数理解析研究所講究録
第 507 巻 1983 年 44-59

Asymptotic Properties of Estimators in Non-Regular Situations

赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

はじめに.

適当な正則条件の下で、推定量の漸近的性質に関する研究は、高次の場合を含めて盛んに行われてきた。一方、非正則な場合にも同様な研究は試みられてきてはいるが、まだ十分とはいえない. しかし一致性に関する収束の order そしてそれらの orders の限界等については知られている. また漸近十分性についても、LeCam (1956) による定義が非正則な場合にも適用され論じられた (Akahira, 1976 ; Weiss, 1979 ; Mita, 1979). 非正則な場合の漸近有効性については、竹内 (1974) において一様分布の場合が論じられ、Akahira (1982a) において、より一般の場合まで拡張された.

ここでは、非正則な場合に一般ベイズ推定量の両側漸近有効性について論じ、さらに n^{-1} の order まで、すなわち 2次の両側漸近有効性についても考察する.

1. 定義と仮定

$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$を標本空間とし、$\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$を$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$上の確率測度の族とする．ここで$\Theta$はパラメータ空間である．$\Theta$を$R^1$の開集合と仮定する．$(\mathcal{X}, \mathcal{B})$の$n$個の直積を$(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{B}^{(n)})$とし、その上の$P_\theta$の$n$個の直積測度を$P_\theta^n$とする．このとき$\theta$の推定量は$\mathcal{X}^{(n)}$から$\Theta$への$\mathcal{B}^{(n)}$-可測関数列$\{\hat{\theta}_n\}$によって定義し、これを単に$\hat{\theta}_n$と表わすことにする．

正数のある単調増加列$\{c_n\}$（$\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$）に対して、$\hat{\theta}_n$が$\{c_n\}$-一致推定量であるとは、任意の$\varepsilon > 0$と任意の$\vartheta \in \Theta$に対して、十分に小さい正数$\delta$と十分に大きい正数$L$が存在して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{\theta : |\theta - \vartheta| < \delta} P_\theta^n \{ c_n |\hat{\theta}_n - \theta| \geq L \} < \varepsilon$$

が成り立つことであると定義する．

各$k = 1, 2, \cdots$に対して、ある$\{c_n\}$-一致推定量がk次の漸近的中央値不偏（asymptotically median unbiased，略してAMU）であるとは、任意の$\vartheta \in \Theta$に対して、ある正数δが存在して

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta : |\theta - \vartheta| < \delta} c_n^{k-1} \left| P_\theta^n \{ \hat{\theta}_n \leq \theta \} - \frac{1}{2} \right| = 0 \ ;$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\theta : |\theta - \vartheta| < \delta} c_n^{k-1} \left| P_\theta^n \{ \hat{\theta}_n \geq \theta \} - \frac{1}{2} \right| = 0$$

が成り立つことであると定義する．

あるAMU推定量 $\hat{\theta}_n^*$ が、k次の両側漸近的有効であるとは、任意のAMU推定量 $\hat{\theta}_n$、任意の $\theta \in \Theta$、任意の $t>0$ に対して

$$\varliminf_{n\to\infty} c_n^{k-1}\left[P_\theta^n\{c_n|\hat{\theta}_n^*-\theta|<t\}-P_\theta^n\{c_n|\hat{\theta}_n-\theta|<t\}\right]\geq 0$$

が成り立つことであると定義する．

各 $\theta\in\Theta$ に対して、P_θ がある σ-有限測度 μ に関して絶対連続であると仮定し、そのとき密度関数 $dP_\theta/d\mu$ を $f(x,\theta)$ で表わす．$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ をたがいに独立で、いずれも密度関数 $f(x,\theta)$ をもつ分布に従う確率変数列とする．また $\mathcal{X}=\Theta=R^1$ と仮定する．

$L_n(u)$ は R^1上で定義された有界、非負で $|u|$の単調増加関数とし、$\pi(\theta)$を Θ上で定義された非負の関数とする．このとき事後密度 $p_n(\theta|\tilde{x}_n)$ と事後リスク $r_n(d|\tilde{x}_n)$ $(d\in\Theta)$ を

$$p_n(\theta|\tilde{x}_n)=\frac{\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)\pi(\theta)}{\int_\Theta\left\{\prod_{i=1}^n f(x_i,\theta)\right\}\pi(\theta)\,d\theta}\ ;$$

$$r_n(d|\tilde{x}_n)=\int_\Theta L_n(d-\theta)\,p_n(\theta|\tilde{x}_n)\,d\theta$$

