数理解析研究所講究録
第513巻 1984年 109-125

重さ１のHilbertモジュラー形式について

東大教養　清水英男　(Hideo Shimizu)

1．モジュラー形式が尖点形式とEisenstein級数の一次結合として表わされるということは良く知られているし，たとえ証明されていない場合でも当然予期されることである．このことは楕円モジュラー形式に対してHecke［3］によって証明され，それはKloostermann［5］によってHilbertモジュラー形式に拡張された．［5］においては重さ１の場合が未解決であったが（［3］では重さ１の場合も解かれているが，それには少し特別な議論が必要であった），Gundlach［１，２］において実２次体上の段（level）１のHilbertモジュラー形式に対して上のことが正しいことが証明された．

このような研究によってHilbertモジュラー群（合同部分群でもよい）Γに対する重さ１の線型独立なEisenstein級数の個数は一般にはΓの尖点の個数より小さいことが知られている．Γに対する保型形式の空間において尖点形式の部分

空間の余次元が同じだけ小さいかどうかが問題なのである．保型表現の理論（とくに重複度１定理，または許容表現のWhittaker モデルの一意性）を応用すれば，実際，その通りであることを示すことができる．すなわちつぎの定理が成立する．

定理１．Fを総実な代数体，$\mathfrak{n}$をFの整イデアル，$\Gamma(\mathfrak{n})$をF上のHilbertモジュラー群の主合同部分群とする．このとき$\Gamma(\mathfrak{n})$に対する重さ１のHilbertモジュラー形式は尖点形式とEisenstein級数の一次結合である．

この定理の証明は，シンポジウムの後，論文［６］として発表されたので，ここでは証明の方針のみを述べることにする．

２．保型表現の理論を応用するためには，Hilbertモジュラー形式を$GL_2(\mathbb{A})$上の保型形式と考えるほうが良い．ただし$\mathbb{A}$はFのアデール環である．$\mathfrak{o}$をFの整数環，$\mathfrak{a}$を分数イデアルとして

$$\Gamma(\mathfrak{n};\mathfrak{a})=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}\in GL_2(F)\;\middle|\;\begin{array}{l}\alpha,\delta\in\mathfrak{o},\ \alpha\equiv\delta\equiv 1\pmod{\mathfrak{n}}\\ \beta\mathfrak{a}^{-1}\subset\mathfrak{n},\ \gamma\mathfrak{a}\subset\mathfrak{n}\\ \alpha\delta-\beta\gamma\text{は総正な単数}\end{array}\right\}$$

とおく．$n=[F:\mathbb{Q}]$ならば，$\Gamma(\mathfrak{n};\mathfrak{a})$は上半平面Hの$n$個の直積$H^n$に作用する不連続群である．それに対する$H^n$上

の重さkの整型保型形式の空間を$A_k(\Gamma(\mathfrak{n};\mathfrak{a}))$で表わす．$\mathfrak{n}$とFのすべての無限素点の積を$\tilde{\mathfrak{n}}$とする．$\mathfrak{a}$が$\mathrm{mod}\ \tilde{\mathfrak{n}}$のイデアル類の代表を動くときの直積$\prod_{\mathfrak{a}} A_k(\Gamma(\mathfrak{n};\mathfrak{a}))$から$GL_2(\mathbb{A})$上の保型形式の空間$\mathcal{A}$（[4, §10] 参照）の中への自然な同型写像が存在する．それを述べるために，二，三の記号を定めよう．

Fの素点をv，素点の全体をP，有限および無限素点の集合をそれぞれP_f，P_∞とする．

$$\mathfrak{o}_v^\times(\mathfrak{n}) = \{ u \in \mathfrak{o}_v^\times \mid u \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}_v) \},$$

$$U(\mathfrak{n}) = \prod_{v \in P_f} \mathfrak{o}_v^\times(\mathfrak{n}),$$

$$K_v(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL_2(\mathfrak{o}_v) \;\middle|\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}_v) \right\}$$

$$K(\mathfrak{n}) = \prod_{v \in P_f} K_v(\mathfrak{n})$$

とおく．$\mathbb{A}^\times / F^\times U(\mathfrak{n}) \mathbb{A}_{\infty+}^\times$の$\mathbb{A}^\times$における代表系で，無限成分が1の元より成るものを一つ定め，それをIとする．このとき$g_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in I)$は両側剰余類

$$GL_2(F) \backslash GL_2(\mathbb{A}) / GL_2(\mathbb{A}_\infty)_+$$

の代表系となる．またイデールaの定めるFの分数イデアルを(a)で表わせば

$$\Gamma(\mathfrak{n};(a)) = GL_2(F) \cap g_a K(\mathfrak{n}) GL_2(\mathbb{A}_\infty)_+ g_a^{-1}.$$

