数理解析研究所講究録
第516巻 1984年 142-179

極大商環とブール拡大

筑波大学 数学系 江田勝哉(Katsuya Eda)

環論において素イデアルスペクトラムを使って環の構造を調べる方法がある。それは環の素イデアルによる剰余素環の集まりを分析することにより、環の構造を調べるものである。もしある一つの素イデアルにだけ注目しそれによる剰余素環を分析するだけで環全体の構造を調べることができれば、それはずいぶん都合のよいことであろう。しかしそのような事はあるのであろうか。

集合論ではブール拡大(Boolean extension)というコーエンの強制法(Forcing extension)と同値のものがある。この中で固有イデアル(Generic ideal)はある意味で極大性、一般性をもったイデアルで他のものの代表と見なせるといったことがしばしば感じられる。そこでこの固有イデアルに関連したイデアルを使ってブール拡大において剰余素環をつくれば上記のような情況を生み出すことができるのではないだろうか。このよう

なねらいのもとにブール拡大の環論への応用を述べる。

ブール拡大は主に集合論における整合性独立性の問題に使われてきた。初期の段階にもその他の利用について多少気づかれていたが最初の本格的なものは竹内[T_1, … T_5]であろう。最近、小澤[O_1]により竹内[T_5]の解釈のrefineされたものが与えられAW*-代数についてブール拡大の利用が自然なものであることが示された。それによりKaplanskyのAW*-代数についての問題が解かれた。[O_2] 又、部分的な手段としての利用は無限アーベル群に関して江田-日比野[E, E-H]がある。筆者はブール拡大が解釈だけでなく表現論にも利用できるという見地から集合全体V(つまり通常我々が数学を展開している世界)からブール拡大$V^{(B)}$へのうめ込み"∨"だけでなく$V^{(B)}$の元のGlobal sections全体をとり出す"∧"も重要であると思う。ところが"∧"についてある程度頼りになる文献は[S-T]のp.205~p.223以外に見当らないようである。そこでここでは$V^{(B)}$がZFCの公理を満たすこと等を文献[B][N][T-Z]に譲り、"∨"と"∧"が代数的構造(可換群、環、加群体)についてどのような関係をもっているかを中心に1章においてブール拡大のIntroductionを行う。そして2章において本論の環論とくに極大商環のためのブール拡大による解釈を展開し、3章においてその応用を述べる。もしこの小論に

おけるブール拡大についての論理計算に多少とも慣れた人にとっては集合論における簡単な独立性の証明(例えば連続体仮設など)を理解することは容易である。これも本筋からはずれた筆者のねらい(ねがい)である。1章は「形式論理を厳格に学ばなくても2章以下で展開する方法を使うことができる」という主旨で書いていること及び筆者の性格の現われで厳格さに乏しい。そのようなことを好まない方は文献によってほしい。

第1章　ブール拡大

環論では層の理論が応用されることがある。実はブール拡大というのは層とよく似ており、トポスをご存じの方には両者が共にトポスの特殊なものであることが知られていると思う。しかしブール拡大はトポスの中でも具合いのよい点がある。それはブール拡大の中ですべての普通の数学の定理、詳しくいえばZFC集合論の定理がなり立っていることである。このことは極めて強力なことであるが逆た言えば中々それを利用できないということにも在る。けれども2,3章で見られる場合その力が発揮される。

Bを完備ブール代数とする。普通、我々は命題が真か偽である数学の世界を研究しているが、ここでは真と偽つまり1と0の代わりにBの値をもつような数学の世界をつくる。こ

のことは全く代数的に処理されるので哲学的思索をめぐらす必要はない。これから$V^{(B)}$の定義をするが、心配になられる方は時々$B=\{0,1\}$の場合を考えられるとよい。そうすれば集合と特性関数を同一視することにより普通の集合論における集合全体とそれらの間の$\in$-関係、$=$-関係に対応することを納得されるであろう。

$$\begin{cases} V_0^{(B)} = \phi \\ V_{\alpha+1}^{(B)} = \{ u : \mathrm{dom}(u) \subseteq V_\alpha^{(B)} \text{で } x \in \mathrm{dom}(u) \text{について } u(x) \in B \} \\ V_\alpha^{(B)} = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^{(B)} \quad (\text{但し } \alpha \text{は極限数}) \end{cases}$$

$$V^{(B)} = \bigcup_{\alpha \in OR} V_\alpha^{(B)} \quad \text{但し } OR \text{は順序数全体。}$$

$u, v \in V^{(B)}$について

$$[\![u \in v]\!] = \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(v)} v(x) \wedge [\![x = u]\!]$$

$$[\![u = v]\!] = \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \Rightarrow [\![x \in v]\!]$$
$$\wedge \bigwedge_{y \in \mathrm{dom}(v)} v(x) \Rightarrow [\![x \in u]\!] \quad \text{とする。}$$

ここで$\vee$、$\wedge$はブール代数における最小上限、最大下限、$b \Rightarrow c = (1-b) \vee c$。（普通ブール代数では$1-b$を$-b$と表わすが、ブール代数が環の部分となっているときを扱うので間違いのもととならないように面倒でも$1-b$と書く。）$V^{(B)}$の定義及び$[\![\cdot = \cdot]\!]$, $[\![\cdot \in \cdot]\!]$は超限帰納法で定義されており、それで定義になっている。このほかすべての命題例えば$V^{(B)}$の元Aについて"Aはネーター環である"といっ

た命題にBの値を与えるため次のように定義する。

$[\![\neg \Phi]\!] = 1 - [\![\Phi]\!]$, $[\![\Phi \vee \Psi]\!] = [\![\Phi]\!] \vee [\![\Psi]\!]$

$[\![\Phi \wedge \Psi]\!] = [\![\Phi]\!] \wedge [\![\Psi]\!]$, 但し"$\neg\Phi$"は"$\Phi$でない" "$\Phi \vee \Psi$"は"$\Phi$又は$\Psi$"等である。

