数理解析研究所講究録
第 508 巻 1983 年 100-123

Cauchy 問題における admissible data の空間としての ultradifferentiable classes.

京大理学部 松本和一郎 (Waichiro Matsumoto)

§0. Ultradifferentiable classes について.

与えられた正数列 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\mathbb{R}^l$ の部分集合 Ω (又は $\Omega_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$, $i=1,2$) に対して.

$$\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega) = \{ f(x) \in C^\infty(\Omega) \;;\; {}^\exists R>0 \ {}^\exists C>0 \ \text{s.t.}\ {}^\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^l \quad |f^{(\alpha)}(x)| \leq C R^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \ \text{in}\ \Omega \},$$

$$\mathcal{B}[M_n](\Omega) = \{ f(x) \in C^\infty(\Omega) \;;\; {}^\forall R>0 \ {}^\exists C>0 \ \text{s.t.}\ {}^\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^l \quad |f^{(\alpha)}(x)| \leq C R^{|\alpha|} M_{|\alpha|} \ \text{in}\ \Omega \},$$

$$\mathcal{B}\{M_n^1, M_n^2\}(\Omega_1 \times \Omega_2) = \{ f(x) \in C^\infty(\Omega_1 \times \Omega_2) \;;\; {}^\exists R>0 \ {}^\exists C>0 \ \text{s.t.}\ {}^\forall (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^{l_1+l_2},\ |f^{(\alpha_1,\alpha_2)}(x)| \leq C R^{|\alpha_1|+|\alpha_2|} M^1_{|\alpha_1|} M^2_{|\alpha_2|} \},$$

$$\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega) = \{ f(x) \in C^\infty(\Omega) \;;\; {}^\forall K:\text{compact set in}\ \Omega\ \text{に対して}\ f(x) \in \mathcal{B}\{M_n\}(K) \},$$

$$\mathcal{D}\{M_n\}(\Omega) = \mathcal{B}\{M_n\}(\Omega) \cap \mathcal{D},$$

とおく。ここに $f^{(\alpha)} = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x)$ のことである。これらの函数空間を ultradifferentiable classes と呼ぶ。特に

$M_n = n!^{\nu}$ のとき ν 次の Gevrey class と呼ぶ。 更に L^2 の意味の ultradifferentiable classes を導入しよう。

$$\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}_R(\mathbb{R}^\ell) = \{ f(x) \in \mathcal{D}_{L^2}^{\infty}(\mathbb{R}^\ell) \ ; \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^\ell} \| f^{(\alpha)} \|_{L^2} / (R^{|\alpha|} M_{|\alpha|})^2 < \infty \},$$

$$\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell) = \operatorname*{ind.lim}_{R \to \infty} \mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}_R(\mathbb{R}^\ell) .$$

$\mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}_R(\mathbb{R}^\ell)$ は $(f,g) = \sum_\alpha (f^{(\alpha)}, g^{(\alpha)})_{L^2} / (R^{|\alpha|} M_{|\alpha|})^2$ により Hilbert 空間になる。

以上の空間の dual spaces を ultradistributions と呼ぶ。これらの位相的性格については H. Komatsu [4] を見られたい。位相以外のことをまとめておこう。

1). Kolmogoroff の定理により $\mathcal{B}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$, $\mathcal{D}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$ においては. $\{M_n\}$ を logarithmic convex なものに class を変えずにおきかえられる。 $\mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$ においても. $c(n+1)M_n \leq M_{n+1}$ が成り立っていれば、$\{M_n\}$ を logarithmic convex なものにおきかえられる。 c は n に無関係なある正定数である。

以下. 常に $\{M_n\}$ は logarithmic convex であるとする。このことにより. ultradifferentiable classes は algebra を成す。(L^2 の意味の u.d. classes は除く。)

2) Ultradifferentiable class が quasi-analytic となるための必要十分条件は次の (A) である。

$$\text{(A)} \qquad \sum_n M_n^{-\frac{1}{n}} = \infty \quad .$$

3) ultradifferentiable class が微分可能とは.

$f(x) \in \mathcal{B}\{M_n\}(\Omega)$ のとき $\alpha \in \mathbb{Z}_+^l$ を一つとると $f^{(\alpha)}(x) \in \mathcal{B}\{M_n\}(\Omega)$ となることである。このための必要十分条件は

(D) $\qquad \log M_n \leq O(n^2)$,

である。 1), 2) 及び微分可能性については S. Mandelbrojt [8] を見られたい。

4) Ultradifferentiable classes が分離的であるとは $f(x) \in \mathcal{B}\{M_n\}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ のとき $f(x) \in \mathcal{B}\{M_n, M_n\}(\Omega_1, \Omega_2)$ となることである。分離的であれば次の条件 (S) が成り立つが逆は必ずしも正しくない。

(S) $\qquad \log M_n \leq O(n \log n)$.

(S) は Gevrey class かその subclass であることを主張している。
実際 Gevrey classes は分離的である。
このことについては W. Matsumoto [11] を見られたい。

5) $\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega)$ が non-zero element による商と解析函数への代入に閉じるための必要十分条件が、W. Rudin [13] によって与えられている。

(Q) $\qquad F_n = (M_n/n!)^{1/n}$ に対して $\exists C > 0$ s.t.

$$F_j \leq C F_n \qquad (1 \leq j \leq n) .$$

(Q) をみたす $\{M_n\}$ を概増大と呼ぶ。

6) $\mathcal{B}\{M_n\}(\Omega)$ の元同志の合成に閉じるための十分条件として、次の (C) がある。 $E_n = (M_n/n!)^{\frac{1}{n-1}}$ とおこう。

(C) $\qquad E_j \leq C E_n \quad (2 \leq j \leq n) \quad$ for $\exists C > 0$.