H^nの元を$z = (z_v)_{v \in P_\infty}$と書くことにする．$g = (g_v)_{v \in P}$ $\in GL_2(\mathbb{A})$，$g_v = \begin{pmatrix} \alpha_v & \beta_v \\ \gamma_v & \delta_v \end{pmatrix}$に対し

$$g(z) = \left(\frac{\alpha_v z_v + \beta_v}{\gamma_v z_v + \delta_v}\right),$$

$$j(g, z) = \prod_{v \in P_\infty} |\det g_v|^{\frac{1}{2}} (\gamma_v z_v + \delta_v)^{-1}$$

とおく．$(f_a) \in \prod_{a \in I} A_k(\Gamma(\mathfrak{n}; (a)))$ に対し，左 $GL_2(F)$ 不変かつ右 $K(\mathfrak{n})$ 不変な $GL_2(\mathbb{A})$ 上の関数 φ が

$$\varphi(g_a g) = f_a(g(z_0))\, j(g, z_0)^k$$

$$(a \in I,\quad g \in GL_2(\mathbb{A}_\infty)_+,\quad z_0 = (\sqrt{-1}, \cdots, \sqrt{-1}))$$

により一意的に定まる．埋め込み

$$\prod_{a \in I} A_k(\Gamma(\mathfrak{n}; (a))) \hookrightarrow \mathcal{A}$$

は $(f_a) \longrightarrow \varphi$ により与えられる．いま $k = 1$ とし，上の埋め込みの像を M で表わす．

空間 M は以下に述べるような条件 (A), (B), (C), (D) を満たす $\varphi \in \mathcal{A}$ の全体と一致する．$\varphi \in \mathcal{A}$ は左 $GL_2(F)$ 不変であるから，任意の $g \in GL_2(\mathbb{A})$ に対し，$a \longrightarrow \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right)$ は $\mathbb{A}/F$ 上の関数である．$\mathbb{A}/F$ の自明でない指標の一つを ψ とすれば，この関数の Fourier 係数は

$$\hat{\varphi}(\alpha, g) = \int_{\mathbb{A}/F} \varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g\right) \psi(-\alpha a)\, da \quad (\alpha \in F)$$

で与えられる．条件 (A) はつぎのようなものである．

$$\text{(A)}\quad \hat{\varphi}\left(0, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \sum_{\mu, \nu} \left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}^{\frac{1}{2}} \mu(a) \nu(d) f_{\mu\nu}(g)$$

$$(\forall\, a, d \in \mathbb{A}^\times,\quad g \in GL_2(\mathbb{A})).$$

ここで μ, ν は $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の指標を動き，$f_{\mu\nu}$ は φ, μ, ν に

より定まる$GL_2(\mathbb{A})$上の関数である.

$v \in P_\infty$ ならば, $GL_2(F_v)_+$ の元を

$$g_v = t_v \begin{pmatrix} 1 & x_v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_v^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & y_v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_v & \sin\theta_v \\ -\sin\theta_v & \cos\theta_v \end{pmatrix}$$

$$(t_v,\ x_v,\ y_v,\ \theta_v \in F_v,\ y_v > 0)$$

の形に書くことができる. このとき

$$D_v = 2y_v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_v^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_v^2}\right) - 2y_v \frac{\partial^2}{\partial\theta_v \partial x_v}$$

は $C^\infty(GL_2(F_v)_+)$上の右および左移動と可換な微分作用素である. 条件(B), (C), (D)をつぎのように定める.

(B) $D_v \varphi = -\frac{1}{2}\varphi \quad (\forall v \in P_\infty)$,

(C) $\varphi(zg) = \prod_{v \in P_\infty} (\operatorname{sgn} z_v)\varphi(g) \quad (\forall z \in \mathbb{A}_\infty^\times)$,

(D) $\varphi(gk) = \prod_{v \in P_\infty} e^{i\theta_v}\varphi(g) \quad (\forall k = (k_v)$,

$k_v \in K_v(\mathfrak{n})\ (v \in P_f),\ k_v = \begin{pmatrix} \cos\theta_v & \sin\theta_v \\ -\sin\theta_v & \cos\theta_v \end{pmatrix} (v \in P_\infty))$.