$[\![\exists x \Phi(x)]\!] = \bigvee_{x \in V^{(B)}} [\![\Phi(x)]\!]$

$[\![\forall x \Phi(x)]\!] = \bigwedge_{x \in V^{(B)}} [\![\Phi(x)]\!]$ とする。これですべての$V^{(B)}$の元についての命題にBの値が対応したことになる。しかし $A \in V^{(B)}$ について"Aはネーター環である"といった命題に本当にBの値が対応づけられるのか心配になられる方もあろうと思う。しかしこれを納得するには、普通の数学はすべてZFC集合論の中で展開できるという事実を信じていただかなければならない。普通数学を考んでいるとき その対象のすべてが集合でありZFC集合論の中での証明をさがしているとは誰も、集合論者も考えてはいない。ただその気にさえなれば普通の数学はZFC集合論の定理となるわけで、これを自分である程度検証して納得するという手もあるが、信じた方が手取り早い。

次の命題は応用上も有用である。

命題1 $u \in V^{(B)}$ について

$[\![\exists x \in u \ \Phi(x, u_1, \cdots u_n)]\!] = \bigvee_{x \in \mathrm{dom}(u)} u(x) \wedge [\![\Phi(x, u_1, \cdots u_n)]\!]$

$[\![\forall x \in u \ \Phi(x, u_1, \cdots u_n)]\!] = \bigwedge_{x \in \mathrm{dom}(u)} (u(x) \Rightarrow [\![\Phi(x, u_1, \cdots u_n)]\!])$

次の命題は基本的である。

命題2. $\Phi_1, \cdots \Phi_n$を仮定してΨが導かれるとき、

$[\![\Phi_1]\!] \wedge \cdots \wedge [\![\Phi_n]\!] \leq [\![\Psi]\!]$ が成立する。

又、ΦがZFCの公理ならば $[\![\Phi]\!] = 1$ が成立する。

この命題により、ΦがZFCの公理から導かれれば$[\![\Phi]\!]=1$でありΦの否定が導かれれば $[\![\Phi]\!]=0$であることがわかる。よってある命題Φについて2つの完備ブール代数B. B'があって $[\![\Phi]\!]^{(B)}=1$, $[\![\Phi]\!]^{(B')}=0$ならΦはZFC集合論から独立ということになる。

さて次の最大値原理はブール拡大と層との大きな違いの一つである。

命題3 (最大値原理) $[\![\exists x\, \Phi(x)]\!] = 1$ が成立すれば、$V^{(B)}$の元uが存在して $[\![\Phi(u)]\!] = 1$ が成立する。

少し余談になるが層の場合との違いを説明したい。層についてはこの最大値原理が一般には成立しないことが利用されている。位相空間X上のアーベル層Sはブール代数Bの代わりにXの開集合の全体のなすハイティング代数$\Theta(X)$によるハイティング拡大$V^{(\Theta(X))}$におけるアーベル群$\bar{S}$に対応する。この$V^{(\Theta(X))}$は直観主義集合論のモデルとなっていることが知られているので数学の定理の一部分が成立している。今fをアーベル層S_1からアーベル層S_2へのエピモルフィズムとすればそれに対応

して $[\![\bar{S}_1, \bar{S}_2$ はアーベル群$]\!] = 1$ で $[\![\bar{h}: \bar{S}_1 \to \bar{S}_2$ は上への準同型写像$]\!] = 1$ である。$[\![y \in \bar{S}_2]\!] = 1$ であるどんな y についても $\bigvee_{x \in V^{(\mathcal{O}(X))}} [\![x \in \bar{S}_1]\!] \wedge [\![\bar{h}(x) = y]\!] = 1$ であるからもしここで最大値原理が成立すればある x があって $[\![x \in \bar{S}_1]\!] = 1$ で $[\![\bar{h}(x) = y]\!] = 1$ となる。これは h が S_1 と S_2 の Global section のなす群の間の上への準同型写像を引き起こすことを意味している。この写像が上への写像となるかどうかがコホモロジー群が消えるかどうかに対応している。つまりコホモロジー群が消えるかどうかはある場合での最大値原理が成立するかどうかに対応している。

さて本筋にもどろう。"$\vee : V \to V^{(B)}$" を定義する。

$$\begin{cases} \mathrm{dom}(\check{x}) = \{\check{y} : y \in x\} \\ \check{x}(\check{y}) = 1 \quad (y \in x) \end{cases}$$

すると $x, y \in V$ について

$$[\![\check{x} \underset{(=)}{\in} \check{y}]\!] = 1 \longleftrightarrow x \underset{(=)}{\in} y$$

$$[\![\check{x} \underset{(=)}{\in} \check{y}]\!] = 0 \longleftrightarrow x \underset{(\neq)}{\notin} y$$

が成立するので $V^{(B)}$ の中に V のコピーがあると考えられる。

命題4　$x, y \in V$ について $[\![\{x, y\}^{\vee} = \{\check{x}, \check{y}\}]\!] = 1$ が成り立つ。

まず命題の内容を説明しよう。$\{x, y\}$ は非順序対であり $\{x, y\}^{\vee}$ は前記の定義により $V^{(B)}$ の元である。$V^{(B)}$ で ZFC の公理がすべて満たされているので $\check{x}$ と $\check{y}$ の非順序対が存在する

ことのBでの値は1であるが、その非順序対が$\{x,y\}$に等しいことのBでの値が1となる。これが内容である。

証明：$[\![\check{\{x,y\}} = \{\check{x},\check{y}\}]\!]$

$= \bigwedge_{u\in\{x,y\}} [\![\check{u} \in \{\check{x},\check{y}\}]\!] \wedge \bigvee_{u\in\{x,y\}} [\![\check{x} = \check{u}]\!] \wedge \bigvee_{u\in\{x,y\}} [\![\check{y} = \check{u}]\!]$

$= \bigwedge_{u\in\{x,y\}} ([\![\check{u} = \check{x}]\!] \vee [\![\check{u} = \check{y}]\!]) \wedge \bigvee_{u\in\{x,y\}} [\![\check{x} = \check{u}]\!] \wedge \bigvee_{u\in\{x,y\}} [\![\check{y} = \check{u}]\!]$

$= 1 \qquad \square$

命題4によって順序対(x,y)についても$[\![\check{(x,y)} = (\check{x},\check{y})]\!] = 1$が成立する。同様の方法で$\Delta_0$-formulaといわれる式$\Phi(x_1\cdots x_n)$について

$[\![\Phi(\check{x}_1\cdots\check{x}_n)]\!] = 1 \longleftrightarrow \Phi(x_1\cdots x_n)$