更に条件(C)の下に常微分方程式の解が係数と同じclassに求まり．そのclassの中で陰函数の定理が成り立つ。これらについては H. Komatsu [5], [6], [7] を見られたい。

7) $\{\alpha_n\}$ ($\alpha_n \in \mathbb{C}$) が $\exists R>0$ $\exists C>0$ に対して $|\alpha_n| \leq CR^n M_n$ をみたすとき．$f^{(n)}(0)=\alpha_n$ となる $f(x) \in \mathcal{B}\{M_n\}(\mathbb{R})$ を構成できるための十分条件が．L. Carleson [1] に与えられている。$G(t)=\sup_n\{nt-\log M_n\}$ $(t>0)$ とおこう。

$$(E)\quad \begin{matrix}\exists\delta>0\\ \exists\varepsilon>0\end{matrix}\quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{G(t+\log s)}{1+s^2}ds+\frac{1+\varepsilon}{2}\log t \leq G(t+\delta) \quad (t\gg 1).$$

なお．$\log M_n \leq O(n^2)$ のときは左辺第二項は落とせる。

以上．5) 及び 6) の条件は．素直な $\{M_n\}$ ならばたいがい満たす。7) も Gevrey classes をはじめ．$M_n=\exp hn^\delta$ $(\delta>1, h>0)$ 等かなり広い $\{M_n\}$ について成り立つが．$[n(\log n)^K]^n$ $(K>1)$ は除かれる。

8) $\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ の元の ∞ 次の零点のまわりの挙動を特徴づけておこう。もちろん $\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ が non-quasianalytic の場合にのみ興味がある。$\mathcal{S}(r)=\sup_n \frac{n!\,r^n}{M_n}$ $(r>1)$ とおこう。$f(x)\in\mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ が x_0 を ∞ 次の零点にもつとする。

$$(0)\qquad |f(x)| \leq C\,\mathcal{S}\left(\frac{1}{R|x-x_0|}\right)^{-1} \qquad (\text{for } \exists R>0, \exists C>0)$$

と評価される。

9) $f\in\mathcal{D}\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$ のとき．$f(x)$ の Fourier image $\hat{f}(\xi)$ は

$$(F_0)\quad \forall R>0\ \exists C>0\quad |\hat{f}(\xi)| \le C\, T\left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{-1}$$

ここに $T(r) = \sup_n \dfrac{r^n}{M_n}$ である。

又. $f \in \mathcal{D}_{L^2}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$ 及び $u \in \mathcal{D}'_{L^2}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$ の Fourier image $\hat{f}(\xi)$, $\hat{u}(\xi)$ は共に可測函数で:

$$(F_1)\quad \exists R>0\quad \exists g(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^\ell)\qquad \hat{f}(\xi) = T\left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{-1} g(\xi),$$

$$(F_2)\quad \forall \varepsilon>0\quad \exists v_\varepsilon(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^\ell)\qquad \hat{u}(\xi) = T(\varepsilon|\xi|)\, v_\varepsilon(\xi),$$

とかける。

10) 7)〜9) に登場する $G(t)$, $S(r)$, $T(r)$ の間には次の関係がある。

$$T(r) = \exp G(\log r)\ ,\quad \log M_n = \sup_t \{nt - G(t)\},$$

$$S(r) = \exp H(\log r)\ ,\ ここに\ H(t) = \sup_n \{nt - \log M_n/n!\}.$$

これらの函数は Lipschitz 連続であるが C^1 ではない。このことは. 応用上不便である。このことは $a_n = \log M_n$ が discrete にしか与えられてないことから起こる。$\{a_n\}$ を $\mathbb{R}_+$ 上に拡張しよう。簡単のために $\{(n, a_n)\}$ はそれらが成す Newton 多角形の頂点になっているとしよう。この Newton 多角形の辺を表す式を $y = a_x$, (n, a_n) をすべて通る C^∞, 単調増大, concave なグラフを $y = a(x)$ とする。
$a(x)$ のことを $\{a_n\}$ の軟化函数という。
$a_{x-1} \le a(x) \le a_x$ が成り立つ。このことから.

$\tilde{G}(t) = \sup_{x>0} \{xt - a(x)\}$ とおくと次の関係が成り立つ。

$$G(t) \le \tilde{G}(t) \le G(t) + t\ .$$

特に $\log M_n \leq O(n^2)$ (i.e. class が微分可能) ならば $G(t)$ と $\tilde{G}(t)$ は同値となる。ここに $G_1(t)$ と $G_2(t)$ が同値とは、$\exists \gamma > 0$ s.t. $G_1(t-\gamma) \leq G_2(t) \leq G_1(t+\gamma)$ が成り立つことで、このことは $a_i(x) = \sup_t \{tx - G_i(t)\}$ とおくと

$$a_1(x) + \gamma x \leq a_2(x) \leq a_1(x) + \gamma(x) \text{ が、更には}$$

$\log M_i(x) = a_i(x)$ とおくと $R^{-x} M_1(x) \leq M_2(x) \leq R^x M_1(x)$ ($R = e^\gamma$) が成り立つことと同等である。$x = n \in \mathbb{Z}_+$ とおいてみれば、この定義の~~妥~~当性がわかるであろう。

したがって、$\log M_n \leq O(n^2)$ のときは $G(t)$ と $\tilde{G}(t)$ を同等にあつかってよい。$\tilde{T}(r) = \exp \tilde{G}(\log r)$ とおく。$\tilde{H}(t)$, $\tilde{S}(r)$ も同様。

例

1° $M_n = n!^\nu$ に対して $\tilde{T}(r) = \exp r^{\frac{1}{\nu}}$ $(\nu > 0)$, $\tilde{S}(r) = \exp r^{\frac{1}{\nu-1}}$ $(\nu > 1)$

2° $M_n = \exp h n^\delta$ $(\delta > 1,\ h > 0)$ に対して、

$$\tilde{T}(r) = \exp h^* (\log r)^{\delta^*}, \quad \delta^* = \frac{\delta}{\delta-1}, \quad h^* = \frac{\delta-1}{\delta}(\delta h)^{-\frac{1}{\delta-1}},$$

$$\tilde{S}(r) \gtrsim \exp\Big[h^* (\log r)^{\delta^*} + \frac{\delta}{(\delta-1)^2} h^* (\log r)^{\delta^*-1} \log\log r + O((\log r)^{\delta^*-1}) \Big].$$

§1. Introduction.

