数理解析研究所講究録
第504巻 1983年 183-190

r のぼすい.

GAUSSIAN MEASURES AND OPERATORS ON HILBELT SPACES

東工大 理　　明石重男 (Shigeo Akashi)

§1. 緒論

このノートでは，信号解析を函数解析の分野で議論することを目的とする．ここで扱う信号は実数の閉区間$[a, b]$を信号の測定時間間隔とし，この上で有限のエネルギーを持つ信号全体のなす集団を議論の対象とする．すなわち，数学的には区間$[a, b]$上で2乗可積分なLebesgue可測関数の全体のなすHilbert空間が，我々の議論の対象となる．信号の工学的論議を目的とする訳ではないので，直ちに数学的な信号解析に入ることにする．信号解析固有の用語などは既知として話しを進めたい．（例えば，文献[1～3,7]などを参照されたい．）

§2. 本論

いま，$\mathcal{H} \triangleq L^2[a,b]$として，入力信号空間$\mathcal{H}$から出力信号空間$\mathcal{H}$への信号の伝送が，恒等作用素$I$によって成される場合を考える．しかし，$a\in\mathcal{H}$を入力した時，出力側では受信信号が$Ia=a$として受け取られることは少なく，一般に雑音$x\in\mathcal{H}$が加わり，$a+x$として受信される．ここで我々は，$x$の分布が$\mathcal{H}$上の確率測度$\mu$によって決定される場合を取り扱う．この時，次の問題を考える．Hilbert空間$\mathcal{H}$の状態ベクトルの集合を$S(\mathcal{H})\triangleq\{\varphi\in\mathcal{H}:\|\varphi\|=1\}$とする．いま，$\varphi\in S(\mathcal{H})$を1つ固定する．信号を入力する側は，$\mathbb{C}\varphi\triangleq\{c\varphi:c\in\mathbb{C}\}$の中から信号を選んで送ることにする．入力された信号が$c\varphi$である時，出力信号には雑音が加わり$c\varphi+x$となる．ここで信号を受信する側は，出力信号$c\varphi+x$のφ方向への射影成分を入力信号と解釈するものとする．すなわち，

$c\varphi$ -------- 入力信号　　$c\varphi+x$ ------- 出力信号

$c\varphi+(\varphi\otimes\varphi)x$ ---------- 受信側が入力されたと
$\quad\|$
$c\varphi+\langle x,\varphi\rangle\varphi$　　判断する信号

の様になる．以上が，状態ベクトルφを用いた場合の，信号のシンプルな伝送システムであるが，この伝送方法は，$S(\mathcal{H})$からのφの選び方に応じて定まるものである．従って，ここ

では，雑音による影響を受け易い伝送システムを与える φ，影響を受けにくい伝送システムを与える φ は，どのようなものかについて調べてみる．但し，ここで伝送システムが，雑音による影響を受け易い場合とは，$|\langle x, \varphi\rangle|$ の値を大きくする x が高頻度に出る場合を，受けにくい場合とは，$|\langle x, \varphi\rangle|$ の値を小さくする様な x しか出現しない場合をいう．

この問題に対して，次の様に考えることができる．まず R を，$\mathcal{H}$ 上の作用素で，$R^* = R \geq 0$，$\overline{\mathrm{range}[R]} = \mathcal{H}$ を満たすものとする．$S(\mathcal{H})$ から φ を1個取り出して固定する．この時，$\mathcal{H}$ 上の確率測度 μ の φ 方向への射影を

$$\mu_\varphi(C) \triangleq \mu\{\psi \in \mathcal{H} : \langle \psi, \varphi\rangle \in C\}$$

（但し，C は $\mathbb{R}$ の Borel 集合）で定める．これは雑音の φ 方向への分布を表わしていると解釈できる．なお我々が取り扱う確率測度 μ は，次の条件（1）～（4）を満足するとする：

(1) $\displaystyle\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 \mu(dx) < \infty$

(2) $\mu_\varphi \ll m_0$，m_0 は $\mathbb{R}$ 上の Lebesgue 測度

(3) $d\mu_\varphi / d m_0 \in L^2(\mathbb{R})$

(4) μ の共分散作用素 $= R$

条件（2）は m_0 に依存し，（4）は作用素 R に依存するので，（1）～（4）を満たす $\mathcal{H}$ 上の確率測度の全体を $\mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$

で表わす．そして状態ベクトルφを用いた場合の伝送システムに対する雑音の影響を，μ_φの微分エントロピーを用いて，

$$S(\mu_\varphi) \triangleq \int_{\mathbb{R}} -\frac{d\mu_\varphi}{dm_0} \log \frac{d\mu_\varphi}{dm_0}\, dm_0$$

で評価することにする．以下、我々は次の命題を示す．

命題．　$S(\mathcal{H})$からφを1つ取り出し固定する．この時，

$$\begin{aligned} N_\varphi &\triangleq \sup\{S(\mu_\varphi) : \mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)\} \\ &= \frac{1}{2} \log\{(2\pi e) \langle R\varphi, \varphi\rangle\} \end{aligned}$$