$[\![\Phi(\check{x}_1\cdots\check{x}_n)]\!] = 0 \longleftrightarrow \neg\Phi(x_1\cdots x_n)$ が成立する。

これにより$(A,+,\cdot,0,1)$が乗法単位1をもつ環であると、$[\![\check{(A,+,\cdot,1,0)} = (\check{A},\check{+},\check{\cdot},\check{1},\check{0})]\!] = 1$で$[\![(\check{A},\check{+},\check{\cdot},\check{1},\check{0})$は乗法単位1をもつ環$]\!] = 1$が成立する。勿論このようなことは環に限らず群でも体でも一般に代数系といわれるものに対して成り立つ。又、可換環、フォンノイマンregular環、全順序環とかいった性質についても同様である。一般には成立しないほうの例は、Baer環、極大商環とかいったものである。このようなことが成立するかしないかは簡単にわかるものから中々難しいものまである。

"∧"の操作を定義しよう。これは$V^{(B)}$の元をVの立場から見直すことに対応する。そのため我々は$V^{(B)}$を同値類に整

理して扱うことにする。

$V^{(B)}$の元x, yについて　$x \sim y \longleftrightarrow [\![x = y]\!] = 1$ とすれば、これは同値関係となる。$V^{(B)}$は集合ではないので同値関係で割って$V^{(B)}/\sim$をつくり代表元をとり出したりすることに多少危惧の念をもたれる方もあるかもしれないが 集合論ではスコットクラスをとるというやり方があって心配はない。そこで我々は今後$V^{(B)}$といったら同値類の代表元の全体であるというイメージで考えることにする。だから$V^{(B)}$の元uを $\mathrm{dom}(u) = \cdots, u(x) = \cdots$と定義してもそれはその元と同値な代表元であると思うことにする。よって $x, y \in V^{(B)}$について $x = y \longleftrightarrow [\![x = y]\!] = 1$ が成立している。このことを$V^{(B)}$が分離(separated)されていることを仮定するとかいわれる。

$V^{(B)}$の元uについて　$\hat{u} = \{ x \in V^{(B)} : [\![x \in u]\!] = 1 \}$とする。我々は普通$u$として、$[\![u$は環である$]\!] = 1$あるいは$[\![u$は群である$]\!] = 1$といったものを扱うので　$[\![\exists x (x \in u)]\!] = 1$が成立する。よって命題3により$\hat{u}$は空集合とはならない。少しルーズな使い方であるが $[\![f : u \to v]\!] = 1$ のとき$\hat{f}$は関数で、$\hat{f} : \hat{u} \to \hat{v}$ で $\hat{f}(x) = f(x)$ $(x \in \hat{u})$ が成立するものとする。但し$f(x)$は$V^{(B)}$の中で関数fによるxでの値を示しており、$\hat{f}(x)$はVでの$\hat{f}$のxでの値である。同様に$[\![f : u \times v \to w]\!] = 1$のとき $\hat{f} : \hat{u} \times \hat{v} \to \hat{w}$ なる関数で $\hat{f}(x, y) = f(x, y)$ $(x \in \hat{u}, y \in \hat{v})$

が成立するものとする。

命題5:(最大値原理の系) $A \in V^{(B)}$ で $\hat{A}$ が空集合でないとき

$$[\![\exists x \in A(\Phi(x))]\!] = \bigvee_{a \in \hat{A}} [\![\Phi(a)]\!],\quad [\![\forall x \in A(\Phi(x))]\!] = \bigwedge_{a \in \hat{A}} [\![\Phi(a)]\!]。$$

命題6:$[\![(A, +, \cdot, 0, 1)$ は環である$]\!] = 1$ のとき,$(\hat{A}, \hat{+}, \hat{\cdot}, 0, 1)$ は環である。$[\![(M, +, \cdot)$ がunitalな A-右加群である$]\!] = 1$ のとき $(\hat{M}, \hat{+}, \hat{\cdot})$ はunitalな $\hat{A}$-右加群である。

命題6の中で $0, 1$ に"∧"がついていないのは $[\![0 \in A]\!] = 1$, $[\![1 \in A]\!] = 1$ なる元 $0, 1$ がそのまま $\hat{A}$ の零元,乗法単位元となっていることを示している。この種の命題は"可換環""正則環"についても成立するが"体"については成立しない。その他"∧"と"∨"は保存する性質にかなりの違いがある。このような性質の保存はモデル論的に興味のあるところであるが今のところ統一的な結果に至っていないようである。

(注意)

1. 普通と同じように環 A と書いて $(A, +, \cdot, 0, 1)$ 及び集合 A の両方の意味で使う。又 $+, \cdot, 0, 1$ はすべての環($V^{(B)}$ の中でも)で共用する。積 $\cdot$ は省略することが多い。今後,環は結合則を満たし乗法単位 1 をもち加群はunitalなものとする。とくにことわらない限り環についての諸概念はすべて右側とする。つまり"イデアル""加群""オーレ条件"等は"右イデアル""右-加群""右オーレ条件"である。

15.

2、Aが環あるいは群等のとき $\hat{A}$ は環あるいは群であり、AのBoolean powerと呼ばれ大抵の場合Aと同型ではない。

3. 表記を簡単にするため"⟦Aが環である⟧$=1$"を"$V^{(B)}$でAは環である"とか"⟦Aが環である⟧$=1$なるAについて"を"$V^{(B)}$での環Aについて"とかいった表現を使うことにする。

命題7：M,NがA－加群で $h:M\to N$ がA－準同型写像（単射,全射）であるなら $V^{(B)}$で $\check{h}:\check{M}\to\check{N}$ は $\check{A}$－準同型写像（単射,全射）である。又 $V^{(B)}$で環AについてM,NがA－加群で $h:M\to N$ がA－準同型写像(単射,全射)ならば $\hat{h}:\hat{M}\to\hat{N}$ は $\hat{A}$－準同型写像(単射,全射)である。

証明は定義と命題3の使用で直接できるので省略する。

命題8：$V^{(B)}$で環AについてM,NがA－加群であるとする。今 $h:\hat{M}\to\hat{N}$ が $\hat{A}$－準同型写像(単射,全射)であるならば⟦$\tilde{h}:M\to N$がA－準同型写像(単射,全射)である⟧$=1$で $\hat{\tilde{h}}=h$ なる $\tilde{h}$ が存在する。

