

ARIMA processes における種々の統計量の漸近的
性質について

東京工大・理 矢島美寛 (Yoshihiro Yajima)

§ 1. 序

確率過程 $\{W_t\}$ が、次式をみたす時、ARIMA(p, d, q)
 $\times (P, D, Q)_s$ process と呼ばれる。(Box and Jenkins (1976))

$$\phi(B)\Phi(B^s)\nabla^d\nabla_s^D W_t = \theta(B)\Theta(B^s)e_t,$$

(i) $\{e_t\}$; i. i. d. $N(0, \sigma_e^2)$,

(ii) $BW_t \stackrel{\Delta}{=} W_{t-1}$, $\nabla \stackrel{\Delta}{=} 1 - B$, $\nabla_s \stackrel{\Delta}{=} 1 - B^s$,

(iii) $\phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^p \phi_i B^i$, $\theta(B) = 1 - \sum_{i=1}^q \theta_i B^i$,
 $\Phi(B^s) = 1 - \sum_{i=1}^P \Phi_i B^{is}$, $\Theta(B^s) = 1 - \sum_{i=1}^Q \Theta_i B^{is}$,

(iv) $\phi(z)$, $\theta(z)$, $\Phi(z)$, $\Theta(z)$ はすべて単位円外に
根をもつ。

Box-Jenkins の identification の方法では、sample autocorrelation,
sample partial autocorrelation が、主要な道具となる。

しかし非定常過程の場合、定常の時とは異なり、エルゴード
性、中心極限定理が成立せず、これらの統計量の性質はあま

(i) 知られていない。(注. 非定常過程においては、時点ごとに、真の autocorrelation, partial autocorrelation は変化する。本論では、定常過程において定義されたのと、同様の方法で構成された統計量を、非定常の際にも便宜的に sample autocorrelation, sample partial autocorrelation と呼ぶ。)

ここでは Hasza and Fuller (1979) ($d=2, D=0$), (1982) ($d=1, D=1$) の用いた方法を一般化することにより、一般の d, D について、これらの統計量の漸近的性質を明らかにする。またこれらの結果に関連する、二, 三の応用例について報告する。

§ 2. The sample autocorrelations and partial autocorrelations

従来、sample autocorrelation については、Hasza (1980) が、 $d=1, P=D=Q=0$ の場合を、sample partial autocorrelation については、Hamilton and Watts (1978) が、 $d=D=0$ (stationary) の場合を、各々論じている。ここでは一般の D 及び d について考察する。

仮定 (一般性を失わない)

(i) $\Phi(B^s) \equiv \Theta(B^s) \equiv 1$ (i.e. $P=Q=0$)

(ii) ここで考える ARIMA $(p, d, q) \times (0, D, 0)_s$ モデルは、
 □ 初期条件として、確率変数の集合、 $\{W_k; -Ds-d+1$

$\leq t \leq 0$ } $st EW_t^2 < \infty$ と、確率変数列 $\{e_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$
 i.i.d. $N(0, \sigma_e^2)$ とが、与えられ、

$$\phi(B) \nabla^d \nabla_s^D W_t = \theta(B) e_t, \quad t \geq 1,$$

をみたす W_t を意味する。

本論での目的のためには、以下で定義する $D_T' W_T' W_T D_T'$
 の漸近分布が必要となる。 W_T は $(T - DS - d) \times (DS + d)$ の行
 列で、その (i, j) 要素は、

$$\nabla^d \nabla_s^{D-d^*} W_{DS+d+i-j}, \quad (j^*-1)S+1 \leq j \leq j^*S, \quad 1 \leq j^* \leq D,$$

$$\nabla^{d-j^*} W_{DS+d+i-j}, \quad i = DS + j^*, \quad 1 \leq j^* \leq d.$$

一方 D_T は、 $(DS+d) \times (DS+d)$ の対角行列で、その (i, i) 要素は

$$T^{i^*}, \quad (i^*-1)S+1 \leq i \leq i^*S, \quad 1 \leq i^* \leq D,$$

$$T^{D+i^*}, \quad i = DS + i^*, \quad 1 \leq i^* \leq d.$$

W を、 $D_T' W_T' W_T D_T'$ が法則収束 ($T \rightarrow \infty$) する分布をもつ、
 random 行列とする。(具体的な形は、最後の Appendix で
 与える。)

