だから $h(\Phi_k(Y_n), \Phi_k(X)) \longrightarrow 0$ $(k \geq 1)$。さらに $h(\Phi_k(Y_{n'}), \Phi_k(Y)) \leq h(Y_{n'}, Y) \longrightarrow 0$. よって $\Phi_k(Y) = \Phi_k(X)$ $(k \geq 1)$. $k \to \infty$ のとき $h(\Phi_k(Y), \Phi(Y)) \longrightarrow 0$, $h(\Phi_k(X), \Phi(X)) \longrightarrow 0$ だから $\Phi(Y) = \Phi(X)$. Φ が1対1だから $Y = X$ を得る。よって X は $\{Y_n\}$ の唯一つの集積点となるから, $h(Y_n, X) \longrightarrow 0$. ■

$\mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) = \{X \subset \mathfrak{X}$: 空でない弱コンパクト凸集合$\}$ とおく。各 $X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ と $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対して, $T(X, x^*) \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ を

$$T(X, x^*) = \{x \in X : \langle x, x^* \rangle = s(X, x^*)\}$$

で定める。

<u>補題2</u> 任意の $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対して, $T(\cdot, x^*) : \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) \to \mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ は $(\mathcal{G}|\mathcal{W}_c(\mathfrak{X}), \mathcal{G}|\mathcal{W}_c(\mathfrak{X}))$-可測である。

<u>証明</u> $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}|\mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ とおく。$\mathfrak{X}$ の任意の開集合は閉球の可算和で書けるから, 任意の閉球 $V = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$ に対して $\{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : T(X, x^*) \cap V \neq \emptyset\} \in \mathcal{G}_0$ を示せばよい。$\mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ から $\mathbb{R}$ への写像 $X \longmapsto s(X, x^*)$ は $\mathcal{G}_0$-可測である。$O_n = \{x : \|x - x_0\| < r + \frac{1}{n}\}$ $(n \geq 1)$ とおいて, $X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ の弱列的コンパクト性から

$$\{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : X \cap V \neq \emptyset\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : X \cap O_n \neq \emptyset\} \in \mathcal{G}_0.$$

さらに任意の閉球 V' に対して同様に $\{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : X \cap V \cap V' \neq \emptyset\} \in \mathcal{G}_0$. よって $\mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ から $\mathcal{W}_c(\mathfrak{X})$ への写像 $X \longmapsto X \cap V$ は

$(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_0)$-可測である。故に

$$\{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : T(X, x^*) \cap V \neq \emptyset\}$$
$$= \{X \in \mathcal{W}_c(\mathfrak{X}) : X \cap V \neq \emptyset,\ s(X \cap V, x^*) = s(X, x^*)\}$$
$$\in \mathcal{G}_0 .$$ ▨

<u>補題3</u>　$F \in \mathcal{L}^1[\Omega ; K(\mathfrak{X})]$ で $\int_\Omega F dP = \{x\}$ ならば，$f \in L^1(\Omega ; \mathfrak{X})$ が存在して $F(\omega) = \{f(\omega)\}$ a.s.

<u>証明</u>　$\mathfrak{X}$ の点を分離する列 $\{x_k^*\} \subset \mathfrak{X}^*$ をとると，(3°) から

$$\int_\Omega s(F(\omega), x_k^*) dP = \langle x, x^* \rangle = \int_\Omega \inf_{x \in F(\omega)} \langle x, x_k^* \rangle dP$$

が成立する。よって $s(F(\omega), x_k^*) = \inf_{x \in F(\omega)} \langle x, x_k^* \rangle$ a.s. $(k \geq 1)$。故に a.s. $\omega \in \Omega$ に対して $F(\omega)$ は1点集合となり，補題が示される。▨

多値確率変数に対する大数の強法則を与える。独立同分布の場合から始める。

<u>定理1</u>　$\{F_n\} \subset \mathcal{L}^1[\Omega ; \mathcal{C}(\mathfrak{X})]$ が独立同分布ならば

$$h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n F_i(\omega), X\right) \longrightarrow 0 \quad \text{a.s.} \quad \left(X = \overline{co}\int_\Omega F_n dP\right).$$

