数理解析研究所講究録
第513巻 1984年 145-153



# 重さ1のHilbert modular形式とGalois群の表現

東海大 理 太田雅己 (Masami Ohta)

## §0. Introduction

Deligne と Serre [D-S] は重さ1の primitive な楕円 cusp 形式に付随するL-函数が或る2次のGalois群の表現の Artin L-函数になる事を示した。以下ではその結果の、(奇数次)総実代数体Fの Hilbert cusp 形式への拡張について述べる。

証明の方法は基本的には [D-S] と同様であるが、有理数体の代りに一般の総実体を扱うために生じる困難が2点ある:

(1). 重さ>1の primitive な Hilbert cusp 形式に付随する Galois群の $l$-進表現の系の存在;

(2). Hilbert modular 形式の間の"合同".

本論では言葉の準備(§1)の後、主結果を述べ(§2)、証明の要点(1), (2)について説明する(§3).

尚筆者が本論の結果を得た後、同じ主題を扱った Rogawski と Tunnell の論文 [R-T] が出版された事を付記しておく。

## §1. Hilbert modular 形式に関する準備.

以下 F を有限次総実代数体、$[F:\mathbb{Q}] = g$ とし、$\mathfrak{o}_F$ 又は $\mathfrak{o}$ で F の整数環、$\mathfrak{d}$ で $F/\mathbb{Q}$ の different を表わす。F の整 ideal $\mathfrak{n}$ に対し、

$$\begin{cases} S_1(\mathfrak{n}) = GL_2^+(F_\infty) \times \prod_{\mathfrak{z}} S_{1,\mathfrak{z}} < GL_2(F_A) \\ S_{1,\mathfrak{z}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL_2(F_{\mathfrak{z}}) \;\middle|\; \begin{matrix} a \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}},\ b \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}^{-1},\ c \in \mathfrak{d}_{\mathfrak{z}}\mathfrak{n}_{\mathfrak{z}} \\ d-1 \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{z}},\ ad-bc \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{z}}^{\times} \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

とおく。ここで添字 A (resp. $\mathfrak{z}$) は adele 化 (resp. $\mathfrak{z}$-進完備化) を示し、$GL_2^+(F_\infty)$ は $GL_2(F_A)$ の無限成分の 1 の連結成分とした。技術的な理由から次の群も考える:

$$\begin{cases} S_2(\mathfrak{n}) = GL_2^+(F_\infty) \times \prod_{\mathfrak{z}} S_{2,\mathfrak{z}} < GL_2(F_A) \\ S_{2,\mathfrak{z}} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in S_{1,\mathfrak{z}} \;\middle|\; a-1 \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{z}} \right\} \end{cases}$$

$S_\varepsilon(\mathfrak{n})$ $(\varepsilon = 1 \text{ or } 2)$ の一方を固定し、暫くそれを $S$ と書く。

$$F_A^\times = \coprod_{i=1}^{h} \det(S)\, F^\times t_i$$

と分解し、以下 $t_i \in F_A^\times$ の無限成分は全て 1 にとっておく。$x_i = \begin{bmatrix} t_i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL_2(F_A)$ とおけば

$$GL_2(F_A) = \coprod_{i=1}^{h} S\, x_i\, GL_2(F)$$

となる。各 $i$ に対して

$$S_i = x_i^{-1} S x_i, \quad \Gamma_{S_i} = S_i \cap GL_2(F)$$

とおく。$\Gamma_{S_i}$ は複素上半平面 $H$ の $g$ 個の直積 $H^g$ の上に自然に作用する。

<u>定義.</u>　正の整数 $k$ に対して

$$\mathfrak{M}_k(S) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})$$

$$\mathfrak{S}_k(S) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{S}_k(\Gamma_{S_i})$$

とする。ここで右辺の $\mathfrak{M}_k(\Gamma)$ (resp. $\mathfrak{S}_k(\Gamma)$) は通常の、$\Gamma$ に関する重さ $k$ の Hilbert modular 形式 (resp. cusp 形式) を表わす。

$\mathfrak{t}_i$ を $t_i$ に対応する $F$ の ideal とすると、良く知られているように、$f_i(z) \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})$ は次の形の Fourier 展開をもつ：

$$f_i(z) = \sum_{\xi} a_i(\xi)\, e^{2\pi i\, tr(\xi z)} \qquad (z \in H^g)$$

ここで和は $\xi \in \mathfrak{t}_i$ かつ $\xi \gg 0$ (総正) 又は $\xi = 0$ を互る。

通常のように $\mathfrak{M}_k(S)$, $\mathfrak{S}_k(S)$ には Hecke 作用素 $T(\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は $F$ の有限素点)、$T(\mathfrak{p},\mathfrak{p})$ ($\mathfrak{p}$ は $\mathfrak{n}$ と素な $F$ の有限素点) が作用する。又 $\mathfrak{S}_k(S_1(\mathfrak{n}))$ の new form という概念が自然に定義される。特に $f \in \mathfrak{S}_k(S_1(\mathfrak{n}))$ が new form ならそれは Hecke 作用素の同時固有函数である：

$$\begin{cases} T(\mathfrak{p}) f = a_f(\mathfrak{p}) f & (\forall \mathfrak{p}) \\ T(\mathfrak{p},\mathfrak{p}) f = a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p}) f & (\forall \mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}) \end{cases}$$

