数理解析研究所講究録
第 508 巻 1983 年 92-99

擬微分作用素の exponential calculus

東大・理　青木貴史 (Takashi AOKI)

研究集会では上記表題のもとに 擬微分作用素の表象理論と表象のみたす指数法則について報告したが，ともに，その基礎的部分は最近出た講究録 [1] に詳しく述べてあるので重複するところは略し，[1] の続編という形で出発することにする．従って記号等は特に断わりなしに [1] と同じものを用いる．ただし，[1] では $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の section のことを整型超局所作用素 (holomorphic microlocal operator) と呼んだが以下ではそれを単に擬微分作用素 (pseudo-differential operator) と呼ぶことにする．

1° 二重形式表象

表象の無限和を取扱う為に我々は [1] において形式表象という概念を導入したが，更に表象の二重級数を考える為に二重形式表象なるものを定義する ([1]，定理 2.10 参照)．

<u>定義 1.</u> $\Omega \subset T^*X$ を錐的開集合とする. Ω で定義された表象の二重列 $\{P_{jk}(x,\xi)\}_{j,k=0,1,2,\cdots}$ で次の条件をみたすものを考える: 任意のコンパクト(生成)部分錐 $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して $d>0$, $0<A<1$ なる定数 d, A が存在し, 各 $h>0$ につき $C>0$ を適当に選べば任意の $j,k=0,1,2,\cdots$ および $|\xi| \geq (j+k+1)d$ なる任意の $(x,\xi') \in \Omega'$ に対し

$$(1.1) \qquad |P_{jk}(x,\xi)| \leq C A^{j+k} \exp(h|\xi|).$$

このとき (t_1, t_2) についての形式的ベキ級数

$$(1.2) \qquad P(t_1,t_2;x,\xi) = \sum_{j,k=0}^{\infty} t_1^j t_2^k P_{jk}(x,\xi)$$

を Ω で定義された二重形式表象という. Ω で定義された二重形式表象全体を $\hat{S}_2(\Omega)$ で表わす.

形式表象全体 $\hat{S}(\Omega)$ ([1] 参照) は $t=t_1$ と考えることによって $\hat{S}_2(\Omega)$ の部分環と思える. ただし形式的ベキ級数の和・積によって $\hat{S}_2(\Omega)$ を可換環と考えている. 以下ではつねに $t=t_1$ とする.

<u>定義 2.</u> $P(t_1,t_2;x,\xi) = \sum_{j,k=0}^{\infty} t_1^j t_2^k P_{jk}(x,\xi) \in \hat{S}_2(\Omega)$ とする. 任意のコンパクト(生成)部分錐 $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対し, $d>0$,

$0 < A < 1$ なる定数 d, A が存在し，各 $h > 0$ に対し $C > 0$ を適当に選べば任意の $m = 1, 2, \cdots$ および $|\xi| \geq md$ なる任意の $(x, \xi) \in \Omega'$ に対して

$$(1.3) \qquad \left| \sum_{j+k \leq m-1} P_{jk}(x, \xi) \right| \leq C A^m \exp(h|\xi|)$$

が成り立つとき $P(t_1, t_2 ; x, \xi)$ は（Ω において）0 と同値であるといい $P(t_1, t_2 ; x, \xi) \sim 0$ とかく．Ω で定義された二重形式表象で 0 と同値なもの全体を $\hat{R}_2(\Omega)$ で表わす．また $P, Q \in \hat{S}_2(\Omega)$ は $P - Q \in \hat{R}_2(\Omega)$ のとき同値であるといい $P \sim Q$ とかく．

定義からただちにわかることとして a) $\hat{R}_2(\Omega)$ は $\hat{S}_2(\Omega)$ のイデアルである，b) $\hat{S}(\Omega) \cap \hat{R}_2(\Omega) = \hat{R}(\Omega)$．従って

$$\iota_{12} : \hat{S}(\Omega) / \hat{R}(\Omega) \to \hat{S}_2(\Omega) / \hat{R}_2(\Omega)$$

なる単射が包含関係 $\hat{S}(\Omega) \subset \hat{S}_2(\Omega)$ により導かれる．一方，

$$\rho_{21} : \hat{S}_2(\Omega) / \hat{R}_2(\Omega) \to \hat{S}(\Omega) / \hat{R}(\Omega)$$

を $\rho_{21}(P(t_1, t_2 ; x, \xi)) = P(t, t ; x, \xi)$ によって定めることができる．このとき $\rho_{21} \circ \iota_{12} = id$，$\iota_{12} \circ \rho_{21} = id$ が成り立つ．前者は明らかである．後者をいうには任意の $P(t_1, t_2 ; x, \xi) \in \hat{S}_2(\Omega)$ に対して $P(t_1, t_2 ; x, \xi) \sim P(t_1, t_1 ; x, \xi)$ をいえばよい．

