数理解析研究所講究録
第 504 巻 1983 年 167-182

Hilbert 空間上の Gauss 測度の族の位相構造とその応用

東工大 理　河邊 淳 (Jun Kawabe)

§1. 緒論

この論文は実可分 Hilbert 空間上の Gauss 測度の作る空間の位相的性質、例えば収束性等について議論することを目的としている。§2では、この目的に沿った準備が行なわれている。§3では実可分 Hilbert 空間上の Gauss 測度の全体は、Prohorov 距離に関して閉集合であることが示される。さて、Gauss 測度はその平均ベクトルと共分散作用素（定義は§2を参照せよ）によって一意的に決定される。この観点から、Varadhan [10] は、Gauss 測度の列の収束の概念を対応する平均ベクトルと共分散作用素の言葉で記述することに成功した。§4では、この結果を少し強化した。最後に§5では、2つの Hilbert 空間のテンソル積上の Gauss 測度の列に対して、その収束性を論じた。

§2. 準備

この論文を通じて、

H : 実可分 Hilbert空間 $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

$\mathcal{B}(H)$: Borel field of H (i.e. Hのすべての open sets を含む最小のσ-field)

とする. よく知られているように,

$$\int_H \|x\|^2 \mu(dx) < +\infty$$

を満たす確率測度μ on Hに対して,

$$\langle m, x\rangle = \int_H \langle z, x\rangle \mu(dz) \quad , \quad x \in H$$

$$\langle Rx, y\rangle = \int_H \langle z-m, x\rangle\langle z-m, y\rangle \mu(dz) \, , \, x, y \in H$$

なる関係式を満足するベクトル $m \in H$と作用素Rが存在する.
この時、mは平均ベクトル, Rは共分散作用素と呼ばれる.
特に, Rは

「non-negative, self-adjoint でかつ finite trace をもつ」$\cdots(*)$

一般に、$(*)$の条件を満たすH上の作用素は $\mathcal{S}$-operator と呼ばれている. 今, $\mathcal{S}$-operators の全体の集合を$\mathcal{S}$と書くことにすると、集合族

$$\{\{x \in H ;\ \langle Sx, x\rangle < 1\} ;\ S \in \mathcal{S}\}$$

を原点の基本近傍系とするような位相がH上に定義される．この位相は $\mathcal{S}$-topologyと呼ばれ、Hilbert空間上の測度を研究する際に重要である．もちろん、$\mathcal{S}$-topologyはH上のノルムtopologyよりも弱い位相である．

さて、確率測度 μ on Hに対して、その特性函数は、

$$\hat{\mu}(y) = \int_H e^{i\langle z, y\rangle} \mu(dz) \quad , \quad y \in H$$

によって定義される．特に．特性函数が．

$$\hat{\mu}(y) = \exp\left\{ i\langle m, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ry, y\rangle \right\} , \quad y \in H$$

ただし．$m \in H$，Rは $\mathcal{S}$-operator

と表わされる確率測度 μ はGauss測度と呼ばれ、この時mは μ の平均ベクトル、Rは μ の共分散作用素になっている．Gauss測度について注目すべき点は、それが平均ベクトルと共分散作用素によって一意的に決定されるということである．この意味で以下では、平均ベクトルm，共分散作用素Rをもつ Gauss測度のことを $[m, R]$ と書くことにする．

次に．2つの確率測度 μ, ν on Hに対して．convolution "$*$"を

$$\mu * \nu(E) = \int_H \nu(E-x)\mu(dx) \quad , \quad E \in \mathcal{B}(H)$$

と定義すると，明らかに，$\widehat{\mu * \nu}(y) = \hat{\mu}(y) \cdot \hat{\nu}(y)$ となる．また，

$$\bar{\mu}(E) \triangleq \mu(-E), \quad E \in \mathcal{B}(H)$$

$$|\mu|^2 \triangleq \mu * \bar{\mu}$$

によって，記号 $\bar{\mu}$，$|\mu|^2$ を導入しておこう．

以下では，

X：完備可分距離空間

$P(X)$：X 上の確率測度の全体

$D(X)$：X 上の Dirac 測度の全体

とする．ただし，平均 $m \in X$ をもつ X 上の Dirac 測度は，

$$\delta_m(E) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in E \\ 0 & \text{if } x \notin E \end{cases}, \quad E \in \mathcal{B}(X)$$