証明：集合論では関数は定義域と値域の直積集合の部分集合であることを思い出し $dom(\tilde{h})=\{(m,h(m)):m\in\hat{M}\}$とする。但しここで $(m,h(m))$ は $V^{(B)}$での順序対であり、⟦$(m,h(m))\in M\times N$⟧$=1$となっているものである。そして $\tilde{h}(x)=1$ $(x\in dom(\tilde{h}))$ とする。問題はこの $\tilde{h}$ について⟦$\tilde{h}:M\to N$なる関数⟧$=1$なることであるが、そ

の必要十分条件は $m, m' \in \widehat{M}$ について $[\![m = m']\!] \leq [\![h(m) = h(m')]\!]$ が成立することである。よって $[\![m = 0]\!] \leq [\![h(m) = 0]\!]$ をいえばよい。$\widehat{A}$ の中に $b = [\![1_b = 1]\!]$, $1 - b = [\![1_b = 0]\!]$ なる元 1_b が $b \in B$ について存在していることに注意しよう。$b \leq [\![m = 0]\!]$ と $m \cdot 1_b = 0$ は同値である。よって $b \leq [\![m = 0]\!]$ なら

$0 = h(m \cdot 1_b) = h(m) \cdot 1_b$ となり $b \leq [\![h(m) = 0]\!]$。

他の代数的関係の検証は容易である。又同様の議論で単射が保たれることがわかる。 $\boxed{\diagup}$

この章の最後に B が集合 I の部分集合全体のなす完備ブール代数の場合について考えてみよう。ブール拡大としては面白みのない例なのだが表現論を意識した場合代数系の無限積のどんな拡張であるかがわかるという意味から少しふれておきたい。 $B = \{ x : x \subseteq I \}$ である。

$V^{(B)}$ の元 x に対して $\pi(x) : I \longrightarrow V$ を帰納的に次のように定義する。(この場合同値関係 $\sim$ で割る前のものを考え $x \sim y$ なら $\pi(x) = \pi(y)$ を後から示すほう好都合。)

$\pi(x)(i) = \{ \pi(y) : i \in x(y)$ で $y \in \mathrm{dom}(x) \}$ とすると

$[\![\Phi(u_1, \cdots, u_n)]\!] = \{ i : \Phi(\pi(u_1)(i), \cdots, \pi(u_n)(i)) \}$ が成立。

とくに群(あるいは環) A について $\widehat{A}$ は 群(環) A^I と同型である。A_i $(i \in I)$ を環とし集合とし $A_i \cap A_j = \phi$ $(i \neq j)$ とする。$\mathrm{dom}(A^*) = \bigcup_{i \in I} A_i$, $A^*(\check{x}) = \{ i \}$ $(x \in A_i)$ とすれ

ば演算も同様に定義して $[\![A^*$ は環である $]\!] = 1$ で環として $\widehat{A^*}$ と $\Pi_{i\in I} A_i$ は同型である。

第2章　ブール拡大による解釈

環A(前にことわったように結合則を満たし1をもつ)に対し $B(A)$ をAの中心冪等元のなすブール代数とする。つまり $B(A) = \{a : a\cdot a = a,\ \forall x \in A(ax = xa)\}$ で $b_1, b_2 \in B(A)$ について $b_1 \vee b_2 = (b_1 + b_2) - b_1\cdot b_2$, $b_1 \wedge b_2 = b_1\cdot b_2$。$B$ を $B(A)$ の標準完備化とする。つまり B が完備ブール代数で $B(A)$ を部分代数として含み任意の0でない B の元 b について $B(A)$ の元 c が存在して $c \leq b$ が成立するものである。又 $a \in A$ について $C(a) = \bigwedge\{b : a\cdot b = a,\ b \in B(A)\} \in B$ とする。これは、Aが Baer 環のときは central cover と呼ばれているものになる。

定義1：環Aが(*)を満たすとは、

$$\forall a \in A\ (C(a) = 0 \rightarrow a = 0)$$ であること。

Baer 環や、strongly regular 環はこの条件を満たす。さて次の定義による $\tilde{\mathscr{I}}$ が本稿の主題となる素イデアルである。

定義2：環Aに対して $\tilde{\mathscr{I}}$ を $V^{(B)}$ の次のような元とする。

$$\mathrm{dom}(\tilde{\mathscr{I}}) = \mathrm{dom}(\check{A})\ \left(= \{\check{a} : a \in A\}\right)$$

$$\tilde{\mathscr{I}}(\check{a}) = \bigvee\{b : a\cdot b = 0,\ b \in B(A)\}$$

命題9：$V^{(B)}$ で $\tilde{\mathscr{I}}$ は環 $\check{A}$ の両側イデアルである。

証明：$u, v \in A$とする。$[\![\check{u} \in \tilde{\mathcal{J}}]\!] = \bigvee_{a \in A} \tilde{\mathcal{J}}(\check{a}) \wedge [\![\check{a} = \check{u}]\!] = \mathcal{J}(\check{u})$

が成立するから $[\![\check{u} \in \tilde{\mathcal{J}}]\!] \wedge [\![\check{v} \in \tilde{\mathcal{J}}]\!] \leq [\![(u+v)^\vee \in \tilde{\mathcal{J}}]\!]$,

$[\![\check{u} \in \tilde{\mathcal{J}}]\!] \leq [\![(u \cdot v)^\vee \in \tilde{\mathcal{J}}]\!]$, $[\![\check{u} \in \tilde{\mathcal{J}}]\!] \leq [\![(v \cdot u)^\vee \in \tilde{\mathcal{J}}]\!]$ $\square$

定義3：$V^{(B)}$で$\varphi : \check{A} \to \check{A}/\tilde{\mathcal{J}}$を剰余環$\check{A}/\tilde{\mathcal{J}}$への商写像とする。

よって$1 = [\![\varphi(\check{A}) = \check{A}/\tilde{\mathcal{J}}]\!]$が成立する。

命題10：環Aが(*)を満たすとき、$V^{(B)}$で$\check{A}/\tilde{\mathcal{J}}$の中心冪等元は0と1だけである。

証明：次の性質は論理計算上有用である。B(A)の元bについて$b = [\![\varphi(\check{b}) = 1]\!]$, $1-b = [\![\varphi(\check{b}) = 0]\!]$。又Aが(*)を満たすことから$a \in A$について$\varphi(\check{a}) = 0$（注：$[\![\varphi(\check{a}) = 0]\!] = 1$と同値）ならば$a = 0$。今$a \in A$, $b \in B(A)$について