<u>証明</u>　$\{\overline{co} F_n\}$ は $L^1(\Omega ; \hat{\mathfrak{X}})$ の中の確率変数列とみて独立同分布である。$\overline{co} F_n$ の $L^1(\Omega ; \hat{\mathfrak{X}})$ における平均値は (2°)，(4°) から X に等しい。よって §1 の (I) により $h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \overline{co} F_i(\omega), X\right) \longrightarrow 0$ a.s. 従って補題1から $h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n F_i(\omega), X\right) \longrightarrow 0$ a.s. ▨

<u>定理2</u>　$\{F_n\} \subset \mathcal{L}^1[\Omega ; K_c(\mathfrak{X})]$ が独立同分布で各 F_n の

値がすべて弱コンパクトならば

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i(\omega) \longrightarrow X \ \text{a.s.} \quad \left(X = \int_\Omega F_n \, dP \right).$$

証明　$G_n(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i(\omega)$　$(n \geq 1)$ とおく。(6°) から $\int_\Omega F_n dP$ は弱コンパクト凸集合である。任意の $x^* \in \mathfrak{X}^*$ に対して $\{s(F_n(\cdot), x^*)\}$ は同分布だから (3°) より $X = \int_\Omega F_n dP$ は n に関係なく一定である。まず $X \subset s\text{-}\lim\inf G_n(\omega)$ a.s. を示す。X がその strongly exposed points の閉凸包であり（[8, p. 106]）また $s\text{-}\lim\inf G_n(\omega)$ が閉凸だから，X の任意の exposed point が a.s. $\omega \in \Omega$ に対して $s\text{-}\lim\inf G_n(\omega)$ に属することを示せばよい。x を X の任意の exposed point とすると，$T(X, x^*) = \{x\}$ となる $x^* \in \mathfrak{X}^*$ がとれる。補題2から $\{T(F_n(\cdot), x^*)\} \subset \mathcal{L}^1[\Omega; K_c(\mathfrak{X})]$ は独立同分布である。$f \in S^1_{T(F_n(\cdot), x^*)}$ ならば $\int_\Omega f dP \in X$ で $\langle \int_\Omega f dP, x^* \rangle = s(X, x^*)$ となるから $\int_\Omega f dP \in T(X, x^*) = \{x\}$. よって $\int_\Omega T(F_n(\omega), x^*) dP = \{x\}$. 補題3から $f_n \in L^1(\Omega; \mathfrak{X})$ が存在して $T(F_n(\omega), x^*) = \{f_n(\omega)\}$ a.s. 従って $\{f_n\} \subset L^1(\Omega; \mathfrak{X})$ は独立同分布で $\int_\Omega f_n dP = x$ $(n \geq 1)$. §1 の (I) により $\left\| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\omega) - x \right\| \longrightarrow 0$ a.s. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(\omega) \in G_n(\omega)$ a.s. から $x \in s\text{-}\lim\inf G_n(\omega)$ a.s. を得る。

次に $w\text{-}\lim\sup G_n(\omega) \subset X$ a.s. を示す。列 $\{x_j^*\} \subset \mathfrak{X}^*$ を $\langle x, x_j^* \rangle \leq s(X, x_j^*)$ $(j \geq 1)$ ならば $x \in X$ が成立す

るように選べる。各 j に対して $\{s(F_n(\cdot), x_j^*)\} \subset L^1$ は独立同分布で (3°) から $\int_\Omega s(F_n(\omega), x_j^*)\, dP = s(X, x_j^*)$ $(n \geq 1)$。よって $N \in \mathcal{A}$, $P(N) = 0$ が存在して $s(G_n(\omega), x_j^*) \longrightarrow s(X, x_j^*)$ が任意の $j \geq 1$ と $\omega \in \Omega \setminus N$ に対して成立する。$\omega \in \Omega \setminus N$, $x \in w\text{-}\limsup G_n(\omega)$ とすると, $x_k \in G_{n_k}(\omega)$ $(n_1 < n_2 < \cdots)$ がとれて $x_k \xrightarrow{w} x$ となる。

$$\langle x, x_j^* \rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_k, x_j^* \rangle \leq \lim_{k\to\infty} s(G_{n_k}(\omega), x_j^*) = s(X, x_j^*), \quad j \geq 1$$