によって定義する．ただし $\tilde{x}_n=(x_1,\cdots,x_n)$とする．

いま、すべての $u\in R^1$に対して

$$\lim_{n\to\infty} L_n\left(\frac{u}{c_n}\right)=L^*(u)$$

このとき損失関数L^*に関する事後リスク $r_n^*(d|\tilde{x}_n)$ を

$$r_n^*(d|\tilde{x}_n) = \int_{\Theta} L^*(c_n(d-\theta))\, p_n(\theta|\tilde{x}_n)\, d\theta$$

によって定義する.

$\hat{\theta}_n$が損失関数L^*と事前密度πに関する一般ベイズ推定量(generalized Bayes estimator 略してGBE)であるとは、

$$r_n^*(\hat{\theta}_n|\tilde{x}_n) = \inf_{d\in\Theta} r_n^*(d|\tilde{x}_n)$$

が成り立つことであると定義する.

このとき GBE $\hat{\theta}_n$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \left| \inf_{d\in\Theta} r_n(d|\tilde{x}_n) - r_n^*(\hat{\theta}_n|\tilde{x}_n) \right| = 0$$

が成り立つ.

さて、θを位置パラメータ、すなわち $f(x,\theta)=f(x-\theta)$ であると仮定する. さらに次の条件を仮定する.

(A.1) $f(x)>0$, $a<x<b$;

$f(x)=0$, $x\leq a$, $x\geq b$.

(A.2) $f(x)$は開区間(a,b)において連続微分可能でかつ

$$0<\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x) < \infty$$

である.

仮定(A. 1), (A. 2)の下では、一致性の maximum order が n となることは知られている(Akahira, 1975). 従ってこれ以後の議論においては、$c_n = n$ の場合のみが論じられる.

3. 一般ベイズ推定量の両側漸近有効性.

まず、$L^*(u) = u^2$, $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する一般ベイズ推定量、すなわち Pitman推定量について考察する. この推定量は正則な場合に、(高次の)漸近有効性をもつことが知られている(Akahira and Takeuchi, 1981)が、非正則な場合にはどうなるであろうかという問題を検討する.

仮定(A. 1)より

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta) > 0 , \quad \max_i x_i - b < \theta < \min_i x_i - a ;$$
$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta) = 0 , \quad \text{その他} .$$

が成り立つから、その一般ベイズ推定量 $\hat{\theta}_{GB}$ は

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta \prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta)\, d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta)\, d\theta}$$

で与えられる. ただし $\underline{\theta} = \max_i x_i - b$, $\bar{\theta} = \min_i x_i - a$ とする.

このとき GBE $\hat{\theta}_{GB}$ が

$$\frac{1}{2}(\underline{\theta}+\bar{\theta}) = \frac{1}{2}\left\{\min_i X_i + \max_i X_i - (a+b)\right\}$$

に漸近的に等しいことが示される(Akahira, 1982b).

また密度関数 $f(x)$ が仮定 (A.1), (A.2) を満たす場合は、Akahira (1982a) の Example 3 と同様に、区間 (a, b) 上の一様分布の場合に帰着されるから、推定量 $(\underline{\theta}+\overline{\theta})/2$ は両側漸近的有効になることが示される。ゆえに一般ベイズ推定量もまた両側漸近的有効となる。この結論は、対称な損失関数に関する GBE の場合にも拡張可能である。

次に、仮定 (A.2) において、$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x)$ が成り立つことを仮定したけれども、これが成り立たないときの典型的な例として、切断指数分布、すなわち

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x}, & 0 < x < 1 ; \\ 0, & x \le 0,\ x \ge 1 , \end{cases}$$

の場合を考える。ここで $c = e/(e-1)$ である。

このとき $\underline{\theta} = \max_i x_i - 1$, $\overline{\theta} = \min_i x_i$ である。いま θ_0 を真のパラメータとする。