によって定義される．この時，$P(X)$ は，Prohorov 距離［6］によって，完備可分距離空間となる．この距離による収束を $\mu_n \Rightarrow \mu$ と書くことにすれば，

$$\mu_n \Rightarrow \mu \quad \text{if and only if} \quad \text{すべての~~実数値有界連続函数~~} f \text{ on } X \text{ に対して } \int f(x)\mu_n(dx) \longrightarrow \int f(x)\mu(dx)$$

となることはよく知られている［5］．さらに $D(X)$ は，この距離によって閉集合となり，しかも，X と $D(X)$ は，位相同型となることが知られている（例えば，［5］を見よ）．この論文では，これらの事実を $X = H$ または $X = \mathbb{R}$（$\triangleq$ 実数直線）

の場合に用いるであろう.

以下では $X=\mathbb{R}$ の場合を考える. この場合は確率測度の列の収束と対応する特性函数列の収束との間には、次の Lèvy and Glivenko の定理が示すように、顕著な関係がある.

定理 (Lèvy and Glivenko) μ_n $(n=1,2,\cdots)$ を $\mathbb{R}$ 上の確率測度の列とする. この時
(1) 特性函数列 $\hat{\mu}_n$ が, 原点で連続な函数 φ に各点収束するならば、φ を特性函数とする確率測度 μ が存在して $\mu_n \Longrightarrow \mu$ となる.
(2) 逆に、$\{\mu_n\}$ が確率測度 μ に収束すれば, 特性函数列 $\{\hat{\mu}_n\}$ は $\hat{\mu}$ に各点収束する.

$X=H$ の場合, すなわち無限次元空間上では, 上述の定理は一般には成立しない. §4 でも述べるように, このことが無限次元空間上の測度の収束を考える際の大きな困難となっている. 最後に $X=H$ の場合、convolution "$*$" は, $P(H)$ の距離に関して連続であるという事実を述べておこう.

§3. Gauss 測度の族の位相構造

H 上の Gauss 測度の全体を $G(H)$ とする. Gauss 測度に

ついて，それを代数的に特徴付けようとする試みは，局所コンパクト可換群上のGauss測度については，Parthasarathy, Rao, Varadhan, Sazonov [3], [4] 等によって明らかにされ，実可分Hilbert空間上のGauss測度については，Varadhan [10] によって明らかにされた．そこでこの論文では，$G(H)$の位相的な性質，例えば収束性などについて議論してゆくことにする．次の結果は$G(H)$の空間としての性質を示している．

定理1．　$G(H)$ は closed subset of $P(H)$．

証明．　$\mu_n = [m_n, R_n]$，$\mu_n \Rightarrow \mu$ とする．この時，μ がGauss測度であることを示せばよい．この時，$|\mu_n|^2 = [0, 2R_n]$ でかつ，$|\mu_n|^2 \Rightarrow |\mu|^2$ であるから，

$$\exp\{-\langle R_n y, y\rangle\} \longrightarrow \widehat{|\mu|^2}(y) = |\hat{\mu}(y)|^2 \quad （各点収束）$$

今，$\forall y \neq 0$ in H をとり固定する．この時任意の実数tに対して

$$h_n(t) = \exp\{-\langle R_n y, y\rangle t^2\} \quad , \quad h(t) = |\hat{\mu}(ty)|^2$$