Sample autocorrelations

観測値を、 $\{w_1, w_2, \dots, w_T\}$ として、sample autocorrelation
 を、

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T-k} (w_t - \bar{w}_T)(w_{t+k} - \bar{w}_T)}{\sum_{t=1}^T (w_t - \bar{w}_T)^2}$$

で定義する。ここで $\bar{w}_T = \sum_{t=1}^T w_t / T$.

定理 1 $X_t \sim \nabla^d \nabla_S^D W_t$ (stationary ARMA process)

$$\gamma(k) \sim E X_t X_{t+k}$$

(i) $D=1, d=0,$

$$\hat{\gamma}(k) \xrightarrow{L} Z_1(k^*), \quad k = nS + k^*, \quad 0 < k^* \leq S-1,$$

$$T\{1 - \hat{\gamma}(k)\} \xrightarrow{L} nZ_2 + f(n)Z_3, \quad k = nS.$$

(ii) $D \geq 2, d=0,$

$$\hat{\gamma}(k) \xrightarrow{L} Z_1(k^*), \quad k = nS + k^*, \quad 0 < k^* \leq S-1,$$

$$T\{1 - \hat{\gamma}(k)\} \xrightarrow{L} nZ_4, \quad k = nS.$$

(iii) $D \geq 1, d \geq 1,$

$$T\{1 - \hat{\gamma}(k)\} \xrightarrow{L} kZ_5.$$

$Z_1(k^*), Z_2, 2 \leq i \leq 5$ は確率変数で W の各要素、及び $S_3(m, k), \lambda_j, 0 \leq j \leq S-1$, (各 λ_j Appendix で具体的に定義) を用いて、表現できる。 $f(n) \sim \sum_{i=-n+1}^{n-1} (n-|i|)\gamma(is)/2$

Remark 1

(i) $Z_1(k^*), Z_2 \sim Z_5$ はすべて、 $\frac{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} V_i A_{ij} V_j}{\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} V_i B_{ij} V_j}$ という形である。 $\{V_i\}$ は、i.i.d. $N(0, \sigma_v^2)$ 。 A_{ij}, B_{ij} は定数で、解析的に表現可能であるが非常に複雑である (分母は w.p. 1 で non-zero)

(ii) 定理より $\hat{\gamma}(k)$ の形状に因り、以下の事がわかる。

(a) $d \geq 1, D \geq 1$ の時 $\rho\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\gamma}(k) = 1, \forall k$. そして k が増大する時、Linearに減衰する。(傾きはサンプルに

依存する。)

(b) $d=0, D \geq 2$ の時、 $p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\gamma}(k) = 1, k = ns$. $\hat{\gamma}(ns)$

は n に関して、 I inear に減衰。 $k = k' \neq 0 \pmod{s}$ の

時、 $\hat{\gamma}(k), \hat{\gamma}(k')$ は、同じ分布へ収束

(c) $d=0, D=1$ の時、 $p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\gamma}(k) = 1, k = ns$. 左たし

$\hat{\gamma}(ns)$ は、 n に関して I inear に減衰するとはかぎるな

い。($f(n)$ の影響) $\{X_t\}$ が $MA(\varphi)$ process ($\varphi < s$)