により $x \in X$ を得る。従って $w\text{-}\limsup G_n(\omega) \subset X$ a.s. ∎

次に同分布を仮定しない場合を考える。

<u>定理3</u>　$\mathfrak{X}$ はタイプ p $(1 < p \leq 2)$ とする。$\{F_n\} \subset \mathcal{L}^p[\Omega; K_c(\mathfrak{X})]$ が独立で各 F_n の値がすべて弱コンパクトであり $\int_\Omega F_n\, dP = X$ $(n \geq 1)$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_\Omega \|F_n(\omega)\|^p dP < \infty$ ならば

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i(\omega) \longrightarrow X \quad \text{a.s.}$$

<u>証明</u>　$G_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i(\omega)$ とおく。X の任意の exposed point x に対して, 定理2の証明と同様にして, 独立な $\{f_n\} \subset L^1(\Omega; \mathfrak{X})$ が存在して $f_n(\omega) \in F_n(\omega)$ a.s., $\int_\Omega f_n\, dP = x$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \int_\Omega \|f_n(\omega)\|^p dP < \infty$. $\mathfrak{X}$ がタイプ p だから §1 の (III) により $\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_i(\omega) - x \right\| \longrightarrow 0$ a.s. よって $x \in s\text{-}\liminf$

$G_n(\omega)$ a.s. 従って $X \subset s\text{-}\liminf G_n(\omega)$ a.s. を得る。また $w\text{-}\limsup G_n(\omega) \subset X$ a.s. の証明も定理2と同様である。■

定理4 $\mathfrak{X}$は有限次元とし，$1<p\leq 2$とする。$\{F_n\} \subset \mathcal{L}^p[\Omega; K(\mathfrak{X})]$ が独立で $\mathrm{co}\int_\Omega F_n\, dP = X \ (n \geq 1)$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\int_\Omega \|F_n(\omega)\|^p dP < \infty$ ならば

$$h\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F_i(\omega),\ X\right) \longrightarrow 0 \text{ a.s.}$$

証明 $\mathfrak{X}$が有限次元のとき，$\{X_n\} \subset \mathcal{C}_c(\mathfrak{X})$ に対して，$h(X_n, X) \longrightarrow 0$ であるための必要十分条件は $X_n \longrightarrow X$ かつ $X \in \mathcal{C}_c(\mathfrak{X})$ ([17])．従って定理4は定理3と補題1から示される。■

最後にいくつかの注意と問題を与えておく。

注意 (1) $\{F_n\} \subset \mathbb{L}^1[\Omega; K_c(\mathfrak{X})]$ が $K_c(\mathfrak{X})$ へのボレル可測函数列として独立同分布ならば，$\{F_n\} \subset L^1(\Omega; \hat{\mathfrak{X}})$ とみることにより $h\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_i(\omega),\ X\right) \longrightarrow 0$ a.s. $\left(X = \mathrm{cl}\int_\Omega F_n\, dP\right)$ が得られる。

(2) $\mathfrak{X}$が回帰的ならば，定理2, 3においてF_nの値が弱コンパクトであるという仮定は当然不要である。

(3) 定理1は [2, 10, 16] の結果をすべて含む。Artstein [1] は補題1の別証を与え定理1を独立に証明している。

問題 (1) 定理2, 3においてF_nの値が弱コンパクトであるという仮定なしに $\frac{1}{n}\,\mathrm{cl}\sum_{i=1}^{n} F_i(\omega) \longrightarrow \mathrm{cl}\, X$ a.s. が成立する