$GL_2(\mathbb{A})$の Hecke 多元環$\mathcal{H}$ ([4, §9]参照)は右移動により$\mathcal{A}$に作用している. すでに述べた通り $M = \{\varphi \in \mathcal{A} \mid (A), (B), (C), (D)\}$ であるが, いま $V = \{\varphi \in \mathcal{A} \mid (A), (B), (C)\}$ とおけば, V は$\mathcal{H}$加群としての$\mathcal{A}$の不変部分空間となる. 条件

(i) $GL_2(\mathbb{A})$の極大コンパクト部分群をKとするとき, fは右K有限である,

(ii) $f\left(\begin{pmatrix} a & x \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \left|\frac{a}{d}\right|_{A}^{\frac{1}{2}} \mu(a)\nu(d) f(g)$

$(g \in GL_2(\mathbb{A}),\ \ a, d \in \mathbb{A}^\times,\ \ x \in \mathbb{A})$

を満たす $GL_2(\mathbb{A})$ 上の連続関数 f の全体を $B(\mu,\nu)$ とする. $\varphi \in V$ ならば, (A)に現れた関数 $f_{\mu\nu}$ が $B(\mu,\nu)$ に属することは直ちにわかる. 写像 $\varphi \longrightarrow f_{\mu\nu}$ および $\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}(0,*)$ $(=\sum f_{\mu\nu})$ をそれぞれ $j_{\mu\nu}$ および j で表わすならば, j は V から $\bigoplus_{\mu,\nu} B(\mu,\nu)$ の中への $\mathcal{H}$ 加群としての準同型写像である. $V_0 = \mathrm{Ker}\, j$ は定義により V の尖点形式の部分空間にほかならない. V における V_0 の直交補空間を $V_0^\perp$ とすれば, $V = V_0 \oplus V_0^\perp$ が成立する.

μ, ν は $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の指標であったが, その条件のもとでは $B(\mu,\nu)$ は既約 $\mathcal{H}$ 加群である. j は $V_0^\perp$ を $\bigoplus_{\mu,\nu} B(\mu,\nu)$ の中へ 1:1 に写しているので, $V_0^\perp$ は $B(\mu,\nu)$ のどれかと同型な既約部分空間の直和となることがわかる.

$\mathcal{A}$ の尖点形式のつくる部分空間 $\mathcal{A}_0$ において重複度1定理が成立することは良く知られているが, それはそのまま V においても成立する(それを言うためには V から Whittaker 関数の空間への写像 $\varphi \longrightarrow \hat{\varphi}(1,*)$ が単射であることを言えばよいが, それは初等的に証明できる).

いま $j_{\mu\nu}(M) \neq \{0\}$ と仮定する. このとき $V_0^\perp$ の既約部分空間 U で, $B(\mu,\nu)$ と同型なものが存在し, $j_{\mu\nu}$ は $M \cap U$ を

$j_{\mu\nu}(M)$ の上に同型に写す. さらに μ, ν はつぎの条件を満たさなければならない.

$$(*)\quad\begin{cases} v\in P_\infty \text{ に対して } \mu_v(t)=\nu_v(t)=1 \quad (\forall t\in F_v^\times, \\ t>0),\ \mu_v\nu_v(t)=\operatorname{sgn} t \quad (\forall t\in F_v^\times), \\ v\in P_f \text{ に対して } \mu_v(u)=\nu_v(u)=1 \quad (\forall u\in \mathfrak{o}_v^\times(\mathfrak{n})) \end{cases}$$

$B(\mu,\nu)$ と $B(\mu',\nu')$ が同型であるためには, $\{\mu,\nu\}=\{\mu',\nu'\}$ が必要十分である. ゆえに, 重複度1定理により $M\cap U\neq\{0\}$ となる $V_0^\perp$ の既約部分空間 U の個数は上の条件を満たす $\{\mu,\nu\}$ の個数, すなわち $\frac{1}{2}h(\mathfrak{n})h(\mathfrak{n})_+$ を越えない. ただし $h(\mathfrak{n})$, $h(\mathfrak{n})_+$ はそれぞれ $\bmod \mathfrak{n}$, $\bmod \hat{\mathfrak{n}}$ の類数である ($h(\mathfrak{n})=|A^\times/F^\times U(\mathfrak{n})A_\infty^\times|$, $h(\mathfrak{n})_+=|A^\times/F^\times U(\mathfrak{n})A_{\infty+}^\times|$).