等であれば、 $f(n) = \frac{n}{2} f(0)$ となり、 I inear に減衰。

(iii) 定理 1 で、 $s=1$ とおけば、 $d=D=0$ (stationary) を

除いて、すべての場合を尽くしている。

Sample partial autocorrelation

$\{\hat{\beta}_1(k), \hat{\beta}_2(k), \dots, \hat{\beta}_k(k)\}$ を、

$$\sum_{t=k+1}^T \{W_t - \sum_{i=1}^k \beta_i(k) W_{t-i}\}^2 / (T-k)$$

を最小にする、 $\{\beta_1(k), \beta_2(k), \dots, \beta_k(k)\}$ とする。

$\hat{\beta}_k(k)$ を I ag k の sample partial autocorrelation、同様に

$\hat{\alpha}_k(k)$ を $X_t = \nabla^d \nabla_s^D W_t$ の I ag k の sample partial autocorrelation と呼ぶ。

定理 2. $\Pr\{\det W \neq 0\} = 1$ を仮定。

(i) $1 \leq k \leq d, \hat{\beta}_k(k) \xrightarrow{p} (-1)^{k+1}, (T \rightarrow \infty),$

(ii) $(i-1)s + d < k \leq is + d, 1 \leq i \leq D,$

(a) $k = is + d, \hat{\beta}_k(k) \xrightarrow{p} (-1)^{i+d+1}, (T \rightarrow \infty),$

(b) $k \neq iS+d$, $\hat{\beta}_k(k)$ は一般に退化した分布入
法則収束

(iii) $k > DS+d$, $\hat{\beta}_k(k) = (-1)^{D+d} \hat{\varphi}_{k-DS-d}(k-DS-d) + \mathcal{O}_p(1/T)$.

(略証) (i); D_k を $(k+1) \times (k+1)$ 行列で

$$D_k = (\tilde{C}_{k,0}, \angle \tilde{C}_{k-1,0}, \dots, \angle^k \tilde{C}_{0,0})'$$

と定義する。ここで

$$\tilde{C}_{i,d} = \frac{1}{\alpha} (C_{i,d,0}, C_{i,d,1}, \dots, C_{i,d,iS+d}, 0, 0, \dots, 0)',$$

また

$$\sum_{l=0}^{iS+d} C_{i,d,l} B^l = \frac{1}{\alpha} (1-B)^{-1} (1-B^S)^d.$$

一方 \angle は $(k+1) \times (k+1)$ の行列で、その (i,d) 要素は、 $i-d=1$ の時は 1、 $i-d \neq 1$ の時は 0。 $\hat{\alpha}(k) = \{1, -\hat{\alpha}_1(k), \dots, -\hat{\alpha}_k(k)\}'$ を次式で与える。

$$\hat{\alpha}(k) = (D_k')^{-1} \hat{Q}(k),$$

ここで、 $\hat{Q}(k) = \{1, -\hat{\beta}_1(k), \dots, -\hat{\beta}_k(k)\}'$ 。仮定および Appendix の結果より、

$$p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\alpha}_e(k) = 0, \forall e,$$

を得る。 $(-1)C_{k,0,k} = (-1)^{k+1}$ に注目すれば、結論を得る。

(ii); (i) と同様の論法で、結論を得る。

(iii); $D_{d,D,k}$ を $(k+1) \times (k+1)$ 行列で、その第 i 行を、

$$(\angle^{i-1} \tilde{C}_{d,D})', \quad 1 \leq i \leq k+1-DS-d,$$

$$(\angle^{i-1} \tilde{C}_{d,i^*})', \quad k+2-(i^*+1)S-d \leq i \leq k+1-i^*S-d,$$

$$0 \leq i^* \leq D-1,$$

$$(L^{i^*-1} \tilde{e}_{k+i,0})', \quad k+2-d \leq i \leq k+1,$$

とする。 X_T を $(T-k) \times (k-Ds-d)$ 行列で、その (i, j) 要素を x_{k+i-j} , \tilde{x}_T を $(T-k)$ 次元ベクトルで、 $\tilde{x}_T = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_T)'$ とする。その時、仮定および Appendix の結果より、

$$Q(k) = D_{\alpha, D, k} \begin{pmatrix} 1 \\ (X_T' X_T)^{-1} X_T' \tilde{x}_T + O_p(1/T) \\ O_p(1/T) \end{pmatrix}$$