$b \leq [\![\varphi(\check{a})(1-\varphi(\check{a})) = 0]\!] \wedge [\![\forall x \in \check{A}(\varphi(\check{a})\varphi(x) = \varphi(x)\varphi(\check{a}))]\!]$

とする。上記のことから

$1 = [\![\varphi(\check{a})(1-\varphi(\check{a}))\varphi(\check{b}) = 0]\!]$

$1 = [\![\varphi(\check{a})\varphi(\check{x})\varphi(\check{b}) = \varphi(\check{x})\varphi(\check{a})\varphi(\check{b})]\!]$ $(x \in A)$ で結局、

$\varphi((a(1-a)b)^\vee) = 0$, $\varphi((axb - xab)^\vee) = 0$ $(x \in A)$ となり

$a(1-a)b = 0$, $axb - xab = 0$ $(x \in A)$ となる。

よって ab はAの中心冪等元となる。Aの中心冪等元cについては証明の最初の性質から$[\![\varphi(\check{c}) = 0$ 又は $1]\!] = 1$が成立する。よって $1 = [\![\varphi((ab)^\vee) = 0$ 又は $\varphi((ab)^\vee) = 1]\!]$。

故に $b \leq [\![\varphi(\check{a}) = 0$ 又は $1]\!]$。

このことは、$[\![\varphi(\check{a})(1-\varphi(\check{a}))=0]\!] \wedge [\![\forall x \in \check{A}(\varphi(\check{a})\varphi(x)=\varphi(x)\varphi(\check{a}))]\!]$ $\leq [\![\varphi(\check{a})=0$ 又は $1]\!]$ を意味する。これがすべての $a \in A$ について成立しているので命題10をうる。$\boxtimes$

環Aの性質(*)について少し調べてみよう。ブール代数Bがブール代数Cの完備部分代数であるとは Bが Cの部分代数であり任意の部分集合 $X \subseteq B$ について $\vee^{B} X = b \in B$ が成立していれば $\vee^{C} X = b$ が成立することである。

命題11：環Aが nonsingular で環Qをその極大商環とする。(既にことわっているとおり、右一という条件はすべてについている。) このとき次の3条件は同値である。

(1) Aが(*)を満たす。

(2) $X \subseteq B(A)$ について $\vee X = 1$ が成立すればXで生成されるイデアルは essential。

(3) $B(A)$ は $B(Q)$ の完備部分代数である。

証明は略す。後で使う2つの性質を定義する。

定義4：環Aが(**)を満たすとは、任意の $a \in A$ について $b \in B(A)$ が存在して $\{x : ax = 0\} = bA$ なること。

環Aが(P)を満たすとは 任意の $x, y \in A$ について $xAy = 0$ ならば $C(x) \wedge C(y) = 0$ であること。

命題12：環Aが(**)を満たせば、Aは nonsingular で(*)を満たし、Aの冪等元はすべて中心に属する。

証明は略す。

命題13：([K, Theorem 13]) Semi-prime Baer 環は(P)を満たす。
よって nonsingular環の極大商環は(P)を満たす。

補題1：Iが(*)を満たす環Aのessentialイデアルであれば、
$V^{(B)}$で$\varphi(\check{I})$は環$\varphi(\check{A})$のessentialイデアルである。

証明：命題5によって$V^{(B)}$でJが環$\check{A}$のイデアルであるとき
$[\![\check{I} \cap J \subseteq \tilde{\mathcal{I}}]\!] \leq [\![J \subseteq \tilde{\mathcal{I}}]\!]$ を示せばよい。$b \leq [\![\check{I} \cap J \subseteq \tilde{\mathcal{I}}]\!]$ $(b \in B(A))$
とすれば任意の$a \in I$について　$b \wedge [\![\check{a} \in J]\!] \leq [\![\check{a} \in \tilde{\mathcal{I}}]\!]$。
$1-b \leq [\![\check{b} \in \tilde{\mathcal{I}}]\!] \leq [\![\check{ab} \in \tilde{\mathcal{I}}]\!]$ だから

$$[\![\check{a} \in J]\!] \leq [\![\check{ab} \in \tilde{\mathcal{I}}]\!] = 1 - C(ab)。$$

結論の否定を仮定すると　あるa'と$b_0 \in B(A)$があって
$0 \neq b_0 \leq [\![\check{a}' \in J]\!] \wedge b$　で　$b_0 \wedge [\![\check{a}' \in \tilde{\mathcal{I}}]\!]$ が成立する。
すると　$b_0 \leq C(a')$ 故に $a' \cdot b_0 \neq 0$。 Iがessentialだから$x \in I \cap a'b_0A$があって　$x \neq 0$。
$b_0 \leq b \wedge [\![\check{a}' \in J]\!] \leq b \wedge [\![\check{x} \in J]\!] \leq [\![\check{x} \in \tilde{\mathcal{I}}]\!] = 1 - C(x)$。
一方　$C(x) \leq b_0$だから　$C(x) = 0$で (*)により $x = 0$ 矛盾。

補題2：環Aが(*)を満たし、$V^{(B)}$でIが$\varphi(\check{A})$のessentialイデアルとする。このとき　$I^* = \{a \in A : [\![\varphi(\check{a}) \in I]\!] = 1\}$
とすれば I^*はAのessentialイデアルである。

証明：I^*がイデアルであることは明らかである。まず
$I = \varphi(\check{I^*})$を示す。例によって $a \in A$, $b \in B(A)$について、

$b \leq [\![\varphi(\check{a}) \in I]\!]$ とすれば $[\![\varphi(a\check{b}) \in I]\!] = 1$ 故に $ab \in I^*$。
$b = [\![\varphi(\check{b}) = 1]\!]$ だから $b \leq [\![\varphi(\check{a}) \in \varphi(\check{I^*})]\!]$，故に $[\![I \subseteq \varphi(\check{I^*})]\!] = 1$。
$[\![\varphi(\check{I^*}) \subseteq I]\!] = 1$ は明らかだから　$I = \varphi(\check{I^*})$。

