数理解析研究所講究録
第508巻 1983年 163-167

赤外発散の除去について

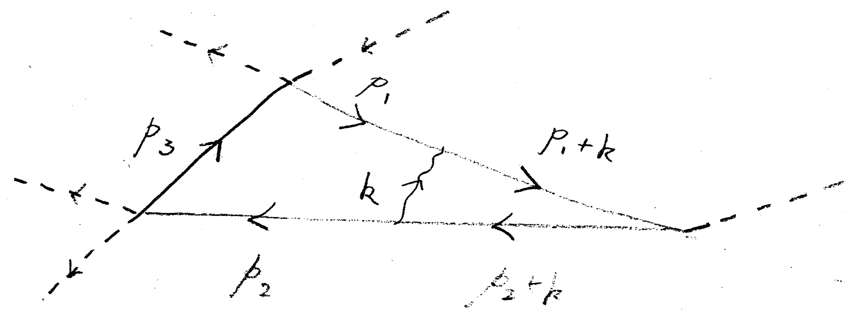
京大・数理研
河合隆裕

赤外発散の問題は，それが遷移確率に於いては消失する為か，余り真剣な研究が為されてきていないように思われる。例えば，行列要素に於いて有限な量を取出すことを試みている［1］がこの方面の代表的な論文とされているが，これは，研究の方向を指し示した重要な物ではあるけれど，（数学者は勿論のこと）良心的な物理学者を満足させ得るものとは，とても思えない。特に，［1］の議論自身が甘い，と云うだけで無く，それから帰結されて来る結果が特異点の付近に於いては甚だ奇妙な物であること（例えば［2］）は深刻であろう。ただ，数学者にとって興味深いことには，QCDに於いてやはり類似の問題を扱う必要を一部の物理学者は感じ始めている由で（Stapp，小嶋両氏による）今後，赤外発散の理論的な研究も多く為されるのでは無いか，と期待される。特に，この方向で最近Stapp［3］が提唱しているrecipeは，［1］と全く異なる，併乍，物理的に合理的と思われる"有限量"の取出し方を与えているように思われる。尤も，そのrecipeで与えられる函数が有限な

物かどうかは a priori には明らかで無い。そこで現在そこに現われる函数の性質をStappと私で調べている所であるが([4])、microlocal analysisの観点から極めて望ましいものであるように思われる。詳しくは[4]を参照して頂くとして、ここでは、どのような函数を考え、又、それの主要項の構造がどのような物であるかを示すに止め度い。

話をはっきりさせる為に、次のようなファインマングラフD'を考えよう：

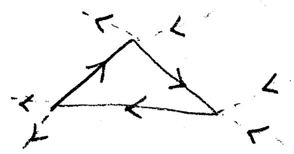
D':



(但し k は massless line)

これに対応するファインマン積分は次のファインマングラフDに対応するランダウー中西多様体$L(D)$に沿って特異性を示す：

D:



[4]の主目標は，然るべく修正されたファインマン積分 F_{QQ} の $L(D)$ に於ける不連続性がどのような物であるかを示す事である。

先ず F_{QQ} の定義がどのようにして与えられたかを述べる。それは massless line の一端に現われる propagator

$$\frac{\not{p}_1 + m_1}{p_1^2 - m_1^2 + i0} \quad \frac{\not{p}_1 + \not{k} + m_1}{(p_1+k)^2 - m_1^2 + i0}$$

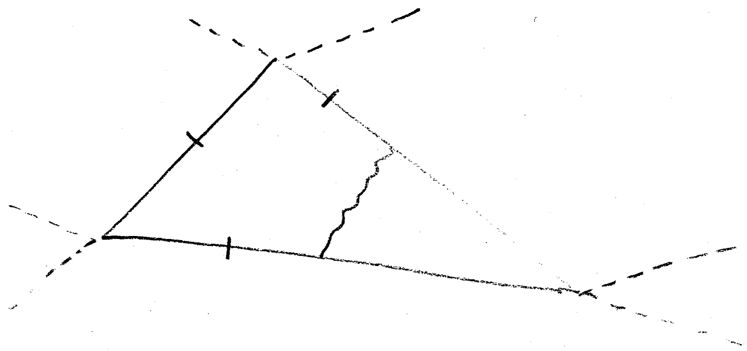
(但し γ_μ をガンマ行列として $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu = g^{\mu\nu}\gamma_\mu p_\nu$)

を，

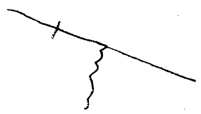
$$F_1 \underset{\mathrm{def}}{=} \int d\lambda \left(\left[\delta(\lambda)\delta^\sigma_\mu + \theta(\lambda) k^\sigma \frac{\partial}{\partial p^\mu} \right] \left(g^{\mu\nu} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \frac{(\not{p} + m_1)\gamma_\sigma(\not{p} + \not{k} + m_1)}{(p^2 - m_1^2 + i0)((p+k)^2 - m_1^2 + i0)} \right)\right) \Bigg|_{p = p_1 + \lambda k}$$

に置き換え，他端に関係する propagator も同様の函数で置き換えることによって与えられる。(この他にもう一つ，F_{QC}，或いは F_{CQ} なる函数も考える必要があるがここでは触れないこととする。) この時，($k \neq 0$ として) Cutkosky rule を Ansatz として用いて F_{QQ} の discontinuity を計算すると，特異性の最も強い項は



なるグラフに対応するものであり，具体的には



なる部分に対応する因子として

$$-2\pi i\,\delta^-(p_1^2-m_1^2)\left[\frac{(\not p_1+m_1)\gamma_\mu(\not p_1+\not k+m_1)}{2p_1k+k^2+i0} - \frac{p_{1\mu}(\not p_1+m_1)}{p_1k+i0}\right]g^{\mu\nu}$$

を与えて discontinuity integral を計算することとなる。ガンマ行列の性質を用いて容易に計算できるように，上の因子は

$$-2\pi i\,\delta^-(p_1^2-m_1^2)\left(\frac{\not p_1+m_1}{2p_1k+k^2+i0}\right)\left(\gamma_\mu\not k - \frac{p_{1\mu}k^2}{p_1k+i0}\right)g^{\mu\nu}$$

となる。この因子は，[3]に於いて，$p_1^2=m_1^2$，$k^2=0$ と仮定して，coordinate space での漸近挙動を調べることによって見出だされた因子

$$\frac{(\not p_1 + m_1)\gamma_\mu \not k}{2p_1 k + i0}\, g^{\mu\nu}$$

をより精密な形で再現させている。ここで、$p_1^2=m_1^2$ 且つ $k^2=0$ と云う所が、通常のファインマン積分に於いては、赤外発散を惹き起こす原因の所であるにも拘らず、ここで見出された因子は、（massless line に対応する propagator $1/(k^2+i0)$ を考慮しても）4次元積分 d^4k を行った時収束する物であることに注意され度い。

尚、今の場合、propagator に該る F_1 が既に対数項を含む為、量的にはずっと弱いけれど、discontinuity へのそれの寄与の計算はかなり面倒な項が、上の主要項以外にいくつか出て来る。それ等の取扱いについては [4] を参照され度い。

文　献

[1] Yennie, D.R., S.C. Frautschi and H. Suura: Annals of Physics, 13 (1961) 379.

[2] Storrow, J.K.: Nuovo Cimento, 54 (1968) 15.

[3] Stapp, H.P.: Exact solutions of the infra-red problem, LBL Report, LBL-13651 (1982)

[4] Kawai, T. and H.P. Stapp: Infra-red finiteness of QED, in preparation.