一方では, $j_{\mu\nu}(M)$ が (それが $\{0\}$ ではないという仮定のもとで) 条件 (D) を満たす $B(\mu,\nu)$ の元の全体と一致することは明らかである. $B(\mu,\nu)=\bigotimes_{v\in P}B(\mu_v,\nu_v)$ となること, および $v\in P_\infty$ ならば (D) (の $v\in P_\infty$ に対応する条件) を満たす $B(\mu_v,\nu_v)$ の元の全体は1次元空間をつくることに注意すれば, $j_{\mu\nu}(M)$ は

$$\prod_{v\in P_f} H_v\backslash GL_2(\mathfrak{o}_v)/K_v(\mathfrak{n})$$

上の関数全体の空間と見なされる. ここで H_v は $GL_2(\mathfrak{o}_v)$ の上三角行列の群である. この空間の次元は

$$d(\mathfrak{n})=N(\mathfrak{n})\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{n}}(1+N(\mathfrak{p})^{-1})$$

に等しい．ゆえに $\dim(M\cap U)\leqq d(\mathfrak{n})$，したがって

$$\dim(M\cap V_0^+)\leqq \frac{1}{2}h(\mathfrak{n})h(\mathfrak{n})_+d(\mathfrak{n})$$

が証明された．上式の右辺に等しいだけの線型独立なEisenstein級数が存在することを言えば証明が終る．

（注意）　$h(\mathfrak{n})d(\mathfrak{n})$ は $\Gamma(\mathfrak{n};\mathfrak{a})$ の尖点の個数である．重さ $k>1$ ならば，上記不等式において右辺の因子 $\frac{1}{2}$ がなくなる．$k=1$ のときに限り条件が μ，ν に関して対称的で，(μ,ν) とともに (ν,μ) も同じ条件を満たす．$B(\mu,\nu)\cong B(\nu,\mu)$ であるから，そのうちの一方のみを数えなければならないのである．

3．$A_1(\Gamma(\mathfrak{n};\mathfrak{a}))$ に属するEisenstein級数は

$$G(z;\rho_1,\rho_2,\mathfrak{b},\Gamma(\mathfrak{n};\mathfrak{a}))$$

$$=\sum_{\substack{(\xi_1,\xi_2)_{\mathfrak{n}}\\ \xi_1\equiv\rho_1\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}\mathfrak{n})\\ \xi_2\equiv\rho_2\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{b}\mathfrak{n})}}{}' \left.\frac{N(\mathfrak{b})}{N(\xi_1 z+\xi_2)\,|N(\xi_1 z+\xi_2)|^{2s}}\right|_{s=0}$$

によって定義される．ただし $\mathfrak{b}$ は F の分数イデアルで，$\rho_1\in\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}$，$\rho_2\in\mathfrak{b}$．$(\xi_1,\xi_2)_{\mathfrak{n}}$ は同値関係

$$(\xi_1,\xi_2)\sim(\eta_1,\eta_2)\iff \exists u\in\mathfrak{o}^\times,\ u\text{ は総正},\ \equiv 1\ (\mathfrak{n})$$
$$u\xi_i=\eta_i\quad(i=1,2)$$

に関する (ξ_1,ξ_2) の類を表わす．また $\sum'$ は $(0,0)_{\mathfrak{n}}$ を除く

ことを示す.

$a\in\mathbb{A}^\times$, $\mathfrak{a}=(a)$ とする. $\xi\longrightarrow a\xi$ によって, 同型写像 $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{n}$ で, $a\xi\equiv a_v\xi\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{a}_v\mathfrak{n}_v)$ $(\forall v\in P_f)$ となるものを表わすことにする.