これは次のようにしてわかる： $P(t_1, t_2 : x, \xi) = \sum t_1^j t_2^k P_{jk}(x, \xi)$ とおくと $P(t_1, t_1 : x, \xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t_1^j \sum_{\mu+\nu=j} P_{\mu\nu}(x, \xi)$ だから

$$\sum_{j+k \leq m-1} \left(P_{jk}(x, \xi) - \sum_{\mu+\nu=j} P_{\mu\nu}(x, \xi) \cdot \delta_{k0} \right)$$

$(\delta_{k0} = 0\ (k \neq 0),\ \delta_{00} = 1)$ を評価すればよいが，実際評価するまでもなく明らかにこれは 0 である．従って $P(t_1, t_2 : x, \xi) \sim P(t_1, t_1 : x, \xi)$ がいえた．

さて，［1］定理 2.7 によれば $\varinjlim \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega) \simeq \mathcal{E}^{R}_{x^*}$ なる加法同型が存在する．これと上のことをあわせると

<u>定理 3.</u>　$\hat{\varpi}_2 : \varinjlim_{\Omega \ni x^*} \hat{S}_2(\Omega)/\hat{R}_2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{E}^{R}_{x^*}$ で $\hat{\varpi}_2(x_j \xi_j) = x_j D_j \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$ なる加法同型が存在する．

<u>定義 4.</u>　$P(t_1, t_2 : x, \xi) = \sum t_1^j t_2^k P_{jk}(x, \xi)$ の $\hat{\varpi}_2$ による像を $:P(t_1, t_2 ; x, \xi): = :\sum t_1^j t_2^k P_{jk}(x, \xi):$ であらわし，$P(t_1, t_2 : x, \xi)$ の正規積あるいは Wick 積と呼ぶ．

<u>注意</u>　もちろんこの定義は［1］，定義 2.8 と矛盾しない．また，$:\sum t_1^j t_2^k P_{jk}(x, \xi):$ を単に $:\sum P_{jk}(x, \xi):$ と略記することがあるのも形式表象の場合と同様である．

二重形式表象を用いて書けば Leibniz の公式は次のようになる.

<u>定理 5.</u> $P(t;x,\xi)$, $Q(t;x,\xi) \in \hat{S}(\Omega)$ とする. このとき

$$W(t_1,t_2;x,\xi) = \exp(t_2\partial_\xi\cdot\partial_y)\, P(t_1;x,\xi)\, Q(t_1;y,\eta)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}$$

とおくと $W(t_1,t_2;x,\xi) \in \hat{S}_2(\Omega)$ で

$$:W(t_1,t_2;x,\xi): = :P(t;x,\xi)::Q(t;x,\xi):$$

が成り立つ.

実際, $:W(t_1,t_2;x,\xi): = :W(t,t;x,\xi):$ に注意すれば, [1], 定理 2.12 より明らかである.

同様に形式表象を与えたときその形式表象の定める作用素の座標変換, 形式共役も二重形式表象で表わすことができるが省略する.

<u>注意</u> $\hat{S}(\Omega)$ から $\hat{S}_2(\Omega)$ への拡張と全く同じように考えてパラメータ $t_3, t_4, \cdots$ をふやして多重形式表象のつくる環 $\hat{S}_k(\Omega)$ を定義することができる. それぞれに対応する零クラス $\hat{R}_k(\Omega)$ の定義も容易に想像がつくであろう. 更には可算無限のパラメータをもつ多重形式表象も考えられるが, 当面のところ二重形式表象だけで十分役に立つ. 無限階擬微分作用素の表象を取扱う際無限和の順序交換がしばしば登場するが, 二重形式表象を考えることにより統一的に理解できるのである.

2° 形式表象に対する指数法則

指数表象 $\exp p(x,\xi)$ をもつ作用素の結合公式はすでに[1]において与えた(定理3.3, 3.4). ここではこれを少し一般化して, 形式表象の指数函数 $\exp p(t;x,\xi)$ の定める作用素, 更に, それに有限階の"amplitude"をかけた $a(t;x,\xi)\exp p(t;x,\xi)$ なる形の形式表象をもつ作用素の結合公式を与える.

定義 6. $P(t;x,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)\in \hat{S}(\Omega)$, m を実数とする. $P(t;x,\xi)$ が高々 m 階であるとは次の条件をみたすことをいう: 任意の $\Omega'\subset\subset\Omega$ に対し, $0<d$, $0<A<1$, $0<C$ なる d, A, C (定数) が存在し $|\xi|\geq(j+1)d$ なる任意の $(x,\xi)\in\Omega'$ に対し

$$|P_j(x,\xi)|\leq C A^j |\xi|^m$$

が任意の $j=0,1,2,\cdots$ について成り立つ.