一般の ultradifferentiable classes や ultradistributions そのものについてはよく研究されている。しかし微分方程式論に登場するのはもっぱら Gevrey classes

である。微分方程式論においては Gevrey classes だけですべての議論は間に合うのであろうか。実は Gevrey classes より真に広い C^∞ の真部分空間が問題に適合する場合もある。そのうち相対的に一般性をもった一例を解説するのが本稿の目的である。本論に入る前に偏微分方程式論では何故 Gevrey classes しかとり扱われないのか、状況証拠を分析してみたい。

第一に、§0, 4) で述べた分離性の問題である。$\{M_n\}$-class の $-\infty$ 次の擬微分作用素が $\mathcal{E}'\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$ の元を $\mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$ へ写すのは $\mathcal{E}\{M_n\}$ が分離性を持つとき、そのときに限られるし、分離性をもつのは Gevrey classes かそのsubclasses に限られる。すなわち Gevrey classes より広い class では $-\infty$ 次の擬微分作用素を modulo として特異性の伝播を論じるわけにいかなくなるし、$-\infty$ 次の operator を perturbation として逐次近似で方程式を解くことはむつかしくなる。(もちろん、係数, data, 解の所属する classes をそれぞれ異ってとれば、これらのことは可能となる。)
(See W. Matsumoto [12].)

第二に、たとえば、理想的な場合として、定係数や解析係数をもつ方程式を対象とすると、Gevrey classes 以外の ultradifferentiable classes を必要とするモデルが(少くとも経験的には)無い。Gevrey classes より広い classes が必要とされるのは、∞ 次の零点の存在に起因する。しかも

Gevrey class を係数に導入することにより Gevrey classes より真に広い classes が適合するモデルが作れる! Gevrey 性が非 Gevrey 性を呼び起こす。

有限次の零点と∞次の零点ではまるでとりあつかいの難易度が違う。例をあげよう。$P = \partial_t^2 - a(t)\partial_x^2 - b(t)\partial_x$ に対する初期面 $t=0$ の Cauchy 問題を考えよう。$a(t) = t^{2l}$, $b(t) = t^m$ のとき、$m \geq l-1$ ならば $\mathcal{E}$-well posed, $m < l-1$ ならば $\kappa = (2l-m)/(l-m-1)$ より小な指数をもつ Gevrey classes は data として admissible だが、より大な指数をもつ Gevrey classes はもはや admissible でない。(ある class が admissible とはその class の任意の data に対して古典解が唯一存在することである。) (See V.Ya. Ivrii [3] and K. Igari [2].) 他方 $a(t) = \exp(-2t^{-n})$, $b(t) = B\, t^{-l}\exp(-t^{-n})$ とると次のようになる。$\mathrm{Re}\,B \neq 0$ ならば $l \leq n+1$ のとき C^∞ well posed であり、$l > n+1$ のとき $M_n = \exp h_1 n^{\delta_1}$ ($\delta_1 = (l-1)/(l-n-1)$, $h_1 < |\mathrm{Re}\,B|/2(l-1)$) について $\mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$ が admissible となる。又、$\mathrm{Re}\,B = 0$ ならば $l \leq 2n+1$ のとき C^∞ well posed であり、$l > 2n+1$ のとき、$M_n = \exp h_2 n^{\delta_2}$ ($\delta_2 = (l-n-1)/(l-2n-1)$, $h_2 < 2|B|/n$) について $\mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^l)$ が admissible となる。(S. Tarama [14], 及びその証明。)

さて上の結果を一般化しようとすると、前者は係数は解析的としてしまえば容易に一般化できる。しかし、後者の場合は一般化はその表現に困る。$a(t)$ は 1+ 六次の

Gevrey class の元で、$t=0$ が ∞ 次の零点といっても、もっとも $a(t)$ の $t=0$ での挙動は特定できない。§0, 8) の不等式 (0) により、$|a(t)| \leq C \exp\{-At^{-n}\}$ for $\exists A>0$, $\exists C>0$ と上から評価できるだけである。しかるに今必要とされているのは、小ささではなく大きさなのだ。しかるに ∞ 次の零点というだけでは $a(t)\equiv 0$ すら排除されてないし、$\kappa \geq n$ に対して $\exp\{-t^{-\kappa}\}$ はすべて $1+\frac{1}{n}$ 次の Gevrey class に属する。

§2. 問題と予備的結果. $N\times N$ 一階方程式系に対する Cauchy 問題を考えよう。

$$
(1)\quad \begin{cases} Pu \equiv \left(D_t - \sum_{i=1}^{\ell} A_i(t,x)D_{x_i} - B(t,x)\right)u = f(t,x), \\ u(t_0,x) = u_0(x). \end{cases}
$$

(1) が $\{M_n\}$-solvable とは $\forall t_0 \in [T_1, T_2]$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^\ell$ を固定するごとに、(t_0, x_0) の近傍 ω があって、$t=t_0$ を初期面とする Cauchy 問題 (1) が $\forall u_0(x) \in \mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$, $\forall f(t,x) \in \mathcal{E}\{M_n\}(\Omega)$ $(\Omega = [T_1, T_2]\times\mathbb{R}^\ell)$ に対して解 $u(t,x) \in C^1(\omega^+_{t_0})$ が存在することをいう。特に解の一意性も従うとき、$\{M_n\}$-well posed という。ここに $\omega^+_{t_0} = \{(t,x)\in\omega;\ t \geq t_0\}$.