μ, ν を §2 の (*) を満たす $\mathbb{A}^\times/F^\times$ の指標, σ, $\tau\in\mathfrak{o}$, $(\sigma,\tau,\mathfrak{n})=1$ とする. $a\in I$ に対し $f_a\in A_1(\Gamma(\mathfrak{n};(a)))$ を

$$f_a(z)=|a|_{\mathbb{A}}^{\frac{1}{2}}\mu(a)\sum_{b\in I}\mu^{-1}\nu(b)$$
$$\times G(z;a^{-1}b\sigma,b\tau,(b),\Gamma(\mathfrak{n};(a)))$$

によって定義し, §2 で述べた同型 $\prod_{a\in I}A_1(\Gamma(\mathfrak{n};(a)))\xrightarrow{\sim}M$ により $(f_a)_{a\in I}$ に対応する M の元を $\varphi=\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$ と書く. このとき $j(\varphi)\in B(\mu,\nu)\oplus B(\nu,\mu)$ となること, および $g\in K(1)GL_2(\mathbb{A}_\infty)$, $\det g=1$ に対して

$$j_{\mu\nu}(\varphi)(g)\neq 0 \iff \forall v\in P_f,\ \exists t_v\in\mathfrak{o}_v^\times$$
$$(0,1)g_v\equiv t_v(\sigma,\tau)\ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{n}_v)$$

が成り立つことを証明することができる. (σ,τ) を固定すれば, この最後の条件は $H_v\backslash GL_2(\mathfrak{o}_v)/K_v(\mathfrak{n})$ における両側剰余類 $H_v g_v K_v(\mathfrak{n})$ を一意的に定める. ゆえに与えられた μ, ν に対してちょうど $d(\mathfrak{n})$ 個の線型独立な $\varphi_{\mu\nu\sigma\tau}$ が存在する. 以上で定理1が証明された.

4. Maass [7] において1変数非整型保型形式が論ぜられている. Γ を第1種 Fuchs 群, λ を定数とするとき, つぎの3条件を満たす関数 f の全体を $A(\lambda, \Gamma)$ で表わすことにする.

(i) $f(z)$ は上半平面H上の C^∞ 級関数で

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \qquad (z = x+iy)$$

の固有値 λ に属する固有関数である.

(ii) $f(\gamma z) = f(z) \quad (\forall \gamma \in \Gamma,\ z \in H)$.

(iii) Γ の任意の尖点 $g(\infty)$ $(g \in SL_2(\mathbb{R}))$ に対し, x に関し一様に $f(g(x+iy)) = O(y^M)$ $(y \to \infty)$ が成立するような定数Mが存在する.

$f(g(x+iy))$ の x に関する Fourier 展開の定数項が任意の尖点に対して0であるとき, f は尖点形式であるという.

[7] の結果の一部を引用しよう. 1) $\Gamma(N)$ を $SL_2(\mathbb{Z})$ の主合同部分群, $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{Z}$ とする. Eisenstein 級数

$$E(z, s; \rho_1, \rho_2, N) = \sum_{\xi_i \equiv \rho_i (N)}{}' \frac{y^{\frac{s}{2}}}{|\xi_1 z + \xi_2|^s}$$

は $\mathrm{Re}\, s > 2$ に対して絶対収束し, $\mathrm{Re}\, s = 1$ まで解析接続され, そこで正則である. $\mathrm{Re}\, s = 1$ のとき $E(z, s; \rho_1, \rho_2, N)$ は $A\left(\frac{s(s-2)}{4}, \Gamma(N)\right)$ に属する. 2) $A\left(\frac{s(s-2)}{4}, \Gamma(N)\right)$ における尖点形式のつくる部分空間の余次元は高々 $\sigma(N)$ である.

ただし$\sigma(N)$は$\Gamma(N)$の尖点の個数を表わす．3) $\mathrm{Re}\,s=1$, $s\neq 1$ならば$A\left(\frac{s(s-2)}{4},\Gamma(N)\right)$は尖点形式とEisenstein級数$E(z,s;\rho_1,\rho_2,N)$の全体によって生成される．4) $s=1$ならば，線型独立なEisenstein級数の個数は，$N=1,2,3,4,6$の場合を除き，$\sigma(N)$より小さい．

シンポジウムの講演では上記のことに注意し，§2, 3と同じ方針で$s=1$に対して3)が成立することを証明することができると述べたが，その時考えていた証明に誤りがあり，結果は少々異なるものとなった．