(i) $L^*(u) = u^2$, $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する GBE $\hat{\theta}_n^1$ は

$$n(\hat{\theta}_{GB}^1 - \theta_0) = \frac{Ae^A - Be^B}{e^A - e^B} - 1$$

となる。ここで $A = n(\overline{\theta} - \theta_0)$, $B = n(\underline{\theta} - \theta_0)$ とする。

(ii) $L^*(u) = |u|$, $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する GBE $\hat{\theta}_n^2$ は

$$n(\hat{\theta}_{GB}^2 - \theta_0) = \log \frac{e^A + e^B}{2}$$

となる。

(i), (ii) からわかるように、GBE's は損失関数に依存して決まるから、$\hat{\theta}_{GB}^{1}$, $\hat{\theta}_{GB}^{2}$ をそれぞれAMUになるように修正した推定量 $\hat{\theta}_{GB}^{1*}$, $\hat{\theta}_{GB}^{2*}$ は両側漸近的有効にならないことが示される。

4. 2次の両側漸近有効性.

この節では、ある切断正規分布の場合にAMU推定量 $\hat{\theta}_n$ に対して、θ の周りの集中確率 $P_\theta^n\{n|\hat{\theta}_n-\theta|<u\}$ の n^{-1} のorderまでの最大限界を求める. 次に一般ベイズ推定量の n^{-1} のorderまでの漸近展開とその漸近密度によって、その限界との比較を行う.

まず密度関数 $f(x)$ が次のような切断正規密度

$$f(x)=\begin{cases} ce^{-x^2/2} & , \ |x|<1 \ ; \\ 0 & , \ |x|\geq 1 \ , \end{cases}$$

をもつとする. ただし c はある定数とする.

このとき

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta)=\begin{cases} c^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2+n\theta\bar{x}-\frac{n}{2}\theta^2\right) & , \ \underline{\theta}<\theta<\bar{\theta} \ ; \\ \\ 0 & , \ \text{その他} \end{cases}$$

となる. ここで $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i/n$, $\underline{\theta}=\max_i x_i-1$, $\bar{\theta}=\min_i x_i+1$ である.

θ_0を真のパラメータとし、$\mathcal{A}$をAMU推定量全体のクラスとする．Akahira and Takeuchi (1981) の第3章における方法と同様に、Neyman - Pearsonの基本定理を用いて、AMU推定量 $\hat{\theta}_n$ に対して　θの周りでの集中確率の最大限界を求める．$\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}$ に対する $P_\theta^n\{n|\hat{\theta}_n-\theta|<u\}$の最大限界を求めるためには、$\hat{\theta}_n$ がAMU推定量であることから、

(4.1)　　$P^n_{\theta_0+(u/n)}\{\hat{\theta}_n<\theta_0\} - P^n_{\theta_0-(u/n)}\{\hat{\theta}_n<\theta_0\}$

の最大限界を求めればよい．Neyman - Pearson の基本定理によって

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n) = \begin{cases} 1, & \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0-\frac{u}{n}) > \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0+\frac{u}{n}); \\ 0, & \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0-\frac{u}{n}) < \prod_{i=1}^n f(x_i-\theta_0+\frac{u}{n}) \end{cases}$$

が、$\mathcal{A}$ における (4.1)の最大限界を

$$E^n_{\theta_0+(u/n)}(\phi_n^*) - E^n_{\theta_0-(u/n)}(\phi_n^*)$$

によって与えることがわかる．

ここで

$$A=\{\tilde{x}_n:\ \max_i x_i - 1 > \theta_0-\frac{u}{n},\ \min_i x_i+1>\theta_0+\frac{u}{n}\},$$

$$B=\{\tilde{x}_n:\ \max_i x_i - 1 < \theta_0-\frac{u}{n},\ \min_i x_i+1<\theta_0+\frac{u}{n}\},$$

$$C=\{\tilde{x}_n:\ \max_i x_i - 1 < \theta_0-\frac{u}{n},\ \min_i x_i+1>\theta_0+\frac{u}{n}\},$$

$$D=\{\tilde{x}_n:\ \bar{x}<c'\}$$

$$D'=\{\tilde{x}_n:\ \bar{x}>c'\}$$

とおく．ただし $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i/n$ で c' はある定数とする．
このとき

$$\phi_n^*(\tilde{x}_n)=\begin{cases}1, & \tilde{x}_n\in A\cup(C\cap D);\\ 0, & \tilde{x}_n\in B\cup(C\cap D'),\end{cases}$$