さて、$A(t,x,\xi) = \sum_{i=1}^{\ell} A_i(t,x)\xi_i$ が一様に対角化可能のとき、(1) は C^∞ well posed である。よって、対角化不可能な、最も簡単な場合を考えよう。

<u>仮定</u>. $\det(\tau I - A(t,x,\xi)) = 0$ の根はすべて実、多重度不変かつ高々二重根である。

以下本稿では常に上の仮定をおく。このとき $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log M_n}{n \log n} < 2$ (Gevrey class でいえば次数が2未満のとき) かつ $\mathcal{E}\{M_n\}$ が分離的ならば、係数が $\mathcal{E}_t^2([T_1, T_2]; \mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell))$ に属するという仮定の下に、任意の $\mathcal{E}_t^1([T_1, T_2]; \mathcal{E}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell))$ の低階に対して (1) は $\{M_n\}$-*wellposed* である。他方次の定理が成り立つ。

<u>定理 1.</u> $\exists R > 0$ s.t. $(\log M_n - nR)/n \log n \geq 2$ $(n \gg 1)$ なる $\{M_n\}$ が (Gevrey class でいえば指数2以上), (Q) を満たすとしよう。$A_i(t,x) \in \mathcal{E}_t^2([T_1, T_2]; \mathcal{E}\{M_{n-n_0}\}(\mathbb{R}^\ell))$ $(i=1,\cdots,\ell)$ かつ $B(t,x) \in \mathcal{E}_t^1([T_1, T_2], \mathcal{E}\{M_{n-n_0}\}(\mathbb{R}^\ell))$ と仮定する。(1) が各点で $\{M_n\}$ <u>*solvable*</u> ならば次の条件 (L) が成り立つ。

$$(L) \quad {}^{co}P_p P_s \, {}^{co}P_p + \frac{1}{2i} {}^{co}P_p \{P_p, {}^{co}P_p\} = 0$$

on the double characteristics.

ここに P_p は P の主要部, $P_s = -B(t,x) - \frac{1}{2i} \sum_{i=0}^{\ell} P_{p\,(i)}^{(i)}$, $\{\ ,\ \}$ は t にても含めた $\ell+1$ 次元の *Poisson bracket*, ${}^{co}P_p$ は P_p の *cofactor matrix* である。なお解の空間を $\mathcal{D}_{L^2}^{1}{}_{,t}([t_0, t_1]; \mathcal{D}_{L^2}'\{M_n\}(w_0))$ $([t_0, t_1] \times w_0 \subset W)$ にゆるめても同じ結果が成り立つ。

<u>注意</u> $\log M_n = O(n^2)$ のとき、解の空間は $\mathcal{D}_{L^2}^{1}{}_{,t}([t_0, t_1]; \mathcal{D}'\{M_n\}(w_0))$

にゆるめてもなお定理1は成り立つ。証明は省略する。

さて、条件(L)を仮定するとadmissibleなdataの空間はどこまで広がるであろうか? そのことを考察するのに、keyとなる命題を、W. Matsumoto [9], [10] から引用しよう。

命題2. A_i $(i=1,\cdots,\ell)$ は t のみに依存し、C^∞ としよう。B は $C^m(\Omega)$ の元とする。二重根 $\lambda_j(t,\xi)$ に対して $\Omega_1^j(\xi) \equiv \{t \in [T_1,T_2]; \mathrm{rank}(\lambda_j(t,\xi) - A(t,\xi)) = N-1\} = \bigcup_k I_k^j(\xi)$ とおこう。ここに $\{I_k^j(\xi)\}_k$ は互いに交らない開区間列である。以下、固定した j, ξ について論ずるから j と ξ を略す。(L)の下に、I_k における $A(t,\xi)$ の $\lambda_j(t,\xi)$ に関する $\overset{unit}{\text{eigenvector}}$ $\vec{e}_k(t)$ は次の性質をもつ。

1) $\forall k$, $\vec{e}_k(t) \in C^{m+1}(I_k)$ ととれる。

2) $\bar{I}_k \cap \bar{I}_{k'} = \{\bar{t}\}$ のとき、$\vec{e}_k(\bar{t}) = \vec{e}_{k'}(\bar{t})$ ならば $\vec{e}_k(t)$ と $\vec{e}_{k'}(t)$ は $t=\bar{t}$ で C^{m+1} に接続される。

特に係数 $A_i(t)$ $(i=1,\cdots,\ell)$ の要素がすべて ∞ 次の零点を持たなければ $\vec{e}(t) \in C^{m+1}([T_1,T_2])$ ととれる。

更に、「$\forall \xi \neq 0$ $\Omega_1^j(\xi) \neq \phi$」ならば $\vec{e}(t,\xi)$ は $C^{m+1}(\Omega \times R^\ell \backslash 0)$ にとれる。

注意. $A_i(t)$, $B(t,x)|_{x=x_0}$ が $\mathcal{E}\{M_n\}([T_1,T_2])$ に属し、$\{M_n\}$ が (C) をみたせば $\vec{e}_k(t) \in \mathcal{E}\{M_n\}(\bar{I}_k)$ となる。(x_0 は任意の R^ℓ の点。)