とおくと，$h_n(t) \to h(t)$（tについて各点収束）となる．今，明らかに $h(t)$は，$t=0$で連続であるから，$h(0)=1$に注意すれば，

$$\exists t_0 \neq 0 \quad s.t. \quad h(t_0) \neq 0$$

とできる．よって．$h_n(t_0) = \exp\{-\langle R_n y, y\rangle t_0^2\} \longrightarrow h(t_0)\ (>0)$．
ゆえに．$\lim_{n\to\infty}\langle R_n y, y\rangle$ が存在する．$y=0$ の時は明らかに存在するから以上より，$\forall y\in H$ に対して $\lim_{n\to\infty}\langle R_n y, y\rangle$ が存在する．よって，一様有界性定理より．

$\exists R$; non-negative, self-adjoint bdd. linear operator on H s.t.

$$\lim_{n\to\infty}\langle R_n x, y\rangle = \langle Rx, y\rangle \quad \text{for every } x, y \text{ in } H$$

とできる．

さて．次に $\forall y \neq 0$ in H をとり固定する．今度は任意の実数 t に対して．

$$k_n(t) = \exp\{i\langle m_n, y\rangle t\},\quad k(t) = \hat{\mu}(ty)\exp\{\tfrac{1}{2}\langle Ry, y\rangle t^2\}$$

とおくと，容易にわかるように．

$k_n(t) \longrightarrow k(t)$ （各点収束）

かつ

$k(t)$ は．$t=0$ で連続である．

ここで．$k_n(t)$ は．平均 $\langle m_n, y\rangle$ の $\mathbb{R}$ 上の Dirac 測度 $\delta_{\langle m_n, y\rangle}$ の特性函数であることに注意すれば．Lévy and Glivenko の定理より．$\mathbb{R}$ 上の確率測度 λ が存在して．$\delta_{\langle m_n, y\rangle} \Longrightarrow \lambda$ とできる．ところが．§2 で述べたように．$\mathbb{R}$ 上の Dirac 測度の全体は閉集合でかつ $\mathbb{R}$ と位相同型であることに注意すれば．ある実数 α が存在して、$\langle m_n, y\rangle \longrightarrow \alpha$ (as $n\to\infty$) とできる．よって．$\forall y\in H$ に対して $\lim_{n\to\infty}\langle m_n, y\rangle$ が存在するから再び．一様有界性定理より．

$\exists m \in H$ s.t. $\lim_{n\to\infty}\langle m_n, y\rangle = \langle m, y\rangle$ for every $y \in H$

とできる. よって.

$$\hat{\mu}(y) = \exp\left\{ i\langle m, y\rangle - \frac{1}{2}\langle Ry, y\rangle \right\}, \quad y \in H$$

となることがわかる. よって μ が Gauss 測度であることを示すには. R が trace class であることを示せば十分である. そこで. $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ なる ε をとり固定する. $\hat{\mu}(\cdot)$ は. 特性函数ゆえ、Bochner−Minlos の定理 (例えば. [2] を見よ) より.

$\exists S_\varepsilon$: S-operator s.t.

$$1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle Ry, y\rangle\right\} \leq \langle S_\varepsilon y, y\rangle + \varepsilon \quad \text{for all } y \in H$$

とできる. この時. S_ε は. strictly−positive と仮定してよい.

(第1段) $\langle S_\varepsilon y, y\rangle < \varepsilon$ の時.

$$1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle Ry, y\rangle\right\} < 2\varepsilon$$

$$\therefore \langle Ry, y\rangle < 2\log\frac{1}{1-2\varepsilon} \triangleq c \quad (>0)$$

(第2段) $\forall x \neq 0$ in H をとり固定して $y = \left(\frac{\varepsilon}{2\langle S_\varepsilon x, x\rangle}\right)^{\frac{1}{2}} x$ とおくと $\langle S_\varepsilon y, y\rangle < \varepsilon$ となるので. (第1段) で示したことより.

$$\langle Rx, x\rangle \leq \left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)\langle S_\varepsilon x, x\rangle$$