が成り立つ．ここで，共分散作用素Rのスペクトル分解を

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \otimes e_k,\quad 0 < \lambda_k \downarrow 0\ ,\quad \{e_k\} : \mathcal{H}\text{の基底}$$

と表わした時，数列$\{Ne_k\}$は単調減少となる．

以下，準備として補題を述べる．

補題1．　pを$\mathbb{R}$上の確率測度で，$p \ll m_0$，平均$=0$，分散$=\sigma^2$，かつ$dp/dm_0 \in L^2(\mathbb{R})$を満たすものとする．この時，常に次の不等式が成立する：

$$S(p) = \int_{\mathbb{R}} -\frac{dp}{dm_0} \log \frac{dp}{dm_0}\, dm_0 \leq \frac{1}{2} \log(2\pi e \sigma^2)$$

なお，等号を成立させる確率測度 p は，平均 $=0$，分散 $=\sigma^2$ である Gauss 測度であり，かつそれに限られる．つまり，

$$\frac{dp_G}{dm_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}$$

を満たす p_G．

証明．　p，q を2つの確率測度とした時，

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{dm_0} \log \frac{dp}{dm_0}\, dm_0 \geq \int_{\mathbb{R}} \frac{dp}{dm_0} \log \frac{dq}{dm_0}\, dm_0$$

が成り立ち，等号が成立するのは $p=q$ の場合に限られることを用いる．

$$\int_{\mathbb{R}} -\frac{dp}{dm_0} \log \frac{dp}{dm_0}\, dm_0 \leq \int_{\mathbb{R}} -\frac{dp}{dm_0} \log \frac{dp_G}{dm_0}\, dm_0$$

$$= \int -\frac{dp}{dm_0}\left\{-\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{t^2}{\sigma^2}\right\} dm_0$$

$$= \frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) + \int_{\mathbb{R}} \frac{t^2}{2\sigma^2}\frac{dp}{dm_0}\, dm_0$$

$$= \frac{1}{2}\log(2\pi e\sigma^2)$$

補題2．　状態ベクトル $\varphi \in S(\mathcal{H})$ と確率測度

$\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$ をそれぞれ与える。この時，次のことがいえる：

μ の φ 方向への射影 μ_φ の平均 $= 0$，分散 $= \langle \varphi, R\varphi \rangle$

証明． μ_φ の平均は，

$$\int_{\mathbb{R}} t\,\mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle t\varphi, \varphi \rangle \mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle t\varphi, \varphi \rangle \mu((dt)\varphi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}\varphi} \langle x, \varphi \rangle \mu(dx) = \int_{\mathcal{H}} \langle x, \varphi \rangle \mu(dx) = 0$$

μ_φ の分散は，

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 \mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, t\varphi \rangle \langle \varphi, t\varphi \rangle \mu_\varphi(dt) = \int_{\mathbb{R}} \langle \varphi, t\varphi \rangle^2 \mu((dt)\varphi)$$

$$= \int_{\mathbb{R}\varphi} \langle \varphi, x \rangle \langle \varphi, x \rangle \mu(dx) = \int_{\mathcal{H}} \langle \varphi, x \rangle^2 \mu(dx)$$

$$= \langle \varphi, R\varphi \rangle$$

以上の補題をもとに命題の証明を行なう．

命題の証明． いま，平均ベクトル $= 0$，共分散作用素 $= R$ をもつ $\mathcal{H}$ 上の Gauss 測度を μ_G とする．この時，明らかに，$\mu_G \in \mathcal{P}(\mathcal{H}, m_0, R)$，また，$\mu_G$ の φ 方向への射影

$(\mu_G)_\varphi$ は，平均 $=0$，分散 $=\langle\varphi, R\varphi\rangle$ を持つ $\mathbb{R}$ 上の Gauss 測度であるから，補題1より，

$$S(\mu_\varphi) \leq S(\{\mu_G\}_\varphi) = \frac{1}{2}\log(2\pi e\langle\varphi, R\varphi\rangle^2)$$

が成り立つことがわかる．上述の式に共分散作用素 R のスペクトル分解の式を代入すると，

$$S(\mu_\varphi) = \frac{1}{2}\log\left(2\pi e\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\langle\varphi, e_k\rangle^2\right)$$

故に，$\varphi = e_k$ とすると上の式より，$N_{e_k} = \frac{1}{2}\log(2\pi e\lambda_k)$ となり，$\{N_{e_k}\}$ は単調減少数列である．

REferences

[1] Baker, C. R., Joint measures and cross-covariance operators, Trans. Amer. Math. Soc. 186(1973),273-289.

[2] Baker, C. R., Calculation of the Shannon information, J. Math. Anal. Appl. 69(1979),115-123.

[3] Kuo, Hui-Hsing, Gaussian measures in Banach spaces, Lecture Notes in Math. 463(1975), Springer-Verlag.

[4] Schatten, R.,Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, 1970.

[5] Shannon, C. E., A mathematical theory of communication, Bell System Tech. J. 27(1948), 379-423 and 623-656.

[6] Umegaki, H., Absolute continuity of infotmation channels, J. Math. Anal. Appl. 88(1982) 364-377.

[7] 梅垣壽春, 大矢雅則; 量子論的エントロピー, 情報理論の函数解析的基礎II, 共立出版, (近刊).