を得る。よって結論が成立する。

§3. 応用例

§2. で論じた結果の応用例として、通常の $ARI(p, d)$ process, $\phi(B) \nabla^d u_t = e_t$ を、非定常 $AR(p+d)$ process と、みなした場合の係数推定、次数 $(p+d)$ 決定について考える。

係数推定

$$1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \dots - \varphi_{p+d} B^{p+d} = \bar{\alpha} \phi(B) \nabla^d$$

定理3

$$P_n \{ \det W \neq 0 \} = 1 \text{ 仮定.}$$

$$\hat{\varphi}_{\bar{\alpha}} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \dots, \hat{\varphi}_{p+d})',$$

$$\varphi_{\bar{\alpha}} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{p+d})'.$$

とする。この時、

$$\sqrt{T} (\hat{\varphi}_{\bar{\alpha}} - \varphi_{\bar{\alpha}}) \xrightarrow{L} N(0, \sigma_e^2 \underline{Q}' \Gamma_p^{-1} \underline{Q}) \quad (T \rightarrow \infty).$$

ここで、 D, T_P は各々、 $P \times (P+d)$, $P \times P$ の行列で

$$D \stackrel{\bar{\alpha}}{=} \begin{bmatrix} 1 & C_{d,1} & C_{d,2} & \cdots & C_{d,d} & & & \\ & 1 & C_{d,1} & C_{d,2} & \cdots & C_{d,d} & & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & C_{d,1} & C_{d,2} & \cdots & C_{d,d} \end{bmatrix}, \quad 1 + \sum_{i=1}^d C_{d,i} B^i \\ \bar{\alpha} (1-B)^d,$$

$$T_P \stackrel{\bar{\alpha}}{=} \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(P-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(P-2) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \gamma(P-1) & \cdots & \gamma(1) & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

$X_t \stackrel{\bar{\alpha}}{=} \nabla^d W_t$, $\gamma(h) \stackrel{\bar{\alpha}}{=} E X_t X_{t+h}$ で定義される。

証明は、定理 2. (iii) と同様。

Remark 2.

$\sqrt{T}(\hat{\varphi} - \varphi)$ の漸近分布は、退化した正規分布である。

(rank P)。ちなみに $P=0, d=1$ の L.S.E の漸近分布は、White (1958), M.M. Rao (1978), Evans and Savin (1981) が論じている。 $\hat{\varphi} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} W_t W_{t+1}}{\sum_{t=2}^T W_t^2}$ と有り、定理 1. (1) ($S=1$) より、consistency の order は $1/T$ である。 ($\varphi=1$)。

次数決定

次数決定に AIC を用いた場合を考える。

$$AIC(k) \stackrel{\bar{\alpha}}{=} T \log \hat{\sigma}_e^2(k) + 2k, \quad 0 \leq k \leq K,$$

ここで、 $\hat{\sigma}_e^2(k) \stackrel{\bar{\alpha}}{=} \min_{B_i(k)} \frac{\sum_{t=k+1}^T \{W_t - \sum_{i=1}^k B_i(k) W_{t-i}\}^2}{T}$.

この時、Shibata (1976) の結果が、非定常 ARI 過程についても、そのまま成立する。

定理 4. $P_T\{\det W \neq 0\} = 1$ を仮定。

$\hat{k} = \arg \min_k AIC(k)$ を最小にする k .

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P_T\{\hat{k} = k\} = \begin{cases} P_{k-(p+d)} \varphi_{k-k}, & (p+d \leq k \leq \bar{k}), \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(記号は Shibata (1976) と同じ定義)

(略証) まず、仮定と Appendix の結果より

$$\hat{\sigma}_e^2(k) = O_p(T^{2(d-k)-1}), \quad k < d,$$

$$p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\sigma}_e^2(k) = \sigma_{k-d}^2, \quad k \geq d,$$