注意. 命題は擬微分作用素に対しても成り立つ。

注意　$l=1$ のときは A_i は t, x 両方に依存しても命題は成り立つし、その時「…」の仮定は不要である。

まず、quasi-analytic の場合から考察しよう。

定理3.　(L) を仮定しよう。(A) を満たす $\{M_n\}$ により、$A_i(t) \in \mathcal{E}\{M_n\}(I)$, $B(t,x) \in C^\infty(\Omega)$ でかつ「$\forall \xi \neq 0$ $\Omega_i^j(\xi) \neq \phi$」又は「$\forall \xi \neq 0$, $\Omega_i^j(\xi) = \phi$」が各 j ごとに成り立っているとしよう。このとき (1) は $\mathcal{E}$-wellposed である。　$(I = [T_1, T_2])$

注意　$N=2$ ならば定理中「…」又は「…」の仮定はいらない。

系4.　$l=1$ としよう。(L) の下に $\{M_n\}$ が (A) をみたし $A_1(t,x) \in \mathcal{E}\{M_n\}(I \times \mathbb{R}^1)$, $B(t,x) \in C^\infty(I \times \mathbb{R}^1)$ ならば (1) は $\mathcal{E}$ wellposed である。

これらの定理や系は、命題2の2)(及び付加的考察)により主要部がなめらかな symbol をもつ pseudodifferential operator で三角化でき、各 block ごとに dense set 上で真に三角か、対角になっていること、更に前者の場合は、(L) により0階も三角行列になっていることから容易に従う。

§3. Non-quasianalytic 係数の場合.

さて、係数が non-quasianalytic の場合でも、条件 (L) の下に $\mathcal{E}$ wellposedness が従うであろうか。一般には正しくない。本稿末でその例に

ふれる。ここでは条件(L)を仮定した場合の admissible data の空間について先に考察しよう。以下の議論においてはすべて係数は t にのみ依存すると仮定する。

まず $N=2$ としてかわりに operator は空間方向には convolution operator（symbol が x によらない擬微分作用素）であるとして考察する。（この係数が x によらないという仮定は一つには§1で述べた Gevrey classes より広い class での擬微分作用素の理論の本質的な困難を避けるためであるが、その他に命題2が、係数が x にも依存する場合は $l \geqq 2$ においては、bicharacteristic strips に沿う性質として記述できないことにもよる。）

$$(2)\quad \begin{cases} Pu \equiv [D_t - \lambda(t,D_x) + A(t,D_x) + B(t,D_x) + C(t,D_x)]\,u = f(t,x), \\ u(t_0,x) = u_0(x), \end{cases}$$

ここに A, B, C は 2×2 行列, $\lambda(t,\xi), A(t,\xi)$ は ξ に関して 1次正斉次, $B(t,\xi)$ は 0次正斉次, $C(t,\xi)$ は高々 -1 次であり、A は $\mathrm{tr}\,A \equiv \det A \equiv 0$ をみたす。この最後の条件により、$\lambda(t,\xi)$ がただ一つの特性根（=重根）となる。

§0, 10) で定義した $\mathcal{E}$ とをつかう。$a_n = \log M_n/n!$ の軟化函数を $a(x)$ とし、それから定義されるトレース函数を $\tilde{H}(t)$ としよう。「$(\tilde{H}''(t)/\tilde{H}'(t)) + 1 \leqq \tilde{H}'(t)$」をみたすときは

$\mathcal{S}_0(r) = \exp \tilde{\hat{H}}(\log r)$ とおく。通常の素直な $\{M_n\}$ ならば、条件「……」は満たされている。さて、いかなる軟化を用いても、「……」が満たされない場合は、$\bar{H}(t) \leq \hat{H}(t)$ かつ「……」を満たす $\bar{H}(t)$ を一つとって $\mathcal{S}_0(r) = \exp \bar{H}(\log r)$ とおく。($\bar{H}$としては $\hat{H}$ に近い方が良い。)

命題5. (L)を仮定する。条件(Ω)を満たし(A)を満たさない $\{M_n\}$ に対して、$A(t,\xi)/(|\xi|+1)$ が ξ に関して一様に $\mathcal{B}\{M_{n-1}\}(I)$ に、$B(t,\xi)$, $C(t,\xi)(|\xi|+1)$ が ξ に関して一様に $C^0(I)$ に属するとしよう。ξ に関しては t に一様に有界可測であればよい。

$N_n = n![\mathcal{S}_0(\frac{n}{R})]^n$ とおこう。(R は方程式の係数から決まる正定数である。) $\forall u_0(x) \in \mathcal{D}[N_{n-\ell-2}](\mathbb{R}^\ell)$, $\forall f(t,x) \in \mathcal{E}_t^0(I;\mathcal{D}[N_{n-\ell-2}](\mathbb{R}^\ell)$ に対して一意的な $\overbrace{\text{解}}^{(2)の}$ が $C^2(\Omega)$ に存在する。

注意. $\log M_n \leq O(n^2)$ ならば $A(t,\xi)/(|\xi|+1)$ の class は $\mathcal{B}\{M_n\}(I)$ でよい。又、$\log N_n \leq O(n^2)$ ならば data の class の $\{N_{n-\ell-2}\}$ は $\{N_n\}$ におきかえてよい。

注意. 作用素 P が微分作用素ならば、有限伝播速度が保証されるから、data の support compact in x の制限は除くことができて $[N_{n-\ell-2}]$-wellposed となる。

主張を明確にするために例をあげよう。

例1. $M_n = n!^\nu$ $(\nu > 1)$ に対し、$N_n = n! \exp h n^{\frac{\nu}{\nu-1}}$。($h$ は係数から決まる正数。)

例2. $M_n = n!\exp h n^{\delta}$ $(\delta>1,\ h>0)$ に対し
$$N_n = n!\exp h^{*} n(\log n - K)^{\delta^{*}} \quad \left(\delta^{*}=\frac{\delta}{\delta-1},\ h^{*}=\frac{\delta-1}{\delta}(\delta h)^{-\frac{1}{\delta-1}},\right.$$
Kは充分大な数(係数から決まる。))