この時

$$D(s,f) = \prod_{\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{n}} (1 - a_f(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s} + a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{1-2s})^{-1}$$

$$\times \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{n}} (1 - a_f(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

とおく。

## §2. 主結果.

§1の記号を踏襲する.

**定理1.** $g = [F : \mathbf{Q}]$ が奇数とする。$f \in S_1(\Gamma_1(\mathfrak{n}))$ が重さ1の new form の時、連続な表現

$$\rho : \mathrm{Gal}(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_2(\mathbf{C})$$

があって次をみたす：

i). $\rho$ は $\mathfrak{n}$ 以外の $F$ の有限素点で不分岐；

ii). $\mathfrak{p}$ を $\mathfrak{n}$ と素な $F$ の有限素点、$\sigma_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$ を $\mathfrak{p}$ での一つの Frobenius 元とする時

$$\det(1 - \rho(\sigma_{\mathfrak{p}}^{-1})T)$$
$$= 1 - a_f(\mathfrak{p})T + N(\mathfrak{p})\, a_f(\mathfrak{p},\mathfrak{p})\, T^2 .$$

この定理の証明の要点は次節に述べる。これから次の系が導かれる：

**系1.** 同じ記号の下で

$$\begin{cases} D(s,f) = \rho \text{ の Artin L-函数} \\ N = \rho \text{ の Artin conductor} \end{cases}$$

保型表現の言葉で、これはもう少し強い次の形で言える：

<u>系2.</u> $\pi_f$ を $f$ に付随する unitarizable な $GL(2)$ の保型表現とすると $\pi_f = \pi(\rho)$ （右辺の意味は例えば、Langlands [L] P.23 参照）.

系1，2の応用として次の事が言える：

<u>系3.</u> $F$ の任意の有限素点 $\mathfrak{z}$ について

$$|a_f(\mathfrak{z})| \leq 2$$

即ち（$g$：奇数の時）$\mathfrak{S}_1(S_1(N))$ について Ramanujan-Petersson 予想が成立する。

<u>系4.</u> 上と同じ $F$ に対し、

$$\varphi : Gal(\bar{F}/F) \longrightarrow GL_2(\mathbb{C})$$

を連続な表現、$\bar{\varphi}$ を $\varphi$ と $GL_2(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ の合成とし、次を仮定する：

i) $Im(\bar{\varphi}) \cong \mathfrak{S}_4$ （4次対称群）；

ii) $\mathrm{I}$ の同型で $\mathfrak{A}_4$ に対応する $F$ の2次拡大は総実；

iii) $F$ の任意の無限素点 $v$ に対し、"$v$ の Frobenius" の $\varphi$ による像は $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ と共役。

この時 $\varphi$ について Artin 予想が成立する。

## §3. 証明の要点.

§0で述べた2点のうち (1) については次が成立する

定理2.([O1]) Fを$\mathbb{Q}$上奇数次の総実代数体、$f \in \mathfrak{S}_k(S_1(\mathfrak{n}))$ ($k \geq 2$) を new form とする。この時全ての $a_f(\mathfrak{z})$, $a_f(\mathfrak{z},\mathfrak{z})$ を含む或る有限次代数体Kがあり、Kの任意の有限素点 $\mathfrak{l}$ に対して次が成り立つ:

$$\exists \rho_{\mathfrak{l}} : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \longrightarrow GL_2(K_{\mathfrak{l}}) \quad (\text{連続準同型}) \text{ s.t.}$$

i). $\rho_{\mathfrak{l}}$ は $\mathfrak{n}N(\mathfrak{l})$ 以外で不分岐;

ii). $\mathfrak{z} \nmid \mathfrak{n}N(\mathfrak{l})$ の時

$$\det(1 - \rho_{\mathfrak{l}}(\sigma_{\mathfrak{z}}^{-1})T) = 1 - a_f(\mathfrak{z})T + N(\mathfrak{z})a_f(\mathfrak{z},\mathfrak{z})T^2$$