を証明する。 σ_e^2 は、 x_k, x_{k-1}, \dots, x_1 が与えられた時の、 x_{k+1} に対する最良予測量の二乗予測誤差。 $k < p+d$ の時は、これらの結果より、たまたに証明される。 $k \geq p+d$ の時は、まず $x_t = \nabla^d w_t$ とし、 $\tilde{\sigma}_e^2(k)$ を

$$\tilde{\sigma}_e^2(k) = \min_{\phi_i(k)} \sum_{t=k+1}^T \left\{ x_t - \sum_{i=1}^k \phi_i(k) x_{t-i} \right\}^2 / T$$

で定義する。この時、

$$\left\{ \hat{\sigma}_e^2(k+1) / \hat{\sigma}_e^2(k) \right\} - \left\{ \tilde{\sigma}_e^2(k+1-d) / \tilde{\sigma}_e^2(k-d) \right\} = o_p(1/T)$$

が証明されれば、Shibata (1976) と、同様の半続きで、定理を得る。上式は、左辺の各項を、 $\hat{\sigma}_{k+1}(k+1)$, $\hat{\sigma}_{k+1-d}(k+1-d)$ を用いて表現した後、定理 2. 及び冒頭の結果より示される。

Remark 3.

(i) Hannan and Quinn (1979) は、定常 AR 過程に対し、
 $AIC(k)$ を $\phi(k) \bar{\alpha} T \log \hat{\sigma}_e^2(k) + 2kC \log \log T$, $C > 1$,
 のように修正すれば、 $\phi(k)$ を最小にする \hat{k} は、
 consistent (概収束) であることを示した。 $\phi(k)$ を非定
 常 ARI 過程に用いても、consistency が言える。(たか
 し、目下のところ確率収束まで)。

(ii) 定理 4 の意味することは、

(a) Shibata (1976) の結果は、定常、非定常に関わり
 なく、AR 型の process に対して成立すること、

(b) 対象とする process が、ARI process と想定される
 場合、 p 及び d の決定が必要であるが、その第一
 段階として、 $p+d$ の推定に AIC が有効であること、
 の以上、二点が挙げられる。

Appendix

§2, §3, の結論及び、仮定の check に必要となる、

$D_T^{-1} W_T' W_T D_T^{-1}$ の漸近分布について、もとめ方の概略を述べ
 る。手順は二段階よりなる。

(1) $\{u_t\}$ を $ARIMA(0, 0, 0) \times (0, D+d, 0)$ s process, i.e.

$\nabla_s^{D+d} u_t = e_t, t \geq 1$, として、 $\{w_t\}$ を $\{u_t\}$ により表現
 する。

(2) $\tilde{D}_T^{-1} U_T' U_T \tilde{D}_T^{-1}$ の漸近分布を求めよ。ここで U_T は、
 $\{T - (D+d)S\} \times (D+d)S$ 行列で、その (i, j) 要素は、

$$\nabla_S^{D+d-j^*} U_{(D+d)S+i-j}, \quad (j^*-1)S+1 \leq j \leq j^*S, \\ 1 \leq j^* \leq D+d,$$

により定義され、 \tilde{D}_T は、 $(D+d)S \times (D+d)S$ の対角行列で、
 その (i, i) 要素は、

$$T^{i^*}, \quad (i^*-1)S+1 \leq i \leq i^*, \quad 1 \leq i^* \leq D+d.$$

◎ $\{U_{t^*}\}$ は、 S 個の独立な $ARIMA(0, D+d, 0)$ process より構成されるとみよせるので、 $\tilde{D}_T^{-1} U_T' U_T \tilde{D}_T^{-1}$ の漸近分布は、Hasza and Fuller (1979), (1982), Yajima (1982) の analogy で導ける。

補題 A.1.