系6 (L)を仮定しよう。$A(t,\xi)/(|\xi|+1)$, は ξ に一様に $C^{m,\alpha}(I)$ $(m\in\mathbb{Z}_{+}$, $0<\alpha\le 1$, $m+\alpha\ge 1$, ここに. $\alpha<1$ のとき. $C^{m,\alpha}$ は m階導函数が α 次のHölder連続, $\alpha=1$ のとき Lipschitz連続になるclass.) $B(t,\xi)$, $C(t,\xi)(|\xi|+1)$ が ξ に関して一様に $C^{0}(I)$ に属するならば、$\forall u_0(x)\in\mathcal{D}[n!^{m+1+\alpha}](\mathbb{R}^{\ell})$, $\forall f(t,x)\in\mathcal{E}_t^{0}(I;\mathcal{D}[n!^{m+1+\alpha}](\mathbb{R}^{\ell}))$ に対して一意解を $C^{1}(\Omega)$ にもつ。

系6の証明. $\tilde{\delta}(r)$ として $r^{m+\alpha}$ が対応するから命題5により $N_n = n!\left(\frac{n}{R}\right)^{(m+\alpha)n}$ となる これは $n!^{m+1+\alpha}$ に同値である。

命題5の証明. 方程式(2)をFourier変換しよう。

$$(3)\quad \begin{cases} \hat{P}\hat{u} \equiv \left[\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\hat{u} - \lambda(t,\xi) + A(t,\xi) + B(t,\xi) + C(t,\xi)\right]\hat{u} = \hat{f}(t,\xi), \\ \hat{u}(t_0,\xi) = \hat{u}_0(\xi)\ . \end{cases}$$

(3)の常微分方程のFundamental matrixの $|\xi|\to\infty$ の挙動をしらべよう。その存在は保証されているから挙動さえわかればよい。したがって. 各 $\dot{\xi}\in S^{\ell-1}$ を固定して. $\xi=\rho\dot{\xi}$ $(\rho>0)$ とおき. $\rho\to\infty$ のときの $\dot{\xi}$ に一様な評価

を出せばよい。 命題2, 2)により, $\{I_k(\hat\xi)\}$ をとり直して,

1) $\vec{e}_k(t,\hat\xi) \in \mathcal{E}\{M_{n-j}\}(I_k) \cap C^1(\bar{I}_k)$,

2) $\bar{I}_k \cap \bar{I}_{k'} = \{\bar{t}\}$ ならば $\pm\vec{e}_k(\bar{t},\hat\xi) \neq \vec{e}_{k'}(\bar{t},\hat\xi)$ となる。

が満たされるようにする。このとき, $A(t,\hat\xi)$ は $t=\bar{t}$ で∞次の零点としてもつ。このとき, $\{I_k(\hat\xi)\}$ は $\hat\xi$ をとりかえると, 全く異るものになるかもしれないが, $|\vec{e}_k(t,\xi)|$ の上限は, $\hat\xi$, k によらないものがとれる。

以下, $\hat\xi$ は固定するので, 書くことを省略する。

$\vec{e}$: $A(t,\xi)$ の null vector は一般に I 上不連続である。ゆえに, なめらかな symbol で A を三角化することは望めない。仕方がないから各 $\bar{I}_k$ 上では eigen-space が t に indep. となることだけを目指そう。 $\{I_k\}$ をその幅の広い順にならべかえておいて, $I_k=(t_k^1, t_k^2)$ とおく。 $\{N^{(k)}(t)\}_k$ を次のように inductive に定義する。 $N_k(t)=\begin{pmatrix} e_k^1(t) & -e_k^2(t) \\ e_k^2(t) & e_k^1(t)\end{pmatrix}$, $\vec{e}_k=\begin{pmatrix} e_k^1(t) \\ e_k^2(t)\end{pmatrix}$ (on $\bar{I}_k$) とおき,

$$N^{(0)}(t) = I,$$

$$N^{(k)}(t) = \begin{cases} N^{(k-1)}(t) & t \leq t_k^1 , \\ N^{(k-1)}(t_k^1)\, N_k^{-1}(t_k^1)\, N_k(t) & t \in I_k , \\ N^{(k-1)}(t_k^1)\, N_k^{-1}(t_k^1)\, N_k(t_k^2) & t \geq t_k^2 , \end{cases}$$

とおく。各 $N_k(t)$ は回転行列であるから, 上の行列の積はすべて可換である。又, $\bar{I}_k$ 上 $N^{(j)}(t)$ $(j \neq k)$ は定数行列

である。更に、$\sum_{k=N}^{\infty}|I_k| \longrightarrow 0$ $(N\to\infty)$ より $\{N^{(k)}(t)\}$ は Lipschitz 連続な $N(t)$ に一様収束する。更に $N(t)$ は $\bar{I}_k$ 上定数回転行列 M_k により $N(t)=M_k N_k(t)$ とかけるから、$N(t)\in \mathcal{E}\{M_{n-1}\}(I_k)\cap Lip(\bar{I}_k)$ となる。

$$v(t)=N(t)\,\hat{u}(t,\hat{\xi})\,\exp\left[-i\int_{t_0}^{t}\lambda(s,\hat{\xi})\,ds\right]$$ とおこう。

$v(t)$ は下の方程式をみたす。

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}v(t)=\left[\rho\tilde{A}(t)+\tilde{B}(t)+\tilde{C}(t,\rho)\right]v(t)+\hat{f}(t,\rho), \\ v(t_0)=v_0(\rho\hat{\xi}), \end{cases}$$