さて, $p(t;x,\xi)$, $q(t;x,\xi)$ を Ω で定義された高々1-0階([1], 定義3.1)の形式表象とする. また, $a(t;x,\xi)$, $b(t;x,\xi)$ を Ω で定義されたそれぞれ m_1, m_2 階の形式表象とする. 形式表象の列 $\{w_j\}$, $\{\psi_j\}$ を次の漸化式によって定める. ただし (y,η) は (x,ξ) のコピー, $\partial_\xi=(\partial_{\xi_1},\cdots,\partial_{\xi_n})$, $\partial_y=(\partial_{y_1},\cdots,\partial_{y_n})$, $\partial_\xi\cdot\partial_y=\partial_{\xi_1}\cdot\partial_{y_1}+\cdots+\partial_{\xi_n}\cdot\partial_{y_n}$ $\left(\partial_{\xi_1}=\frac{\partial}{\partial\xi_1}\ \text{etc.}\right)$ とする.

$$(2.1)\quad \begin{cases} w_0(t:x,y,\xi,\eta) = p(t:x,\xi)+q(t;y,\eta), \\ \psi_0(t;x,y,\xi,\eta) = a(t;x,\xi)\,b(t:y,\eta), \\ w_{j+1} = \dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\xi\cdot\partial_y w_j + \displaystyle\sum_{\mu=0}^{j}\partial_\xi w_\mu\cdot\partial_y w_{j-\mu}\right), \\ \psi_{j+1} = \dfrac{1}{j+1}\left\{\partial_\xi\cdot\partial_y\psi_j + \displaystyle\sum_{\mu=0}^{j}\left(\partial_\xi\psi_\mu\cdot\partial_y w_{j-\mu} + \partial_y\psi_\mu\cdot\partial_\xi w_{j-\mu}\right)\right\}. \end{cases}$$

ただし $j=0,1,2,\cdots$. 次の形式級数を考えよう.

$$(2.2)\quad \begin{cases} r(t:x,\xi) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j\, w_j(t;x,x,\xi,\xi), \\ c(t:x,\xi) = \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j\, \psi_j(t;x,x,\xi,\xi). \end{cases}$$

このとき次の定理を得る.

<u>定理 7.</u> 上で定めた $r(t;x,\xi)$, $c(t:x,\xi)$ はそれぞれ高々 $1-0$ 階, m_1+m_2 階の形式表象で次をみたす.

$$(2.3)\quad :a(t:x,\xi)\exp\{p(t:x,\xi)\}::b(t;x,\xi)\exp\{q(t:x,\xi)\}: \\ = :c(t:x,\xi)\exp\{r(t:x,\xi)\}:$$

<u>注意.</u> もちろん (2.3) 右辺の表示は一意的ではない. r' を 0 階の形式表象としたとき r を $r-r'$ に, c を $c e^{r'}$ に変えることができるからである.

定理 7 にて $a=b=1$ とすれば系として次の定理を得る.

定理 8. $r(t;x,\xi)$ は高々 1−0 階の形式表象で

(2.4) $\quad :\exp\{p(t;x,\xi)\}::\exp\{q(t;x,\xi)\}: = :\exp\{r(t;x,\xi)\}:$

をみたす.

定理 7 の証明の方針. (2.3) の左辺を定理 5 を用いて計算してみると次の様になる. 即ち

$$\Pi = \exp(t_2\partial_\xi\cdot\partial_y)\, a(t;x,\xi)\, b(t;y,\eta)\, \exp\{p(t;x,\xi)+q(t;y,\eta)\}$$

とおくと $:ae^p::be^q: = :\Pi|_{y=x,\eta=\xi}:$ を得る. $\Omega\times\Omega$ で定義された二重形式表象 Π は次の形式的微分方程式の初期値問題の一意解である:

$$(4.1)\quad \begin{cases} \partial_{t_2}\Pi = \partial_\xi\cdot\partial_y\Pi \\ \Pi|_{t_2=0} = a(t;x,\xi)\, b(t;y,\eta)\, \exp\{p(t;x,\xi)+q(t;y,\eta)\} \end{cases}$$

そこで $\Pi = \sum_j t_2^j \psi_j \exp(\sum_k t_2^k w_k)$ と仮定する. もし $\{w_k\}$, $\{\psi_j\}$ が (2.1) をみたせば明らかに Π は (4.1) の解となる. 更に, $\sum t_2^k w_k$, $\sum t_2^j\psi_j$ 自身二重形式表象であることがわかり

$$c(t;x,\xi) \sim \sum t_2^j \psi_j(t;x,x,\xi,\xi)$$

$$r(t;x,\xi) \sim \sum t_2^j w_j(t;x,x,\xi,\xi)$$

に注意すると定理が得られる.

文献

[1] T. Aoki, 無限階擬微分作用素の表象理論, 数理研講究録 468 ('82) 1-65.

[2] ——, The exponential calculus of microdifferential operators of infinite order, III. Proc. Japan Acad. に発表予定.