(i) $0 \leq i \leq d, 0 < j \leq D, \forall h,$

$$p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} (\nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} W_t - \nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} W_{t+h}) / T^{i+j-1/2} = 0,$$

(ii) $0 < i \leq d, 0 \leq j \leq D, \forall h,$

$$p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} (\nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} W_t - \nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} W_{t+h}) / T^{i+j-1/2} = 0,$$

(iii) $0 \leq i \leq d, 0 \leq i' \leq d, 0 < j \leq D, 0 < j' \leq D, \forall h, \forall \ell, \forall m, \forall n,$

$$p\text{-}\lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^T (\nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} W_{t+m} \nabla^{d-i'} \nabla_S^{D-j'} W_{t+n} - \nabla^{d-i} \nabla_S^{D-j} W_{t+h+s+m} \\ \times \nabla^{d-i'} \nabla_S^{D-j'} W_{t+\ell s+n}) / T^{i+i'+j+j'} = 0,$$

(iv) $0 < i \leq d, 0 < i' \leq d, 0 \leq j \leq D, 0 \leq j' \leq D, \forall h, \forall \ell, \forall m, \forall n,$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-p} (\nabla^{d-i} \nabla_S^{D-d} w_{t+m} \nabla^{d-i'} \nabla_S^{D-d'} w_{t+n} - \nabla^{d-i} \nabla_S^{D-d} w_{t+h+m} \\ \times \nabla^{d-i'} \nabla_S^{D-d'} w_{t+l+n}) / T^{i+i'+j+d'} = 0.$$

証明は二次モーメントを評価すれば、明らか。

以下で、いくつかの記号を導入する。

$$\odot \quad \phi_i^* \stackrel{\alpha}{=} - \sum_{j=0}^{p'} \phi_{js+i}, \quad \theta_i^* \stackrel{\alpha}{=} - \sum_{j=0}^{q'} \theta_{js+i}.$$

$$\text{ここで } p' = [P/S], \quad q' = [Q/S], \quad \phi_0 = \theta_0 = -1,$$

$$\phi_i = 0, i > p, \quad \theta_i = 0, i > q.$$

$$\odot \quad \widehat{\Phi} \stackrel{\alpha}{=} [\Phi^*, M\Phi^*, \dots, M^{s-1}\Phi^*]'$$

$$\widehat{\Theta} \stackrel{\alpha}{=} [\Theta^*, M\Theta^*, \dots, M^{s-1}\Theta^*]'$$

は各々、 $s \times s$ の巡回行列で、 Φ^*, Θ^*, M は各々、

$$\Phi^* \stackrel{\alpha}{=} (\phi_0^*, \phi_1^*, \dots, \phi_{s-1}^*)', \quad \Theta^* \stackrel{\alpha}{=} (\theta_0^*, \theta_1^*, \dots, \theta_{s-1}^*)',$$

$$M \stackrel{\alpha}{=} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ I_{s-1} & & & 0 \end{bmatrix}, \quad s \times s$$

で定義される。 I_{s-1} は $(s-1) \times (s-1)$ の単位行列。

補題 A.2. $\widehat{\Phi}, \widehat{\Theta}$ は non-singular

(略証) 巡回行列の行列式に関する公式、及び、

stationarity, invertibility に関する仮定より示せる。

補題 A.2 より $\Delta(\widehat{\alpha} \widehat{\Phi}^{-1} \widehat{\Theta})$ も non-singular な $s \times s$

巡回行列と存在。以上の結果を用いて u_t の u_t による表現を得る。

命題 A.1. $\lambda_j, 0 \leq j \leq s-1$ を Λ の $(1, j+1)$ 要素とする。

$$\begin{aligned} \nabla^{d-j} \nabla_S^{D-i} \omega_t &= S^{j-1} \lambda^* \sum_{\ell=0}^{s-1} \nabla_S^{D+d-i-j} u_{t-\ell} + o_p(t^{i+d-1/2}), j \geq 1, \\ &= \sum_{\ell=0}^{s-1} \lambda_\ell \nabla_S^{D+d-i} u_{t-\ell} + o_p(t^{i-1/2}), j=0, \end{aligned}$$