ここに $\tilde{A}(t)$ は I_k の端点で ∞ 次の零点にもち, $\mathcal{B}\{M_{n-1}\}(I)$ の ∞ 次の零点と同じ評価(0)をもつ。他方、$\tilde{B}(t)$, $\tilde{C}(t,\rho)$ $(\rho+1)$ は ρ, t に関して有界可測である。又、次の関係が成り立つ。

$$(5)\quad \begin{cases} \text{i)}\quad M_k^{-1}\tilde{A}(t,\rho)M_k=\begin{pmatrix}0 & \rho\mu(t)\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ on } \bar{I}_k \text{ かつ} \\ \qquad\qquad \mu(t)\neq 0 \quad \text{in } (I_k \text{ の dense set}), \\ \text{ii)}\quad M_k^{-1}\tilde{B}(t,\rho)M_k=\begin{pmatrix}* & *\\ 0 & *\end{pmatrix} \text{ on } \bar{I}_k, \\ \qquad\qquad (\text{ ii) は条件 (L) による。}) \\ \text{iii)}\quad \tilde{A}(t,\rho)\equiv 0 \quad \text{in } I\setminus\bigcup_k I_k . \end{cases}$$

(4) の Fundamental matrix を逐次近似で求めよう。$L(t,\rho)=\rho\tilde{A}(t)+B(t)+\tilde{C}(t,\rho)$ とおこう。

$$U^0(t) = I.$$

$$U^j(t) = \int_{t_0}^{t} L(s,\rho)\, U^{j-1}(s)\, ds$$

$$= \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{s_j}\cdots\int_{t_0}^{s_2} L(s_j,\rho)\cdots L(s_1,\rho)\, ds_1\cdots ds_j \qquad (j \geq 1)$$

とおこう。

(5) により、$s_{k1}, \cdots s_{kj}$ がすべて I_k に含まれるならば $\prod_i L(s_{ki},\rho)$ は高々一次で次の評価をもつ。

$$|L(s_{kj},\rho)\cdots L(s_{k1},\rho)| \leq C\,(CC')^{j-2}\, S_0\left(\frac{1}{R_0 l_k}\right)^{-1}\rho + C(CC')^{j-1},$$

ここに 積の個数は C'^j にこめらせている。又、l_k は I_k の区間幅である。($\S 0$, δ) を用いた。)

このことより $\prod_{i=1}^{j} L(s_i,\rho)$ は次の評価をもつ。

$$\left|\prod_{i=1}^{j} L(s_i,\rho)\right| \leq \sum_{h=0}^{m}\left\{ C(CC')^{j-h-1} \sum_{\{k_{i}\} \in \{\bar{k}_j\}_{j=1}^{m}} \prod_{i=1}^{h} S_0\left(\frac{1}{R_0 l_{k_{i_h}}}\right)^{-1}\rho^h \right.,$$

ここに $\{\bar{k}_j\}_j$ は少くとも一つ s_i を含む区間の添字である。又、m は s_i を含む区間の数である。

$m \leq j$ ゆえ、$\{k_{i_h}\}$ の選択の可能性は高々 ${}_jC_h$ である。

又、「$\frac{\tilde{H}''}{\tilde{H}'} + 1 \leq \tilde{H}'(t)$」の類の仮定により $\left\{S\left(\frac{1}{r}\right)^{-1}\right\}' \Big/ S\left(\frac{1}{r}\right)^{-1}$ は r の単調減少函数である。よって

$$\prod_{i=1}^{h} S_0\left(\frac{1}{R_0 l_{k_i h}}\right)^{-1} \leq S_0\left(\frac{2h}{R_0(|I|+\varepsilon)}\right)^{-h}$$

が従う。（εは任意の正定数．εを小さくとると．兄の評価式中の C が大きくなる。）　$R=\frac{R_0(|I|+\varepsilon)}{2}$ とおこう。次の評価がえられる。

$$|\Pi L(s_i,\rho)| \leq \sum_{h=0}^{j}\left\{C(CC')^{j-h-1}{}_jC_h\, S_0\left(\frac{h}{R}\right)^{-h}\rho^h\right\}.$$

これより、

$$|v^j(t)| \leq \sum_{h=0}^{j} C(CC')^{j-h-1}\frac{1}{h!(j-h)!}S\left(\frac{h}{R}\right)^{-h}\rho^h(t-t_0)^j,$$

従って

$$\sum_{j=0}^{\infty}|v^j(t)| \leq C'^{-1}\sum_{h=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^h}{h!}S_0\left(\frac{h}{R}\right)^{-h}\sum_{j=h}^{\infty}\frac{1}{(j-h)!}\left(CC'(t-t_0)\right)^{j-h}$$

$$\leq C'^{-1}e^{CC'(t-t_0)}C(K_0)\,T_1(K_0(t-t_0)\rho)$$

$$(\forall K_0>1)$$

ここに $T_1(r)$ は $N_n=n!\,S_0\left(\frac{n}{R}\right)^n$ の随伴函数

i.e. $T(r)=\sup_n\frac{r^n}{N_n}$.

$N(t)$, $N(t)^{-1}$, $\exp\left[\pm i\int_{t_0}^{t}\lambda(s,\rho)\,ds\right]$ は共に有界であるから．(3) の Fundamental matrix も $|v(t)|$ と同じ評価をもつ。

$\mathcal{D}\{N_{n-3}\}(\mathbb{R}^l)$ の元 φ は $|\hat{\varphi}(\xi)| \leq C\,T_1\left(\frac{|\xi|}{R'}\right)^{-1}(|\xi|+1)^{-l-2}$ の評価をもつから命題がえられた。（R′は任意に小にとれる。）

注意. $A(t,\xi)$ に t に関する ultradifferentiability を仮定したのは $\tilde{A}(t,\xi)$ の I_k の端点での vanishing order を得るためだけであった。したがって、その vanishing order がすべての(∞次の)零点で成り立っていれば、C^∞ (又は C^1) でもよい。