となる．

$\bar{X}$, $\max_i X_i-1$, $\min_i X_i+1$ はたがいに漸近的に独立であるから、十分大きな n に対して

$$P_\theta^n(D\mid C)\sim P_\theta^n(D)$$

となり、$E_{\theta_0}^n(\phi_n^*)=1/2+o(1/n)$ となるためには、$P_{\theta_0}^n(D)=1/2+o(1/n)$ でなければならないが、これは c' を適当に選ぶことによって可能である。
よって十分大きな n に対して、

(4.2)
$$\sup_{\hat{\theta}_n\in\mathcal{A}}\left[P_{\theta_0+(u/n)}^n\{\hat{\theta}_n<\theta_0\}-P_{\theta_0-(u/n)}^n\{\hat{\theta}_n<\theta_0\}\right]$$
$$=E_{\theta_0+(u/n)}^n(\phi_n^*)-E_{\theta_0-(u/n)}^n(\phi_n^*)$$
$$\sim P_{\theta_0+(u/n)}^n(A)+P_{\theta_0}^n(D)P_{\theta_0+(u/n)}^n(C)-P_{\theta_0-(u/n)}^n(A)-P_{\theta_0}^n(D)P_{\theta_0-(u/n)}^n(C)$$
$$=P_{\theta_0+(u/n)}^n(A)-P_{\theta_0-(u/n)}^n(A)+\frac{1}{2}\left\{P_{\theta_0+(u/n)}^n(C)-P_{\theta_0-(u/n)}^n(C)\right\}$$

となる．

一方 $\min_i X_i+1$ の漸近分布は

(4.3) $$G_1(t)=P_{\theta_0}^n\{n(\min_i X_i+1-\theta_0)<t\}$$
$$=\begin{cases} 1-e^{-kt}\left\{1-\frac{k(k+1)}{2n}t^2\right\}+o(\frac{1}{n}), & t>0; \\ 0, & t\leq 0, \end{cases}$$

で与えられ、また $\max_i X_i-1$ の漸近分布は

(4.4) $$G_2(t)=P_{\theta_0}^n\{n(\max_i X_i-1-\theta_0)<t\}$$
$$=\begin{cases} e^{kt}\left\{1-\frac{k(k+1)}{2n}t^2\right\}+o(\frac{1}{n}), & t\leq 0; \\ 1, & t>0, \end{cases}$$

で与えられる．ただし $k=ce^{-1/2}$ である．

従って (4.3), (4.4) から、$\min_i X_i+1$, $\max_i X_i-1$ の漸近密度はそれぞれ

(4.5) $$g_1(t)=\begin{cases} ke^{-kt}\left\{1-\frac{k(k+1)}{2n}t^2+\frac{k+1}{n}t\right\}+o(\frac{1}{n}), & t>0; \\ 0, & t\leq 0, \end{cases}$$

(4.6) $$g_2(t)=\begin{cases} ke^{kt}\left\{1-\frac{k(k+1)}{2n}t^2-\frac{k+1}{n}t\right\}+o(\frac{1}{n}), & t\leq 0; \\ 0, & t>0, \end{cases}$$

となることがわかる．

(4.5), (4.6) を用いると，

$$P^n_{\theta_0+(u/n)}(A) = P^n_{\theta_0+(u/n)}\{\max_i x_i - 1 > \theta_0 - \frac{u}{n}\} P^n_{\theta_0+(u/n)}\{\min_i x_i + 1 > \theta_0 + \frac{u}{n}\}$$

$$= 1 - P^n_{\theta_0+(u/n)}\{\max_i x_i - 1 < \theta_0 - \frac{u}{n}\} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 - e^{-2ku}\left\{1 + \frac{2k(k+1)}{n}u^2\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (u > 0);$$

$$P^n_{\theta_0-(u/n)}(A) = o\left(\frac{1}{n}\right);$$

$$P^n_{\theta_0+(u/n)}(C) - P^n_{\theta_0-(u/n)}(C) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

となるから、(4.2) より

$$\sup_{\hat{\theta}_n \in \mathcal{A}} \left[P^n_{\theta_0+(u/n)}\{\hat{\theta}_n < \theta_0\} - P^n_{\theta_0-(u/n)}\{\hat{\theta}_n < \theta_0\} \right]$$

$$= 1 - e^{-2ku} - \frac{2k(k+1)}{n}u^2 e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ.