か？

(2) $\mathfrak{X}$ はタイプ p $(1<p\leq 2)$ とする。$\{F_n\}\subset \mathcal{L}^p[\Omega;\mathcal{C}(\mathfrak{X})]$ が独立で $\overline{co}\int_\Omega F_n dP = X$ $(n\geq 1)$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}\int_\Omega \|F_n(\omega)\|^p dP<\infty$ ならば $h(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}F_i(\omega), X)\longrightarrow 0$ a.s. が成立するか？ 補題1から $\{F_n\}\subset \mathcal{L}^p[\Omega;\mathcal{C}_c(\mathfrak{X})]$ の場合を示せばよい。$\mathfrak{X}$ がタイプ p でも $\hat{\mathfrak{X}}$（または $\{s(X,\cdot): X\in \mathcal{C}_c(\mathfrak{X})\}$ で生成される部分空間 $\tilde{\mathfrak{X}}$）はもはやタイプ p でない（B-凸ですらない）から，定理1の証明のように $L^p(\Omega;\tilde{\mathfrak{X}})$ に埋入する方法はうまくいかない。例えば $\mathfrak{X}$ が無限次元ヒルベルト空間のとき，$\mathfrak{X}$ はタイプ2であるが $\tilde{\mathfrak{X}}$ は B-凸ですらない。

文　献

[1] Z. Artstein, Convexification in limit laws of random sets in Banach spaces, Preprint.

[2] Z. Artstein and R. A. Vitale, A strong law of large numbers for random compact sets, Ann. Prob. 3(1975), 879-882.

[3] R. J. Aumann, Integrals of set-valued functions, J. Math. Anal. Appl. 12(1965), 1-12.

[4] A. Beck, On the strong law of large numbers, in Ergodic Theory (F. B. Wright, Ed.), pp. 21-53, Academic

Press, New York, 1963.

[5] C. Castaing, Quelques résultats de compacité liés à l'intégration, Bull. Soc. Math. France 31 (1972), 73-81.

[6] C. Castaing and M. Valadier, Convex Analysis and Measurable Multifunctions, Lecture Notes in Math., No. 580, Springer, 1977.

[7] N. Cressie, A strong limit theorem for random sets, Suppl. Adv. Appl. Prob. 10 (1978), 36-46.

[8] M. M. Day, Normed Linear Spaces, 3rd Edition, Springer, Berlin, 1973.

[9] G. Debreu, Integration of correspondences, in Proc. Fifth Berkeley Sympos. on Math. Statist. and Prob., 1966, Vol. II, Part I, pp. 351-372.

[10] E. Giné, M.G. Hahn and J. Zinn, Limit theorems for random sets: An application of probability in Banach space results, in Probability in Banach Spaces IV (A. Beck and K. Jacobs, Ed.), Lecture Notes in Math. No. 990, pp. 112-135, Springer, 1983.

[11] C. Hess, Théorème ergodique e loi forte des grands nombres pour des ensembles aléatoires,

C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A (1979), 519-522.

[12] F. Hiai and H. Umegaki, Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions, J. Multivariate Anal. 7 (1977), 149-182.

[13] J. Hoffmann-Jørgensen, Probability in Banach spaces, in Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour VI-1976, Lecture Notes in Math., No. 598, pp. 1-186, Springer, 1977.

[14] J. Hoffmann-Jørgensen, Probability and geometry of Banach spaces, in Functional Analysis (D. Butković et al., Ed.), Lecture Notes in Math., No. 948, pp. 164-229, Springer, 1982.

[15] U. Mosco, Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Ad. Math. 3 (1969), 510-585.

[16] M. L. Puri and D. A. Ralescu, Strong law of large numbers for Banach space valued random sets, Ann. Prob. 11 (1983), 222-224.

[17] G. Salinetti and R. J.-B. Wets, On the convergence of sequences of convex sets in finite dimensions, SIAM Review 21 (1979), 18-33.

[18] W. A. Woyczyński, *Geometry and martingales in Banach spaces – Part II: Independent increments*, in *Probability on Banach Spaces* (J. Kuelbs, Ed.), pp. 267–517, Dekker, New York, 1978.