一般の $N\times N$ 微分方程式系に命題5を拡張しよう。

定理7. 条件 (L) を仮定する。(E)と(Q)を満たし、(A)を満たさない $\{M_n\}$ に対して、$A_i(t), B(t) \in B\{M_{n-1}\}(I)$ $(i=1,\cdots,\ell)$ としよう。$N_n\ (= n!\,[S_0(\frac{n}{R})]^n)$ が $\overline{\lim_{n\to\infty}}(M_n/N_n)^{\frac{1}{n}} < \infty$ を満たすならば ($R>0$ は係数のみから決まる定数), (1)は $[N_{n-\ell-1}]$-well posed である。但し、方程式から決まる正定数 K_1 により、$T_2 - T_1 \leq K_1$ が満たされているとする。

証明 方程式を Fourier 変換する。$f(t,x)$, $u_0(x)$ を x に関して compact support にとっておけば、$\hat{u}(t,\xi)$ が ξ の entire fn で指数1の exponential type であることは明かである。実軸上での $\hat{u}(t,\xi)$ の挙動を調べることが残された。条件(E)により、$|\xi|$ に関しては local に) $S^{-\infty}\{M_n\}(\mathbb{R}^\ell)$ を modulo として (3) に reduce される。このとき、$\overline{\lim_{n\to\infty}}(M_n/N_n)^{\frac{1}{n}} < \infty$ の仮定により、$S^{-\infty}\{M_n\}$ の symbol は $|\xi|\to\infty$ のとき $T_1(K_0|I|\xi)^{-1}$ より速く減少し、perturbation とみなせる。(W. Matsumoto [12] 参照) Q.E.D.

注意. P14の例及び系のうち、定理7にも適用するのは例1だけである。

反例. P.14の例1に対応する反例を与えよう。

$$\begin{cases} \partial_t u - \begin{pmatrix} 0 & \mu(t) \\ \nu(t) & 0 \end{pmatrix} \partial_x u = f(t,x) \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

$$\mu(t) = \begin{cases} \varphi(a_{2i-1} - t)\,\varphi(t - a_{2i}) & t \in I_{2i-1} \quad (i \geqq 1) \\ 0 & t \in I_{i} \quad (i \geqq 1) \end{cases}$$

$$\nu(t) = \begin{cases} \varphi(a_{2i} - t)\,\varphi(t - a_{2i+1}) & t \in I_{2i} \quad (i \geqq 1) \\ 0 & t \in I_{2i-1} \quad (i \geqq 1) \end{cases}$$

$$\varphi(t) = \left(e^{-2hx^{-a}} \right)',$$

$$T = \sum_{k=n_0+1}^{\infty} 2\left(k \log k \cdots \log_{m-1} k \, (\log_m k)^{\alpha} \right)^{-1} \quad (\alpha > 1)$$

$$\log_i t = \log \log_{i-1} t, \quad \log_1 t = \log t, \quad n_0 : \text{充分大}$$

$$a_1 = T$$

$$a_n = T - \sum_{k=n_0}^{n_0+n-1} 2\left(k \log k \cdots \log_{m-1} k \, (\log_m k)^{\alpha} \right)^{-1}$$

$$I_i = [a_{i-1}, a_i].$$

このとき $\mu, \nu \in \mathcal{B}\{n!^{1+\frac{1}{a}}\}$ である。しかるに、任意に小さい h に対して $\{n^{1+a}[\prod_{i=1}^{m-1} \log_i n \,(\log_m n)^{\alpha}]^{a}\}$-well posed とならない。例1とくらべて結果が甘くなっているのは、命題5の証明では ∞次の零点の分布がわからないから、

少なくともm個あるときは、Iをm等分する点にあるものとして最悪の評価をしたからである。実際は∞次の零点が∞個あるときが興味あるのだが、その場合、それらが均等に分布することはありえない。反例においては$\{a_i\}$を指定したそのことが結果の甘さにつながっている。

(ここに∞次の零点と呼んでいるのは∞次の零点でかつ、いかなる近傍においても$\equiv 0$とならない点のことである。)

反例の証明は、　　　　方程式をFourier変換して実際にFundamental matrixを構成してみる。

文献表

1. L. Carleson ; On universal moment problems, Math. Scand. 9, 1961, 197-206.
2. K. Igari ; An admissible data class of the Cauchy problem for non-strictly hyperbolic operators, J. Math. Kyoto U. 21 (2), 1981, 351-373.
3. V. Ya. Ivrii ; Conditions for correctness in Gevrey classes of the Cauchy problem for weakly hyperbolic equations, Sib. Math. Zh. 17, 1976, 547-563.

4. H. Komatsu ; Ultradistributions, I,
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 20, 1973,
25–105.

5. ——— ; 同上 ; IV, to appear.

6. ——— ; The implicit function theorem for ultradifferentiable mappings
Proc. Japan. Acad. 55, (3), 1979,
69–72.

7. ——— ; Ultradifferentiability of solutions of ordinary differential equations,
Proc. Japan Acad. 56 (4) 1980, 137–142.

8. S. Mandelbrojt ; Séries adhérentes, régularization des suites, applications
Gauthier-Villars, Paris, 1952.

9. W. Matsumoto ; On the conditions for the hyperbolicity of systems with double characteristic roots, I, J. Math. Kyoto U., 21, (1) 1981
47–84.

10. ——— ; 同上, II, 同上, 21, (2), 1981, 251–271.

11. ——— ; Characterization of separativity of ultradifferentiable classes, to appear.

12. W. Matsumoto ; Pseudodifferential operators in general ultradifferentiable classes, to appear.

13. W. Rudin ; Division in algebras of infinitely differentiable functions, J. Math. & Mech., 11 (5) 1962 797–809.

14. S. Tarama ; Un exemple dans le problème de Cauchy pour les équations faiblement hyperboliques, Publ. RIMS Kyoto U. 15 (2), 455–468.