ゆえに任意のAMU推定量 $\hat{\theta}_n$, 任意の θ, 任意の $u > 0$ に対して

$$(4.7) \quad P^n_\theta\{n(\hat{\theta}_n - \theta) < u\} \leq 1 - e^{-2ku} - \frac{2k(k+1)}{n}u^2 e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

が成り立つ、すなわち AMU推定量の θ の周りの集中確率の最大限界は (4.7) によって与えられる.

一方、$L^*(u) = u^2$, $\pi(\theta) \equiv 1$ に関する GBE $\hat{\theta}_{GB}$ の n^{-1} の order までの漸近展開とその漸近密度は、次のようにして求められている (Akahira, 1982b).

$\theta_0 = 0$ と仮定して一般性を失わない.

まず

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \theta \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \theta)\, d\theta}{\int_{\underline{\theta}}^{\bar{\theta}} \prod_{i=1}^{n} f(x_i - \theta)\, d\theta}$$

によって与えられる.

このとき $\theta = t/\sqrt{n}$, $Z = \sqrt{n}\,\bar{X}$ とおくと、

$$\hat{\theta}_{GB} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n}\,\underline{\theta}}^{\sqrt{n}\,\bar{\theta}} t\, e^{-\frac{t^2}{2} + Zt}\, dt}{\int_{\sqrt{n}\,\underline{\theta}}^{\sqrt{n}\,\bar{\theta}} e^{-\frac{t^2}{2} + Zt}\, dt}$$

となる. また $S = n(\underline{\theta} + \bar{\theta})/2$, $T = n(\bar{\theta} - \underline{\theta})/2$ とおくと、

$\hat{\theta}_{GB}$ の漸近展開は

$$n\hat{\theta}_{GB} = S + \frac{1}{3\sqrt{n}} Z T^2 - \frac{1}{2n} Z^2 S(S^2 - T^2) + \frac{1}{6n} S(S^2 - 3T^2) + o_p\left(\frac{1}{n}\right)$$

によって与えられる. よって $\hat{\theta}_{GB}$ の特性関数の漸近展開は

$$\begin{aligned}\phi_n(t) &= E\Big[e^{itS} \Big\{ 1 + \frac{it}{3\sqrt{n}} Z T^2 - \frac{it}{2n} Z^2 S(S^2 - T^2) + \frac{it}{6n} S(S^2 - 3T^2) \\ &\qquad - \frac{t^2}{18n} Z^2 T^4 \Big\} \Big] + o\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= E\Big[e^{itS} \Big\{ 1 - \frac{it}{2n} S^3 E(Z^2|S) + \frac{it}{2n} S E(Z^2 T^2|S) + \frac{it}{6n} S^3 \\ &\qquad - \frac{it}{2n} S E(T^2|S) - \frac{t^2}{18n} E(Z^2 T^4|S) \Big\} \Big] + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{4k^2}{4k^2+t^2} + \frac{v_1 t^2}{n(4k^2+t^2)} + \frac{v_2 t^2}{n(4k^2+t^2)^2} + \frac{v_3 t^4 + v_4 t^2}{n(4k^2+t^2)^3}$$

$$+ \frac{v_5 t^4 + v_6 t^2}{n(4k^2+t^2)^4} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

で与えられる．ただし v_i $(i=1, \cdots, 6)$ はある定数である．ゆえに $\hat{\theta}_{GB}$ の漸近密度 $g_n(u)$ は

$$g_n(u) = ke^{-2k|u|}\left\{1 + \frac{1}{n}\left(c_0 + c_1|u| + c_2 u^2 + c_3|u|^3\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$$

となる．ただし c_i $(i=0, 1, 2, 3)$ はある定数である．このことから、GBE $\hat{\theta}_{GB}$ の θ の周りの集中確率は

(4. 8) $\quad P_\theta^n\{n|\hat{\theta}_{GB} - \theta| < u\}$

$$= 1 - e^{-2ku} + \frac{a}{n} - \frac{1}{n}(a + bu + cu^2 + du^3)e^{-2ku} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