簡単のため$E(z,s;\rho_1,\rho_2,N)$を$E(z,s)$で表わすことにする．

$$\Delta E(z,s)=\frac{s(s-2)}{4}E(z,s)$$

をsで微分すれば

$$\Delta\frac{\partial}{\partial s}E(z,s)=\frac{s-1}{2}E(z,s)+\frac{s(s-2)}{4}\frac{\partial}{\partial s}E(z,s).$$

$s=1$を代入すれば上式右辺の才1項が消えて，$\frac{\partial}{\partial s}E(z,1)$が，$E(z,1)$と並んで，$\Delta$の固有値$-\frac{1}{4}$に対する固有関数となる．このときつぎの定理が成立する．

定理 2. $A\left(-\frac{1}{4},\Gamma(N)\right)$は尖点形式と$E(z,1;\rho_1,\rho_2,N)$, $\frac{\partial}{\partial s}E(z,1;\rho_1,\rho_2,N)$の全体によって生成される．$A\left(-\frac{1}{4},\Gamma(N)\right)$における尖点形式の部分空間の余次元は$\sigma(N)$に等しい．

この定理を証明するには，Hilbert モジュラー形式の場合と同様に $GL_2(\mathbb{A})$ 上の保型形式に移る方がよい．§2 と同じ記号を用いることにして，$F=\mathbb{Q}$，$\mathfrak{n}=(N)$ とする．また $\mathbb{Q}$ の有限素点を p，無限素点を ∞ で表わす．

条件

(B′) $\quad D_\infty \varphi = -\dfrac{1}{2}\varphi$，

(C′) $\quad \varphi(zg)=\varphi(g) \quad (\forall z\in\mathbb{R}^\times,\ g\in GL_2(\mathbb{A}))$

を満たす $\varphi\in\mathcal{A}$ の全体を W とし，さらに条件

(D′) $\quad \varphi(gk)=\varphi(g) \quad (\forall k\in K(N)\times SO_2(\mathbb{R}),\ g\in GL_2(\mathbb{A}))$

を満たす $\varphi\in W$ の全体を L とする．このとき

$$\prod_{a\in I} A\left(-\frac{1}{4},\Gamma(N;(a))\right)\cong L$$

が成立する．また任意の $\varphi\in W$ に対し $\hat{\varphi}\left(0,\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}g\right)$ (a, $d\in\mathbb{A}^\times$, $g\in GL_2(\mathbb{A})$) は

$$(\#)\quad \hat{\varphi}\left(0,\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & d\end{pmatrix}g\right)=\sum_{\mu,\nu}\left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}^{\frac{1}{2}}\mu(a)\nu(d)\left(f_{\mu\nu 0}(g)+\log\left|\frac{a}{d}\right|_{\mathbb{A}}\cdot f_{\mu\nu 1}(g)\right)$$

の形に表わされることが証明される．

$b\in\mathbb{A}^\times$，$\rho_1\in(a^{-1}b)$，$\rho_2\in(b)$ とする．

$$E(z,s;\rho_1,\rho_2,(b),\Gamma(N;(a)))$$

$$=\sum\nolimits'_{\substack{\xi_1\equiv\rho_1\ (\mathrm{mod}\ (a^{-1}b)N)\\ \xi_2\equiv\rho_2\ (\mathrm{mod}\ (b)N)}}\frac{|b_f|_{\mathbb{A}}^{-s}\,y^{\frac{s}{2}}}{|\xi_1 z+\xi_2|^{s}}$$

は $\Gamma(N;(a))$ 不変な Eisenstein 級数である．μ,ν を $\mu_\infty\nu_\infty=1$

となる $\mathbb{A}^\times/\mathbb{Q}^\times U(N)\mathbb{R}_+^\times$ の指標とする．$\sigma, \tau \in \mathbb{Z}$, $(\sigma, \tau, N)=1$ に対して $\phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g, s)$ ($g \in GL_2(\mathbb{A})$, $s \in \mathbb{C}$) を，g に関して左 $GL_2(\mathbb{Q})$ 不変かつ右 $K(N)$ 不変な関数として，つぎのように定義する．

$$f_a(z, s) = |a|_A^{\frac{s}{2}} \mu(a) \sum_{b \in I} \mu^{-1}\nu(b)$$
$$\times E(z, s; a^{-1}b\sigma, b\tau, (b), \Gamma(N; (a))),$$

$$\phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g_a g, s) = f_a(g(z_0), s) \quad (g \in GL_2(\mathbb{R})_+, a \in I).$$