この定理は、はじめに(一般の)F上の四元数体から得られる一変数保型形式に付随する $\mathfrak{l}$-進表現を構成し、それに Eichler−清水−Jacquet−Langlands の対応を用いる事によって得られる。[F:$\mathbb{Q}$]が奇数という条件が要るのはそのためである。これより後の議論ではFは任意の総実代数体で良い。

(2) について説明するために言葉の準備をする。一般にRを有限次代数体の素 ideal $\mathfrak{l}$ での付値環とする。以下、§1で選んだ代表元 $t_i$ ($1 \leq i \leq h$) は $N(t_i) \in R^\times$ になるようにとっておく。

$$\mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})(R) = \{ f_i(z) = \sum_{\xi} a_i(\xi)\, e^{2\pi i\, tr(\xi z)} \in \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i}) \mid$$

$a_i(\xi) \in R$ for all $\xi \in t_i$ s.t. $\xi \gg 0$ or $\xi = 0 \}$

$$\mathfrak{M}_k(S)(R) = \bigoplus_{i=1}^{h} \mathfrak{M}_k(\Gamma_{S_i})(R)$$

とおく。$f = (f_i) \in \mathfrak{M}_k(S)(R)$, $g \in (g_i) \in \mathfrak{M}_{k'}(S)(R)$ に対し、"$f_i \equiv g_i \pmod{\mathfrak{l}}$", "$f \equiv g \pmod{\mathfrak{l}}$" で、各 $\xi$ の Fourier 係数が全て mod $\mathfrak{l}$ で合同である事を示す。

命題. $\mathfrak{M}_k(S)(R)$, $\mathfrak{S}_k(S)(R)$ は $T(\mathfrak{p})$, $T(\mathfrak{p}, \mathfrak{p})$ ($^\forall \mathfrak{p} \nmid N(\mathfrak{l})$) で stable.

定理3. $N_0 \in \mathbb{Z}, \geq 4$ を固定する時、$^\exists m \in \mathbb{Z}, \geq 0$ と $N_0 m$ に依存する素数の有限集合 $P(N_0 m)$ があって、任意の素数 $\ell \notin P(N_0 m)$ に対して次が成立する:

$$^\exists h = (h_i) \in \mathfrak{M}_k(S_2(N_0 m))(\mathbb{Z}_\ell \cap \mathbb{Q})$$

with $^\exists k \equiv 0 \pmod{(\ell - 1)}$ s.t.

i) $h \equiv 1 \pmod{\ell}$;

ii) $\mathfrak{q}$ を $N_0 m N(\mathfrak{l})$ と素な $F$ の有限素点、$\varpi \in F_{\mathfrak{q}}$ を素元とする時 $GL_2(F_A) \ni (1, \cdots, 1, \begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{bmatrix}, 1, \cdots, 1)$ ($\mathfrak{q}$-成分のみ $\begin{bmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & \varpi^{-1} \end{bmatrix}$ 他は 1) を $s_i d_i$ ($s_i \in S_i$, $d_i \in GL_2(F)$) と書く。すると $h_i | d_i \equiv 1 \pmod{\ell}$ $(1 \leq i \leq h)$.

更に m は与えられた整数と素にとれる。

注意. $F = \mathbb{Q}$ の時には $h$ として適当な Eisenstein 級数をとれば良い (cf. [D.-S] 6.9)。$F$ が $\mathbb{Q}$ 上 abelian な

らばやはり適当な Eisenstein 級数で間に合うが、一般には未解決の予想を仮定しないと Eisenstein 級数が i), ii) をみたす事が証明できない。 上のものは Rapoport, Katz, Deligne−Ribet による Hilbert modular 形式の代数的理論を使って（Eisenstein 級数とは別に）構成する。

定理 1 の証明は定理 2, 定理 3, 及び志村氏の結果（[S] Prop. 4.13；これから [D−S] Prop. 5.1 の一般化が容易に従う）を用いれば、[D−S] と同様に行く。

## 文献

[D−S] P. Deligne, J.-P. Serre, Formes modulaires de poids 1, Ann. sci. éc. norm. sup. $4^e$ série, t.7, 507−530 (1974).

[L] R. P. Langlands, Base change for GL(2), Ann. Math. Studies 96, Princeton Univ. Press (1980).

[O1] M. Ohta, On $l$-adic representations attached to automorphic forms, Japanese J. Math. 8, 1−47 (1982); part II, to appear.

[O2] 〃, Hilbert modular forms of weight one and Galois representations, to appear.

[R−T] J. D. Rogawski, J. B. Tunnell, On Artin

L - functions associated to Hilbert modular forms of weight one, Invent. Math. 74, 1-42 (1983).

[S] G. Shimura, The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms, Duke Math. J. 45, 637-679 (1978).