となる. 上式は. $x = 0$ の時は明らかに成り立つ. ここで正定数 $\frac{2c}{\varepsilon}$ は x に無関係であることを注意しておく. そこで $\{e_i\}$ を H の正規直交基底 (以下. C.O.N.S. と略す) とすると.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle Re_i, e_i\rangle \leq \left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\langle S_\varepsilon e_i, e_i\rangle = \left(\frac{2c}{\varepsilon}\right)\mathrm{trace}(S_\varepsilon) < +\infty$$

よって，Rはtrace classとなり，以上で証明が完了する． ■

注意：　上の証明の中でRがtrace classとなることを示す部分の手法は既に知られている（例えば，[2]，[5]を見よ）が，興味のある手法なので，あえて詳細に述べた．

§4.　Gauss測度の収束性

§2でも述べたように，Gauss測度は，その平均ベクトルと共分散作用素によって一意的に決定される．この観点からGauss測度の種々の性質，例えば絶対連続性とか，supportの問題などは，完全に平均ベクトルと共分散作用素を用いて記述することができることが知られている．（例えば，[1]，[7]を見よ）．　これらはまさに，測度論の問題を函数解析の言葉で解釈することが可能であることを示している．ここでは，Gauss測度の列の収束の概念をそれらの平均ベクトルと共分散作用素によって記述することを考える．

実数直線上のGauss測度の列 $\mu_n = [m_n, \sigma_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ とGauss測度 $\mu = [m, \sigma]$（ただし，m_n, mは平均，σ_n, σは分散）に対しては，容易にわかるように，

$$\mu_n \Rightarrow \mu \quad \text{if and only if} \quad m_n \to m \text{ かつ，} \sigma_n \to \sigma$$

が成り立つ．この事実を示すには，Lévy and Glivenko の定理が用いられる．実可分 Hilbert 空間上の Gauss 測度の収束の概念を平均ベクトルと共分散作用素の言葉で記述する際の困難は，Lévy and Glivenko の定理が成立しないことに起因している．詳しく言えば，特性函数列が各点収束しても，対応する測度の列は，必らずしも収束しない．そこで，特性函数列の収束性から，対応する測度の列の収束を導びき出すためには，対応する測度の列に対してコンパクト性を保証する条件を課すことが，必要となってくる．実際には，測度の列が相対 compact (i.e. 任意の点列が収束する部分列をもつ) であれば，特性函数列の各点収束から，対応する測度の列の収束性を導びき出すことが出きる．これらのことは，Prohorov [6] の中で述べられている

Varadhan [10] は，Gauss 測度の列が相対 compact であるための条件を函数解析の言葉で記述することに成功し，この結果を用いて，Gauss 測度の列の収束の概念を対応する平均ベクトルと共分散作用素の言葉で記述した．これらの結果を定理の形として述べるために，次の定義をしておこう．

$\{S_\alpha\}$ は，$\mathcal{S}$-operators から成る族とする．$\{S_\alpha\}$ は，次の条件 (i), (ii) を満す時，compact であるという．

(i) $\sup_\alpha \mathrm{trace}(S_\alpha) < +\infty$

(ii) 適当な C.O.N.S. $\{e_i\}$ in H に対して，

$$\lim_{N\to\infty} \sup_\alpha \sum_{i=N}^{\infty} \langle S_\alpha e_i, e_i \rangle = 0$$

定理2．（Varadhan）$\mu_n = [m_n, R_n]$ $(n=1,2,\cdots)$ とする．この時，次の条件は同値：

(1) $\{\mu_n\}$ は，相対 compact．

(2) $\{m_n\}$ は，相対 compact，かつ，$\{R_n\}$ は，compact

定理3．（Varadhan）$\mu_n = [m_n, R_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，$\mu = [m, R]$ とする．この時，次の条件は同値：