によって与えられる．ここで a, b, c, d はある定数である．(4. 7) と (4. 8) によって、GBE $\hat{\theta}_{GB}$ は n^{-1} の order までは、$\mathcal{A}$ における集中確率の最大限界を達成しないから、$\hat{\theta}_{GB}$ は 2次の両側漸近有効推定量ではないことがわかる．

5. むすび．

$R = (-r, r)$ とする．このとき θ の最大確率推定量 (maximum probability estimator 略して MPE) $\hat{\theta}_{MP}^r$ は

$$\int_{d-(r/n)}^{d+(r/n)} \prod_{i=1}^{n} f(x_i-\theta)\,d\theta$$

を最大にする d によって定義されている (Weiss and Wolfowitz, 1974). MPE が R に依存して決まることに注意する必要がある. また MPE $\hat{\theta}_{MP}^{r}$ は 0-1 損失関数と $\pi(\theta)\equiv 1$ に関する GBE とみなすことができる.

前節のような切断正規分布の場合に、MPE は

$$\hat{\theta}_{MP}^{r} = \begin{cases} \frac{1}{2}(\underline{\theta}+\bar{\theta}) &, \quad \bar{\theta}-\underline{\theta} > \frac{2r}{n}\ ; \\ \bar{\theta}-\frac{r}{n} &, \quad \bar{X} > \bar{\theta}-\frac{r}{n}\ ,\quad \bar{\theta}-\underline{\theta} \le \frac{2r}{n}\ ; \\ \underline{\theta}+\frac{r}{n} &, \quad \bar{X} < \underline{\theta}-\frac{r}{n}\ ,\quad \bar{\theta}-\underline{\theta} \le \frac{2r}{n}\ ; \\ \bar{X} &, \quad \underline{\theta}+\frac{r}{n} \le \bar{X} \le \bar{\theta}-\frac{r}{n}\ , \end{cases}$$

によって与えられ、これが両側漸近有効推定量でないことが知られている (Akahira and Takeuchi, 1981). しかし MPE $\hat{\theta}_{MP}^{r}$ は位置不変推定量全体のクラスの中で、集中確率の最大限界を n^{-1} の order まで, 点 r において達成する推定量になっている.

非正則の場合は、第3, 4節において示されたように、GBE は両側漸近的有効にはなっても、2次の両側漸近的有効にはならない. このことは正則な場合と著しく異なる点である. しかし MPE のように、集中確率の最大限界をある点において

n^{-1} の order まで達成できるような推定量を構成をすることは可能であろう．

この小論においては、GBE を $L^*(u)=u^2, |u|$ と $\pi(\theta)\equiv 1$ の場合のみを考えたけれども、ここで得られた結論は、対称な損失関数および適当な条件を満たす事前密度 $\pi(\theta)$ の場合に拡張することは可能であろう．

References

Akahira, M. (1975). Asymptotic theory for estimation of location in non-regular cases, I: Order of convergence of consistent estimators. Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, 22, 8-26.

Akahira, M. (1976). A remark on asymptotic sufficiency of statistics in non-regular cases. Rep. Univ. Electro-Comm., 27, 125-128.

Akahira, M. (1982a). Asymptotic optimality of estimators in non-regular cases. Ann. Inst. Statist. Math., 34, Part A, 69-82.

Akahira, M. (1982b). Remarks on asymptotic properties of generalized Bayes estimators in non-regular cases. Technical Report No.185, Department of Statistics, Stanford University, Stanford, California.

Akahira, M. and Takeuchi, K. (1981). Asymptotic Efficiency of Statistical Estimators: Concepts and Higher Order Asymptotic Efficiency. Lecture Notes in Statistics 7, Springer, New York.

LeCam, L. (1956). On the asymptotic theory of estimation and testing hypothesis. Poc. Third Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., 1, 129-156.

Mita, H. (1979). Asymptotic sufficiency of maximum likelihood estimator in a truncated location family. Tokyo J. Math., 2, 323-335.

Takeuchi, K. (1974). Tôkei-teki suitei no Zenkinriron (Asymptotic Theory of Statistical Estimation). (In Japanese), Kyôiku-Shuppan, Tokyo.

Weiss, L. (1979). Asymptotic sufficiency in a class of non-regular cases. Selecta Statistica Canadiana, 5, 141-150.

Weiss, L. and Wolfowitz, J. (1967). Maximum probability estimators. Ann. Inst. Statist. Math., 19, 193-206.