このとき $f_a(z, 1)$, $\frac{\partial}{\partial s} f_a(z, 1)$ は $A(-\frac{1}{4}, \Gamma(N; (a)))$ に属し，したがって $\phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g, 1)$, $\frac{\partial}{\partial s}\phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g, 1)$ は L に属する．L が尖点形式の部分空間 L_0 を法として，これらによって生成されることを証明すればよいのである．

μ, ν, σ, τ を固定して，$\phi_{\mu\nu\sigma\tau}$ をたんに ϕ と書くことにしよう．このとき

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} g, s\right) = \mu\nu(x)\phi(g, s) \quad (\forall x \in \mathbb{A}^\times)$$

が成り立つ．$g \in K(1)GL_2(\mathbb{R})$, $\det g = 1$ に対して $\mathrm{Im}\, g(z_0) = y$ とおく．いま簡単のため，条件

$$\forall p, \exists t_p \in \mathbb{Z}_p^\times, \quad (0, 1) g_p \equiv t_p(\sigma, \tau) \pmod{N\mathbb{Z}_p}$$

が満たされる場合を (I) で，そうでない場合を (II) で示す．$x \in \mathbb{A}^\times$ に対し

$$\hat{\phi}\left(0, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g, s\right)$$

は，場合に従い，以下のように表わされる．

$$2|x|_A^{\frac{1}{2}}\mu(x)y^{\frac{1}{2}}\Big[(|x|_A y)^{\frac{s-1}{2}}\zeta(s)\prod_{p|N}(1-p^{-s})$$
$$+\pi^{\frac{1}{2}}\varphi(N)N^{-s}(|x|_A y)^{\frac{1-s}{2}}\frac{\Gamma(\frac{s-1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(s-1)\Big] \quad (\mu=\nu,\ \mathrm{I}),$$

$$2\mu(x)\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi(N)}{N\varphi(\frac{N}{M})}M^{1-s}(|x|_A y)^{1-\frac{s}{2}}$$
$$\times\frac{\Gamma(\frac{s-1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}\zeta(s-1)\prod_{p|\frac{N}{M}}(1-p^{1-s}) \qquad (\mu=\nu,\ \mathrm{II}),$$

$$2\mu(x)(|x|_A y)^{\frac{s}{2}}\mu^{-1}\nu(t)L(s,\mu\nu^{-1}) \qquad (\mu\neq\nu,\ \mathrm{I})$$

$$2\nu(x)\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\varphi(N)}{N\varphi(\frac{N}{M})}M^{1-s}(|x|_A y)^{1-\frac{s}{2}}\mu^{-1}\nu(u)$$
$$\times\frac{\Gamma(\frac{s-1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}L(s-1,\mu\nu^{-1}) \qquad (\mu\neq\nu,\ \mathrm{II},\ \mu^{-1}\nu \text{ が } \mathrm{mod}\ \tfrac{N}{M} \text{ の指標のとき}),$$

$$0 \qquad (\text{そのほかの場合}).$$

ここで M, t, u はつぎのようにして定められる．$(\sigma,\tau)g_p^{-1} = (\alpha_p, \beta_p)$ とする．(I) の場合，$\alpha_p \equiv 0\ (N\mathbb{Z}_p)$，$t_p\beta_p \equiv 1\ (N\mathbb{Z}_p)$ となる．このとき $t=(t_p)\in\mathbb{A}_f^\times$ とおく．(II) の場合，p^{e_p} を α_p と N の最大公約数とする．$N=\prod_p p^{f_p}$ と書き，$M=\prod_p p^{e_p}$，$u=(u_p)\in\mathbb{A}_f^\times$，

$$u_p = \begin{cases} \alpha_p^{-1} & e_p < f_p, \\ p^{-f_p} & e_p = f_p \end{cases}$$

とおく．

$\varphi = \Phi(g, 1)$ および $\frac{\partial}{\partial s}\Phi(g, 1)$ に対する (#) の $f_{\mu\nu i}$ $(i=0, 1)$ をそれぞれ $h_{\mu\nu i}$ および $h^*_{\mu\nu i}$ で表わすことにする．これまでに述べたことから

$$\{\mu', \nu'\} \neq \{\mu, \nu\} \Rightarrow h_{\mu'\nu' i} = h^*_{\mu'\nu' i} = 0 \quad (i = 0, 1)$$