(1) $\mu_n \Longrightarrow \mu$

(2) $m_n \longrightarrow m$（強収束），$R_n \longrightarrow R$（weak operator top.）かつ，$\{R_n\}$ は，compact

さて，われわれのこの§での目的は，定理3の結果を少し強化することにある．すなわち，定理3の仮定(1)から，$R_n \longrightarrow R$（一様収束）を導びき出す．

定理4．$\mu_n = [0, R_n]$ $(n=1,2,\cdots)$，$\mu = [0, R]$ とする．この時 $\mu_n \Rightarrow \mu$ ならば，$R_n \longrightarrow R$（一様収束）．

証明．定理3より，$R_n \longrightarrow R$（weak operator top.）であるから，一様有界性定理より，$\{\|R_n\|\}$ は，有界である．今，$\mu_n \Rightarrow \mu$ であるから，[5 ; p.171, Theorem 4.4] より，

$$\exp\left\{-\frac{1}{2}\langle R_n x, x\rangle\right\} \longrightarrow \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle Rx, x\rangle\right\} \text{ uniformly over every bdd. spheres.}$$

である．よって，以下では，

$\langle R_n x, x\rangle \longrightarrow \langle Rx, x\rangle$ uniformly over every bdd. spheres

を示す．そこで，任意に bdd. sphere B をとり固定する．今，
$f_n(x) = -\frac{1}{2}\langle R_n x, x\rangle$，$f(x) = -\frac{1}{2}\langle Rx, x\rangle$ とおくと，

$$0 \leqq \langle R_n x, x\rangle \leqq \|R_n\|\|x\|^2, \quad 0 \leqq \langle Rx, x\rangle \leqq \|R\|\cdot\|x\|^2$$

であるから，ある定数 $M > 0$ が存在して，

$$-M \leqq f_n(x), f(x) \leqq 0 \quad \text{for all } n, \text{ all } x \in B$$

とできる．よって，

$$\frac{1}{e^M} \leqq e^{f_n(x)}, e^{f(x)} \leqq 1.$$

ここで，$\phi(t) = \log t$ は $\left[\frac{1}{e^M}, 1\right]$ 上では一様連続であることに注意すれば，$f_n(x) \longrightarrow f(x)$ uniformly over B となる．
よって，$\langle R_n x, x\rangle \longrightarrow \langle Rx, x\rangle$ uniformly over B．今，特に，
$B = \{x \in H : \|x\| \leqq 1\}$ とおくと，

$$\|R_n - R\| = \sup_{x\in B}\left|\langle (R_n - R)x, x\rangle\right|$$

となるから，これより，$R_n \longrightarrow R$（一様収束）が示される．■

§5. Gauss 測度のテンソル積

H_1 : 実可分 Hilbert 空間　$\|\cdot\|_1 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_1}$

H_2：実可分 Hilbert 空間　$\|\cdot\|_2 = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_2}$

$H_1 \otimes H_2$：　H_1とH_2のテンソル積によって得られた実可分 Hilbert空間　$\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$

とする．さて，この§では，$H_1 \otimes H_2$ 上の Gauss 測度について考察するのであるが，一般の Gauss 測度について議論するのは，困難であるので，以下で述べるような特別な形の Gauss 測度について，その収束性を論じることにする：

$\mu = [\,x, R\,]$；　Gauss 測度 on H_1

$\nu = [\,y, S\,]$；　Gauss 測度 on H_2

とする．この時，$R \otimes S$ は再び $H_1 \otimes H_2$ 上の $\mathcal{S}$-operator となり，$\mathrm{trace}(R \otimes S) = (\mathrm{trace}R)(\mathrm{trace}S)$ が成り立つ．このことから，平均ベクトルとして $x \otimes y$，共分散作用素として $R \otimes S$ をもつ Gauss 測度が一意的に存在することがわかるので，それを，$\mu \hat{\otimes} \nu$ と書くことにする．i.e. $\mu \hat{\otimes} \nu = [\,x \otimes y, R \otimes S\,]$ である．この時，§4 で述べた結果を用いて，次の定理を示すことができる．