$I^* \cap xA = 0$ を仮定する。すると $V^{(B)}$ で　$\varphi(\check{I^*}) \cap \varphi(\check{x})\varphi(\check{A}) = 0$ が成立する。何故なら、そうでないとすると　ある　$y \in xA$ と $b \in B(A)$ が存在して，　$0 \neq b \leq [\![\varphi(\check{y}) \in \varphi(\check{I^*})]\!] \wedge [\![\check{y} \notin \tilde{\mathcal{J}}]\!]$。
$b \leq [\![\varphi(\check{y}) \in I]\!]$ により　$yb \in I^*$。一方　$b \leq [\![\check{y} \notin \tilde{\mathcal{J}}]\!] = C(y)$ により　$yb \neq 0$。　$0 \neq y \cdot b \in I^* \cap xA$　は矛盾。

$V^{(B)}$ で I が essential だから　$\varphi(\check{x}) = 0$。よって　$x = 0$。$\square$

定義4：(*)を満たす環 A について，M を A－加群とする。
$V^{(B)}$ において $\varphi(\check{M})$ を　$\varphi : \check{A} \to \check{A}/\tilde{\mathcal{J}}$ に付随してできる $\varphi(\check{A})$－加群とする。つまり　$\varphi(\check{M}) = \check{M}/\check{M}\tilde{\mathcal{J}}$。又 non-singular な A－加群 M, N について　$h : M \to N$ が A－準同型写像ならば，　$\varphi(\check{h})(\varphi(\check{m})) = \varphi(\check{h}(\check{m}))$　$(m \in M)$。

A－加群 M について　$[\![\check{m} \in \check{M}\tilde{\mathcal{J}}]\!] = \bigvee \{ b : mb = 0, b \in B(A) \}$ が成立する。よって M が nonsingular な A－加群のときは，$\varphi(\check{m}) = 0$　なら　$m = 0$ である。これにより定義4の $\varphi(\check{h})$ は正当化される。

補題3：A を(*)を満たす環とし，M が nonsingular な A－加群であるとき，$V^{(B)}$ で $\varphi(\check{M})$ は nonsingular な $\varphi(\check{A})$－加群である。よって　A が nonsingular なら　$V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ は

nonsingular である。

証明：$V^{(B)}$ で I が $\varphi(\check{A})$ の essential イデアルであるとする。$b \leq [\![\varphi(\check{m}) I = 0]\!]$ が $m \in M$, $b \in B(A)$ について成立しているとする。すると $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{mb}) I = 0$ が言えるから、すべての $a \in I^*$ について $\varphi(\check{mba}) = 0$。よって $mbI^* = 0$。補題2により I^* は essential だから $mb = 0$。故に

$b \leq [\![\varphi(\check{m}) = 0]\!]$。 $\boxtimes$

A-加群 M が injective である必要十分条件はどんなイデアル I から M への A-準同型写像 h に対しても、ある M の元 m があって $h(a) = ma$ $(a \in I)$ が成立することである。

補題4：環 A が $\circledast$ を満たし M が nonsingular, injective な A-加群とすれば $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{M})$ は nonsingular, injective な $\varphi(\check{A})$-加群である。

証明：$V^{(B)}$ で I が $\varphi(\check{A})$ のイデアルであり $h : I \to \varphi(\check{M})$ が $\varphi(\check{A})$-準同型写像であるとする。 $a \in I^*$, $m \in M$ について
$V(a, m) = \{ b \in B(A) : b \leq [\![h(\varphi(\check{a})) = \varphi(\check{m})]\!] \}$ とおく。すると、すべての $a \in I^*$ について $\bigvee_{m \in M} V(a, m) = 1$ である。$\mathrm{dom}(h^*)$ をすべての $b \in V(a, m)$, $a \in I^*$, $m \in M$ に対する abA より大きい最小のイデアルとする。 $\mathrm{dom}(h^*)$ は有限和 $\sum_{i=1}^{k} a_i b_i x_i$ からなる。(但し $b_i \in V(a_i, m_i)$, $a_i \in I^*$, $m_i \in M$, $x_i \in A$). $h^*(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i x_i) = \sum_{i=1}^{k} m_i b_i x_i$

とすれば h^* が A－準同型写像であることを示そう。関数として定義されていることを示せば十分である。$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i x_i = 0$ の仮定のもとに $\sum_{i=1}^{k} m_i b_i x_i\ (= m) = 0$ を示す。
$\sum_{i=1}^{k} h(\varphi(\check{a_i}))\varphi(\check{b_i x_i}) = 0$ である。一方 $b_i \leq [\![h(\varphi(\check{a_i})) = \varphi(\check{m_i})]\!]$。
b_i が中心冪等元であるので $\sum_{i=1}^{k} \varphi(\check{m_i})\varphi(\check{b_i x_i}) = 0$
よって $\sum_{i=1}^{k} \varphi(\check{m_i b_i x_i}) = 0$。勘違いをしないためにことわっておくが $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{m}) = \varphi(\check{m_1 b_1 x_1}) + \cdots + \varphi(\check{m_k b_k x_k})$。
が成立している。故に $\varphi(\check{m}) = 0$。M が nonsingular であったから $m = 0$。M が injective だから h^* に対して、$m^* \in M$ があって $h^*(a) = m^* a\ (a \in \mathrm{dom}(h^*))$ が成立する。今 $b \leq [\![h(\varphi(\check{a})) = \varphi(\check{m})]\!]\ (a \in A,\ b \in B(A))$ ならば $a \in \mathrm{dom}(h^*)$ について $h^*(a) \cdot b = h^*(ab) = mb$。故に
$h(\varphi(\check{ab})) = \varphi(\check{mb}) = \varphi(\check{h^*(a)b})$。つまり
$b \leq [\![h(\varphi(\check{a})) = \varphi(\check{m^* a})]\!]$。$a \in \mathrm{dom}(h^*) \subseteq I^*$ について $\bigvee_{m \in M} V(a, m) = 1$ だから $h(\varphi(\check{a})) = \varphi(\check{m^*})\varphi(\check{a})$
が成立する。あとは $\varphi(\check{\mathrm{dom}(h^*)}) = I$ を示せば証明は終る。$a \in I^*$ に対して $\bigvee \{b : a \cdot b \in \mathrm{dom}(h^*)\} = 1$ で
$ab \in \mathrm{dom}(h^*)$ なら $b \leq [\![\varphi(\check{a}) \in \varphi(\check{\mathrm{dom}(h^*)})]\!]$ だから
$[\![\varphi(\check{a}) \in \varphi(\check{\mathrm{dom}(h^*)})]\!] = 1$。$[\![\varphi(\check{\mathrm{dom}(h^*)}) \subseteq \varphi(\check{I^*}) = I]\!] = 1$
は明らかなので $\varphi(\check{\mathrm{dom}(h^*)}) = I$ である。$\boxslash$