ここで $\lambda^* = \frac{1}{s} \sum_{\ell=0}^{s-1} \lambda_\ell$,

証明は補題 A.1 左繰り返し用いる。 Λ が non-singular より $\lambda^* \neq 0$ が言える。

次に第二段階の、 $\tilde{D}_T^{-1} \tilde{U}_T' \tilde{U}_T \tilde{D}_T^{-1}$ の漸近分布を求めよるために、一連の定数、確率変数を導入する。

(定数) \tilde{B}_{2i} ; ベルヌーイ定数

$$\gamma_i = (-1)^{i+1} 2 / \{(2i-1)\pi\}, i \geq 1,$$

$$\nu_i = 2^{2(i+1)} \{2^{2(i+1)} - 1\} \tilde{B}_{2(i+1)} / (2i+2)!, i \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \mu_{i,d} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{n-i-\ell} \gamma_i^{2(n-\ell)} / (2\ell)!, & d=2n, \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} (-1)^{n-i-\ell} \gamma_i^{2(n-\ell)} / (2\ell+1)! + (-1)^n \gamma_i^{2n+1}, & d=2n+1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{i,d,k} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{k-1} 2(-1)^{\ell+m} (m-\ell) \binom{k-1}{\ell} \binom{k-1}{m} \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 (1-x^{2k-2-\ell-m}) x^\ell y^m \cos \frac{(2i-1)\pi x}{2} \cos \frac{(2d-1)\pi y}{2} dx dy. \end{aligned}$$

(確率変数)

$$\{V_{i,d}\}; 0 \leq i \leq s-1, 1 \leq d < \infty, \text{ i.i.d. } N(0, \sigma^2),$$

$$S_1(m, k, \ell) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{2m} V_{kn} V_{\ell n},$$

$$S_2(m, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n^{2m+1} V_{kn},$$

$$S_3(m, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{n,m} V_{kn},$$

$$S_4(m, k, \ell) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} (P_{n, x, m} - P_{x, n, m}) V_{kn} V_{\ell x}$$

そして、 $\bar{z}_{i, j}(k, \ell)$, ($1 \leq i, j \leq D+d$, $0 \leq k, \ell \leq S-1$) を次式で定義する。

$$\begin{aligned} \bar{z}_{i, j}(k, \ell) &= (-1)^{m+n} \left[S_1(m+n+\delta, k, \ell) + 2 \left\{ \sum_{a=1}^m (-1)^a S_2(m+n+\delta-a, \ell) \right. \right. \\ &\quad \times S_3(2a, k) + \sum_{a=1}^n (-1)^a S_2(m+n+\delta-a, k) S_3(2a, \ell) \left. \right\} \\ &\quad \left. + 2 \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^n (-1)^{a+b} V_{m+n+\delta-a-b} S_3(2a, k) S_3(2b, \ell) \right], \\ &\hspace{20em} (i=2m+\delta, j=2m+\delta) \\ &= \sum_{n=0}^{m-1} 2(-1)^n S_3(i-2m+n, k) S_3(i-n, \ell) \\ &\quad + (-1)^m \{ S_3(i-m, k) S_3(i-m, \ell) + S_4(i-m, k, \ell) \}, \\ &\hspace{20em} (i=j+2m+1, m \geq 0) \\ &= \bar{z}_{j, i}(\ell, k), \hspace{10em} (j=i+2m+1, m \geq 0) \end{aligned}$$

ここで δ は 0 または 1, m, n は, $\delta=0$ の時, $m, n \geq 1$,

$\delta=0$ の時は, $m, n \geq 0$ である。

この時、 $\tilde{D}_T^{-1} U_T U_T \tilde{D}_T^{-1}$ の漸近分布を得る。

命題 A.2. U は $(D+d)S \times (D+d)S$ の random 行行列で、

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & \cdots & U_{1, D+d} \\ U_{21} & U_{22} & \cdots & U_{2, D+d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{D+d, 1} & U_{D+d, 2} & \cdots & U_{D+d, D+d} \end{pmatrix}$$