は明らかである．$\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\zeta(s-1)$ は $s=1$ で 1 位の極をもち，その留数は -1 であるから，たとえば $(\mu=\nu, \mathrm{I})$ の場合

$$\hat{\Phi}\left(0, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g, 1\right) = 2|x|_A^{\frac{1}{2}} \mu(x)\, y^{\frac{1}{2}} \frac{\varphi(N)}{N}\left[\log(|x|_A y) + c\right]$$

(c は x, y に関係しない定数) が成り立ち，ゆえに

$$h_{\mu\mu 1}(g) = \begin{cases} \dfrac{2\varphi(N)}{N} y^{\frac{1}{2}} & (\mathrm{I}), \\ 0 & (\mathrm{II}). \end{cases}$$

同様にして

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu 0}(g) &= 2 h^*_{\mu\nu 1}(g) \\ &= \begin{cases} 2 y^{\frac{1}{2}} \mu^{-1}\nu(t) L(1, \mu\nu^{-1}) & (\mu \neq \nu, \mathrm{I}) \\ 0 & (\mu \neq \nu, \mathrm{II}), \end{cases} \end{aligned}$$

$$h_{\mu\nu 1} = h_{\nu\mu 1} = 0 \qquad (\mu \neq \nu)$$

が得られる．

一般に $\varphi \to f_{\mu\nu 1}$ は W から $B(\mu, \nu)$ の中への準同型写像 (これを $j_{\mu\nu}$ とする) であり，$\varphi \to f_{\mu\nu 0}$ は $\mathrm{Ker}\, j_{\mu\nu}$ から $B(\mu, \nu)$ の中への準同型写像である．§2, 3 と同じ議論によれば，上の結果は $\Phi_{\mu\mu\sigma\tau}(g, 1)$ の中に $d(N)$ 個の線型独

立な元が存在すること，また$\mu \neq \nu$の場合，$\Phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g, 1)$，$\frac{\partial}{\partial s}\Phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g, 1)$の中に$2d(N)$個の線型独立な元が存在することを示す．ここで言う線型独立とは，尖点形式の空間を法とする線型独立のことであるとしてよい．$\{\mu, \nu\}$が$\mu_\infty \nu_\infty = 1$を満たす$\mathbb{A}^\times / \mathbb{Q}^\times U(N) \mathbb{R}_+^\times$の指標の組をすべて動くとき，上記の線型独立な元の総数は$\varphi(N)\sigma(N)$に等しい．実際，$N > 2$ならば

$$\varphi(N)d(N) + \frac{1}{2}\varphi(N)\left(\frac{\varphi(N)}{2} - 1\right) \cdot 2d(N) = \varphi(N)\sigma(N).$$

$N = 1, 2$に対しても同様である．Maass の結果 2) により$\dim(L/L_0) \leq \varphi(N)\sigma(N)$であるから，ここで等号が成立し，同時に$L$が$L_0$を法として$\Phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g, 1)$，$\frac{\partial}{\partial s}\Phi_{\mu\nu\sigma\tau}(g, 1)$の全体によって生成されることが証明された．

以上で定理2の証明が終る．結果から見れば，W/W_0における Hecke 多元環の表現は一般には完全可約でないことがわかる．

参考文献

1. K. B. Gundlach, Poincarésche und Eisensteinsche Reihen zur Hilbertschen Modulgruppe, Math. Zeitschr. 64 (1956), 339–352.

2. ――――――, Ganze Nichtspitzenformen der

Dimension −1 zu den Hilbertschen Modulgruppen reell-quadratischer Zahlkörper, Arch. Math. VII (1956), 453−456.

3. E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 5 (1927), 199−224.

4. H. Jacquet and R. P. Langlands, Automorphic forms on GL(2), Lecture note in Mathematics, Vol. 114, Springer, 1970.

5. H. D. Kloostermann, Theorie der Eisensteinschen Reihen von mehreren Veränderlichen, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 6 (1928), 163−188.

6. H. Shimizu, A remark on the Hilbert modular forms of weight 1, Math. Ann. 265 (1983), 457−472.

7. H. Maass, Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. 121 (1949), 141−183.