（注意）この証明中 $[\![$ I が essential イデアル $]\!] = 1$

のときは $dom(h^*)$ は essential である。そのことのために次のことを示せばよい。証明は(*)の性質による。(証明略)

(*) I が essetial イデアル，I' はイデアルで $I' \subseteq I$ とする。すべての $a \in I$ について $\vee\{b : b \in B(A),\ a \cdot b \in I'\} = 1$ なら I' も essential イデアルである。

nonsingular な環 A の 極大商環の定義を述べる。

$\mathcal{E}$ を A の essential なイデアルのなすフィルターであるとする。nonsingular の仮定のもとなので $\mathcal{E}$ は Dense トポロジーに一致し Gabriel トポロジーとなる。

極大商環 $A_{\mathcal{E}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}_A(I, A)$ である。これに

付随して nonsingular な A-加群 M について

$$M_{\mathcal{E}} = \varinjlim_{I \in \mathcal{E}} \mathrm{Hom}_A(I, M)$$ とすれば

$M_{\mathcal{E}}$ は M の injective envelope $E(M)$ となる。

イデアル $I \in \mathcal{E}$ について $h : I \to M$ が A-準同型写像のとき h の属する同値類を $[h]_{\mathcal{E}}$ で表わす。

補題5. A が(*)を満たす環で M は nonsingular な A-加群，$I \in \mathcal{E}$ で $h : I \to M$ が A-準同型写像とする。$V^{(B)}$ で essential なイデアル J が存在し $\varphi(\check{h})(a) = 0$ がすべての $a \in J$ について成立すれば $[h]_{\mathcal{E}} = 0$ が成立する。

証明： 補題2により $J^* \in \mathcal{E}$ であるから $I \cap J^* \in \mathcal{E}$。

$a\in I\cap J^*$ について $\varphi(\widecheck{h(a)})=\varphi(\check{h})(\varphi(\check{a}))=0$ よって $h(a)=0$。 ☑

nonsingular な A-加群Mについて $i: M\longrightarrow M_\varepsilon$ なる自然なA-embeddingがある。つまり $i(m)=[h_m]_\varepsilon$, 但し $h_m(a)=ma\ (a\in A)$。補題3により $V^{(B)}$ で $j:\varphi(\check{M})\longrightarrow\varphi(\check{M})_\varepsilon$ なる自然な $\varphi(\check{A})$-embeddingがある。$\varphi(\check{\ }) : A\longrightarrow\widehat{\varphi(\check{A})}$ は環準同型写像であるから、$V^{(B)}$ で Mが $\varphi(\check{A})$-加群なら $\hat{M}$は自然にA-加群となる。

定理1：Aを(*)を満たす環とし、MをnonsingularなA-加群とする。 $\Phi: M_\varepsilon\longrightarrow\widehat{\varphi(\check{M})_\varepsilon}$ を $\Phi([h]_\varepsilon)=[\varphi(\check{h})]_\varepsilon$ とすれば、Φは A-同型写像で 下のA-加群についての図式は可換となる。

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\varphi(\check{M})} \arrow[r, "\hat{j}"] & \widehat{\varphi(\check{M})_\varepsilon} \\
M \arrow[u, "\varphi(\check{\ })"] \arrow[r, "i"'] & M_\varepsilon \arrow[u, "\Phi"']
\end{tikzcd}$$

とくに Aが(*)を満たすnonsingularな環ならば A_ε と $\widehat{\varphi(\check{A})_\varepsilon}$ は同型である。

証明：補題3により$\varphi(\check{M})$はnonsingularな $\varphi(\check{A})$-加群で補題1.2からΦの定義が正当化される。ΦがA-準同型写像で図式が可換であることは明らか。Φが単射であることは補題

5による。$V^{(B)}$でIが$\varphi(\check{A})$のessentialイデアルで
$h: I \to \varphi(\check{M})$が$\varphi(\check{A})$-準同型写像とする。補題4の証明の中の$h^*$について(注意)により$\mathrm{dom}(h^*)$はessentialイデアルで$\varphi(\check{\mathrm{dom}(h^*)}) = I$。すべての$a \in \mathrm{dom}(h^*)$について$h(\varphi(\check{a})) = \varphi(\check{h^*(a)})$であるから$h = \varphi(\check{h^*})$が成立する。つまり$\Phi([h^*]_\varepsilon) = [h]_\varepsilon$である。$\boxed{\diagup}$

補題6：Aを(*)を満たす環とし、$V^{(B)}$でMがnonsingularでinjectiveな$\varphi(\check{A})$-加群とする。すると$\hat{M}$はnonsingular~~な~~でinjectiveなA-加群となる。但し$m \in M$, $a \in A$について$m \cdot a = m\varphi(\check{a})$である。

証明：IをAのessentialイデアルで$m \cdot I = 0$が$m \in \hat{M}$について成立するものとする。すると$V^{(B)}$ですべての$x \in \varphi(\check{I})$について$mx = 0$である。補題1とこの補題の条件から$m = 0$。よって$\hat{M}$はnonsingularである。次に$h: J \to \hat{M}$をA-準同型写像、JはAのイデアルであるとする。そして$a \in J$ $b \in B(A)$について$b \le [\![\varphi(\check{a}) = 0]\!]$とする。$ab = 0$だから$h(a)\varphi(\check{b}) = h(a) \cdot b = 0$。故に$b \le [\![h(a) = 0]\!]$。よって$\tilde{h}: \varphi(\check{J}) \to M$が$V^{(B)}$に存在して$\tilde{h}(\varphi(\check{a})) = h(a)$ $(a \in J)$が成立する。$\tilde{h}$に対して$V^{(B)}$で$m \in M$が存在してすべての$x \in \varphi(\check{J})$について$\tilde{h}(x) = mx$。よって
$m \cdot a = m\varphi(\check{a}) = \tilde{h}(\varphi(\check{a})) = h(a)$ $(a \in J)$となる。$\boxed{\diagup}$

