数理解析研究所講究録
第 513 巻 1984 年 137-144

高次相互法則, weight 1 の cusp form と楕円曲線

名大理　小池正夫 (Masao Koike)

58年11月14日～18日の間、平松先生が名古屋大学に集中講義に見えられ、weight 1 の保型形式についてのいくつかの topic を話されました。その中で weight 1 の保型形式と 3次多項式の相互法則との関係、又それと楕円曲線との関係を1つの例でのべられました。ここでは その例が一般化されることと関連する話題についてのべます.

§1　話された例は次の3つ(又は4つ)の対象の間の関係です。

(1)　$f(x) = 4x^3 - 4x^2 + 1$ は $\mathbb{Q}$ 上 3次既約多項式.

(2)　$F(\tau) = \eta(2\tau)\eta(22\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau}$ は $\Gamma_0(44)$ に関する weight 1 のある指標の cusp form. ここで $\eta(\tau)$ は Dedekind の η 関数とする.

(3) $E: \ y^2 = 4x^3 - 4x^2 + 1$ は$\mathbb{Q}$上定義された楕円曲線.

(3)′ $G(\tau) = \eta(\tau)^2 \eta(11\tau)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau}$ は$\Gamma_0(11)$に関する weight 2 の cusp form.

(I) $f(x)$の高次相互法則と$F(\tau)$の Fourier 係数の関係、

$p \geqq 3$ 素数に対して $f_p(x) = f(x) \mod p$ は$\mathbb{F}_p$上3次多項式になる。このとき

定理1 (平松[2]) $p \neq 11$のとき

$$\#\{\alpha \in \mathbb{F}_p \mid f_p(\alpha) = 0\} = a(p)^2 - \left(\frac{-11}{p}\right)$$

$f_p(x)$の$\mathbb{F}_p$上の既約多項式への分解の様子がこの定理からわかる。特に $Spl\{f(x)\} = \{p: 素数 \mid f_p(x)が\mathbb{F}_p上相異なる1次式の積にかける\}$とすると.

$$Spl\{f(x)\} \doteqdot \{p: 素数 \mid a(p) = 2\}$$

がいえる. $\doteqdot$の意味は有限個のpを除いて等号が成立つ。

一般に $Spl\{f(x)\}$を決定する仕方を $f(x)$の高次相互法則とよぶので. 上記の結果が $4x^3-4x^2+1$の相互法則と$\eta(2\tau)\eta(22\tau)$の Fourier 係数の関係を与えたことになる。

(II) $f(x)$の高次相互法則とEのL-関数との関係

$p \neq 2, 11$ 素数に対して $\widetilde{E}_p$ でEの reduction mod p とすると、$\widetilde{E}_p$ は $y^2 = f_p(x)$ で定義された $\mathbb{F}_p$ 上の楕円曲線である。$N_p = N_p(E)$ を $\widetilde{E}_p$ の $\mathbb{F}_p$-有理点の個数とする。EのL関数は 有限個の p-factor (この場合は $p \neq 11$) を除いて N_p で記述される。このとき

定理 2 (Chowla - Cowles [1]) 上の素数pについて以下の同値関係が成立つ。

(i) $f_p(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上唯1つの1次因子をもつ

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{-11}{p}\right) = -1, \quad 1-N_p : \text{odd}$$

(ii) $f_p(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上 1次式の積

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{-11}{p}\right) = 1, \quad 1-N_p : \text{odd}$$

(iii) $f_p(x)$ が $\mathbb{F}_p$ 上 既約式

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{-11}{p}\right) = 1, \quad 1-N_p : \text{even}$$

(III) mod 2 の合同式

$F(\tau)$ と $G(\tau)$ の Fourier 係数の間の mod 2 の合同式が次のように成立つ。

定理 3′ 全ての正の整数nについて

$$a(n) \equiv c(n) \pmod 2 .$$

この場合は $F(\tau)$, $G(\tau)$ がともに η 関数 $\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi in\tau})$ とかけていて $\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^2 \equiv \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{2n}) \pmod 2$ に注意すれば 定理3は明らかです。

又、(3)と(3') の間の関係は Taniyama-Weil 予想の解けている場合で

$$N_p(E) = 1+p-c(p) \qquad p\neq 2, 11 \text{ 素数}$$

が知れるから 次の定理が得られる。

<u>定理3</u> $p\neq 2, 11$ 素数に対して

$$a(p) \equiv N_p \pmod 2$$

§2 §1 でのべた例は別々に論じられているが 定理の成立つ根拠は以下でのべるように同じものです。

(1) $f(x)$ に対して $K_f = f(x)=0$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とすると

$$Gal(K_f/\mathbb{Q}) \simeq S_3 \quad (3\text{次対称群})$$

$$K_f \supset \mathbb{Q}(\sqrt{-11})$$

(2) $F(\tau)$ は $k=\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ の3次のイデヤル指標 χ があって $L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ とかける。