定理5.　μ_n $(n=1,2,\cdots)$，μ は Gauss 測度 on H_1，ν_n $(n=1,2,\cdots)$，ν は Gauss 測度 on H_2 とする．この時，

$\mu_n \Longrightarrow \mu$ かつ $\nu_n \Longrightarrow \nu$ ならば，$\mu_n \hat{\otimes} \nu_n \Longrightarrow \mu \hat{\otimes} \nu$

証明. $\mu_n = [a_n, R_n]$, $\mu = [a, R]$, $\nu_n = [y_n, S_n]$, $\nu = [y, S]$ とおくと, 定理3, 定理4 より, $a_n \otimes y_n \longrightarrow a \otimes y$ (強収束) $R_n \otimes S_n \longrightarrow R \otimes S$ (一様収束). よって, 残っている仕事は, $\{R_n \otimes S_n\}$ が compact となることを示すことである. まず, $\{R_n\}$, $\{S_n\}$ は compact 故に,

$$\sup_n \operatorname{trace}(R_n \otimes S_n) \leqq (\sup_n \operatorname{trace} R_n)(\sup_n \operatorname{trace} S_n) < +\infty .$$

次に, $\{e_i\}$ を c.o.n.s. in H_1, $\{f_j\}$ を c.o.n.s. in H_2 とすると, $\{e_i \otimes f_j\}$ は c.o.n.s. in $H_1 \otimes H_2$ となる. この時,

$$0 \leqq \sup_n \sum_{i,j=N}^{\infty} \langle (R_n \otimes S_n)(e_i \otimes f_j), e_i \otimes f_j \rangle$$

$$\leqq \left(\sup_n \sum_{i=N}^{\infty} \langle R_n e_i, e_i \rangle_1 \right) \left(\sup_n \sum_{j=N}^{\infty} \langle S_n f_j, f_j \rangle_2 \right)$$

上式において, $N \to \infty$ とすると, 最右辺は, 0 に近づく.

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \sup_n \sum_{i,j=N}^{\infty} \langle (R_n \otimes S_n)(e_i \otimes f_j), e_i \otimes f_j \rangle = 0$$

よって, $\{R_n \otimes S_n\}$ が compact であることが示された. ■

参考文献

[1] Ito, K., The topological support of Gauss measures on Hilbert space, Nagoya Math. J. 38 (1970), 181–183.

[2] Kuo, H. H., Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463 (1975), Springer-Verlag.

[3] Parthasarathy, K.R., Rao, R. R. and Varadhan, S.R.S., Probability distributions on locally compact abelian groups, Illinois. J. Math. 7 (1963), 337-369.

[4] Parthasarathy, K.R. and Sazonov, V.V., On the representation of infinitely divisible distributions on locally compact abelian groups, Theor. Prob. Appl. 9 (1964), 118-122.

[5] Parthasarathy, K.R., Probability measures on metric spaces, Academic Press, 1967.

[6] Prohorov, Yu.V., Convergence of random processes and limit theorems in probability theory, Theor. Prob. Appl. 1 (1956), 157-214.

[7] Rao, C.R. and Varadarajan, V.S., Discriminations of Gaussian processes, Sankhya Ser. A 25 (1963), 303-330.

[8] Sazonov, V., A remark on characteristic functionals, Teor. Ver. i ee Prim. 3, (1958), 201-205.

[9] Umegaki, H. and Bharucha-Reid, A.T., Banach space-valued random variables and tensor products of Banach

spaces, J. Math. Anal. Appl. 31 (1970), 49–67.
[10] Varadhan, S.R.S., Limit theorems for sums of independent random variables with values in a Hilbert space, Sankhyā 24. (1962), 213–238.
[11] Yanagi, K., On some properties of Gaussian channels, J. Math. Anal. Appl. 88 (1982), 364–377.