と定義する $U_{i, j}$ は, $S \times S$ 行列で、その (k, ℓ) 要素 $U_{i, j}(k, \ell)$ は、

$$U_{i, j}(k, \ell) = \sum_{n=0}^{S-1} \bar{z}_{i, j}(\ell - k + n, n) / S^{i+j},$$

とする。\$\bar{x}\$ は \$\bar{x} = i - [i/s] \times S\$ で定義する。この時

$$\widetilde{D}_T^{-1} U_T' U_T \widetilde{D}_T^{-1} \xrightarrow{L} U, \quad (T \rightarrow \infty)$$

が成立する。

(略証) $\{\widetilde{u}_{i,t}\}, 0 \leq i \leq s-1$, を

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_{i,t} &= u_{(t-1)S+i}, \quad (t-1)S+i \geq 1, \\ &= 0, \quad \text{otherwise} \end{aligned}$$

で定義する。\$\{\tilde{e}_{i,t}\}\$ も同様に定義すれば、\$\nabla^{D+d} \widetilde{u}_{i,t} = \tilde{e}_{i,t}\$, \$t \geq 1\$, が成立する。すなわち \$\{\widetilde{u}_{i,t}\}, 0 \leq i \leq s-1\$, は独立な \$S\$ 個の \$ARIMA(0, D+d, 0)\$ processes となるので、Hasza and Fuller (1979), (1982), Yajima (1982) と同様の方法で、結論を得る。

最後に、補題 A.1 を繰り返して適用し、命題 A.1 と A.2 を結合すると、\$D_T^{-1} W_T' W_T D_T\$ の漸近分布を得る。

定理 A.1. $H \equiv \text{diag}(\lambda^*, S\lambda^*, \dots, S^{d-1}\lambda^*), \quad d \times d,$
 $J_{s\bar{x}}(1, 1, \dots, 1)', \quad s \times 1,$

と置く。この時

$$D_T^{-1} W_T' W_T D_T^{-1} \xrightarrow{L} \begin{bmatrix} I_D \otimes \Lambda & 0 \\ 0 & H \otimes J_s' \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} I_D \otimes \Lambda' & 0 \\ 0 & H \otimes J_s \end{bmatrix}$$

\$(T \rightarrow \infty)\$ が成立する。ここで \$I_D\$ は \$D \times D\$ の単位行列、\$\otimes\$ は Kronecker product を意味する。(右辺を §2, §3 では \$W\$ とする。)

References

- Box, G. E. P. and Jenkins, J. M. (1976) *Time Series Analysis, Forecasting and Control* (Revised ed.) San Francisco:Holden Day.
- Evans, G. B. A. and Savin, N. E. (1981) The calculation of the limiting distribution of the least squares estimator of the parameter in a random walk model. *Ann. Statist.* 9, 1114-1118.
- Hamilton, E. J. and Watts, D. G. (1978) Interpreting partial autocorrelation function of seasonal time series models. *Biometrika* 65, 135-140.
- Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979) The determination of the order of an autoregression. *J. R. Statist. Soc. B* 41, 190-195.
- Hasza, D. P. and Fuller, W. A. (1979) Estimation for autoregressive processes with unit roots. *Ann. Statist.* 7, 1106-1120.
- Hasza, D. P. (1980) The asymptotic distribution of the sample autocorrelations for an integrated ARMA process. *J. Amer. Statist. Assoc.* 70, 349-352.
- Hasza, D. P. and Fuller, W. A. (1982) Testing for nonstationarity parameters specification in seasonal time series models. *Ann. Statist.* 10, 1209-1216.
- Rao, M. M. (1978) Asymptotic distribution of an estimator of the boundary parameter of an unstable process. *Ann. Statist.* 6, 185-190.

- Shibata, R. (1976) Selection of the order of an autoregressive model by Akaike's information criterion. *Biometrika* 63, 117-126.
- White, J. S. (1958) The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case. *Ann. Math. Statist.* 29, 188-197.
- Yajima, Y. (1982) Estimation of the degree of differencing of an ARIMA process by an AR model fitting. (submitted)