$K_F = \chi$ の kernel に対応する k 上の abel 拡大とする。

(3) Eに対して　E_2 ＝ Eの2分点の座標の生成する$\mathbb{Q}$上ガロア拡大とする。

このとき　次のことに気がつく。

事実

$$K_f = K_F = E_2$$

更に、上記の事実を使って　定理1，定理2が［1］［2］の議論を用いて　再証明でき、又　定理1と定理2をあわせることによって　定理3が　$F(\tau)$と$G(\tau)$の具体的表示に　頼らないで　証明できることになる。　従って　次のような一般化が可能になった。

$\mathcal{C}_0$ ＝　$K/\mathbb{Q}$: ガロア拡大

(i)　$Gal(K/\mathbb{Q}) \simeq S_3$

(ii)　$K \supset k$　虚2次体

$\mathcal{C}_1$ ＝　$f(x)$: $\mathbb{Q}$上3次既約多項式で

$K_f \in \mathcal{C}_0$

$\mathcal{C}_2$ ＝　$F(\tau)$:　ある$\Gamma_0(N)$に関するweight 1の cusp formで　そのMellin変換が　虚2次体

kの3次のイデヤル指標χの$L(s,\chi)$と一致する。K_Fでχの核に対応するk上の3次のアーベル拡大をあらわした時

$$K_F \in \mathscr{C}_0$$

$\mathscr{C}_3 = \quad E$: $\mathbb{Q}$上の楕円曲線で

$$E_2 \in \mathscr{C}_0$$

これらの対象の間の写像$\varphi_i : \mathscr{C}_i \longrightarrow \mathscr{C}_0$ $(i=1,2,3)$を

$$\varphi_1(f) = K_f, \quad \varphi_2(F) = K_F, \quad \varphi_3(E) = E_2$$

で 定義する。この時

定理

$K \in \mathscr{C}_0$に対して、$f(x) \in \varphi_1^{-1}(K)$, $F(\tau) = \sum a(n) e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau} \in \varphi_2^{-1}(K)$, $E \in \varphi_3^{-1}(K)$をとる。これらの3つの対象の間に 定理1, 2, 3の類似が 有限個の素数pを適当に除いて 成立つ。

詳しい証明は [5] を参照してください。

§3 いくつかの注意をする。

注意１　$\mathbb{Q}$ 上定義された楕円曲線 E が $\mathcal{E}_3$ に入るための条件は位数２の $\mathbb{Q}$-有理点をもたなくて，その判別式が負といいかえられる。

注意２．　上記の E に対して谷山-Weil予想が正しいとすれば weight 2 の cusp form $G(\tau)=\sum c(n)e^{2\pi\sqrt{-1}n\tau}$ が存在して

$$N_p = 1 + p - c(p) \qquad p:\text{素数},\ p\nmid \text{導手}$$

が成立つ。

この時 定理３は $c(p)$ と $a(p)$ の間に mod 2 の合同式が成立つことを主張している。（有限個の p を除いて）

逆に mod 2 の合同式そのものを問題にするとおもしろいが ここではふれません。

注意３　$\mathcal{E}_0$ に含まれる体 K の条件のうち (ii) の虚２次体を含むというのを 実２次体にかえれば 同様に $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_3$ も条件がかえられた時 定理も同様に成立つ。

この場合は weight 1 の form の存在は明らかでない。

注意４　平松[2]，Moreno[3] では $\mathbb{Q}$ 上４次式の高次相互法則が weight 1 の cusp form で D_4 型の

もののFourier係数と関係づけられている。この場合もある楕円曲線の4分点などと関係がつけば興味深い。山本[4]の仕事も関係するかもしれない。

References

[1] S. Chowla and M. Cowles, On the coefficients c_n in the expansion $x\prod(1-x^n)^2(1-x^{11n})^2 = \sum c_n x^n$, J. reine angew. Math., 292 (1977), 115-116.

[2] T. Hiramatsu, Higher reciprocity law and modular forms of weight one, Comm. Math. Univ. St. Paul. 31 (1982), 75-85.

[3] C. Moreno, The higher reciprocity law: an example, J. Number Theory, 12 (1980), 57-70.

[4] Y. Yamamoto, On cusp forms attached to the fields of 2-division points of Abelian curves, Proc. of Seminar on Modern Methods in Number Theory, 1971.

[5] M. Koike, Higher reciprocity law, modular forms of weight one and elliptic curves, preprint.