系1：Aが(*)を満たす環でMがnonsingularでinjectiveなA−加群であればMと$\varphi(\widehat{\check{M}})$は同型である。とくにAがregularでself-injectiveな環なら．Aと$\varphi(\widehat{\check{A}})$は同型である。

証明：$\varphi(\check{m})=0$ならば$m=0$であるからMは$\varphi(\widehat{\check{M}})$の部分加群である。$\varphi(\widehat{\check{M}})$の任意の元$x$に対して$b_\alpha \in B(A)$．$m_\alpha \in \varphi(\widehat{\check{M}})$ $(\alpha\in\Lambda)$で$\bigvee_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha = 1$，$b_\alpha \wedge b_\beta = 0$ $(\alpha\neq\beta)$．$x\cdot b_\alpha = m_\alpha$ $(\alpha\in\Lambda)$なるものが存在する。$\{b_\alpha : \alpha\in\Lambda\}$で生成されるイデアルからMへの準同型写像$h$で$h(b_\alpha)=m_\alpha$なるものを考える。Mがinjectiveだから Mの元mで$m\cdot b_\alpha = m_\alpha$ $(\alpha\in\Lambda)$なるものが存在する。すると$b_\alpha \le [\![\varphi(\check{m}_\alpha)=\varphi(\check{m})]\!]$ $(\alpha\in\Lambda)$よって$1=[\![x=\varphi(\check{m})]\!]$。よって$M\simeq\varphi(\widehat{\check{M}})$。$\boxed{\diagup}$

補題7：Aが(*)を満たす環とし$V^{(B)}$でMが$\varphi(\check{A})$-加群とする。$N=\widehat{M}$とすれば$V^{(B)}$で$\varphi(\check{N})$とMは同型である。

証明：$V^{(B)}$の元$h:\check{N}\to M$を$h(\check{m})=m$なるように定義する。すると$V^{(B)}$でhは群についての準同型写像であり，$h(\check{m}\cdot\check{a}) = m\varphi(\check{a})$ $(m\in\widehat{M},\ a\in A)$が成立する。$V^{(B)}$で$h$の核は$\check{N}\tilde{\mathcal{J}}$であり$h$は全射だから$\varphi(\check{N})\simeq M$である。

定理2：Aを(*)を満たすnonsingularな環とする。A−加群Mがnonsingularでinjectiveであることの必要十分条件は．nonsingularでinjectiveな$\varphi(\check{A})$-加群Nが$V^{(B)}$で存在し．Mと$\widehat{N}$が同型なことである。　又N_1．N_2を$V^{(B)}$でnonsingular

でinjectiveな$\varphi(\check{A})$-加群とする。$\widehat{N_1}$と$\widehat{N_2}$が同型であることと$V^{(B)}$でN_1とN_2が同型であることは同値である。又、$\widehat{N_1}$から$\widehat{N_2}$への単射A-準同型写像の存在は、$V^{(B)}$でN_1からN_2への単射$\varphi(\check{A})$-準同型写像の存在と同値である。

証明：$\underbrace{h : N_1 \to N_2}_{\text{nonsingular な A-加群 } N_2 \text{ について}}$ が単射A-準同型写像であれば、$\varphi(\check{h}) : \varphi(\check{N_1}) \to \varphi(\check{N_2})$ は$V^{(B)}$で単射$\varphi(\check{A})$-準同型写像である。一方、$V^{(B)}$で$h : N_1 \to N_2$が単射A-準同型写像であれば、$\hat{h} : \widehat{N_1} \to \widehat{N_2}$も単射$\hat{A}$-準同型写像である。だから定理2は補題5、6、7から導かれる。 $\boxed{\diagup}$

(注意) 今まで(*)を満たす環について述べてきたが一般にnonsingularな環Aについてブール拡大を使うことができる。まずAの極大商環Qを考える。Aがnonsingularだから Qはregularでself-injectiveな環となり(*)を満たす。そこで$B = B(Q)$としてブール拡大をし、$\varphi : \check{Q} \to \check{Q}/\mathfrak{g}$とする。このとき補題4により$\varphi(\check{Q})$はregularでself-injectiveである。そして$\varphi(\check{Q})$は$V^{(B)}$で$\varphi(\check{A})\ (= \{\varphi(g) : g \in \check{A}\})$の極大商環である。$B(A)$の標準的完備化を使うときよりも間接的ではあるが、Aが(P)を満たすときは$B(Q) \simeq \overline{B(A)}$であるから、扱うものによっては利用できると思う。

第3章 応用

命題14：Aを(*)を満たす環とする。Aが(P)を満たすこと

と $V^{(B)}$で $\varphi(\check{A})$が素環であることは同値である。

証明： 例によって $b\in B(A)$, $x, y\in A$ について

$b\leq [\![\varphi(\check{x})\varphi(\check{A})\varphi(\check{y})\varphi(\check{A})=0]\!]$ であるとする。(P)を仮定すると $xAyb=0$ から $C(x)C(y)b=C(x)C(yb)=0$。

故に $b\leq (1-C(x))\vee(1-C(y))=[\![\varphi(\check{x})=0$ 又は $\varphi(\check{y})=0]\!]$。

よって $V^{(B)}$で $\varphi(\check{A})$ は素環である。

逆に $V^{(B)}$で $\varphi(\check{A})$ が素環であるとし、$xAy=0$とする。

$[\![\varphi(\check{x})\varphi(\check{A})\varphi(\check{y})\varphi(\check{A})=0]\!]=1$ だから $[\![\varphi(\check{x})=0]\!]\vee[\![\varphi(\check{y})=0]\!]=1$。 よって上と同様にして $C(x)\wedge C(y)=0$ ◻

今Aが regular で self-injective な環とすると命題11、13、14 補題4から $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$は regular で self-injective な素環である。又、系1でAは $\widehat{\varphi(\check{A})}$ と同型である。ところで regular で self-injective な素環については、いくつか結果が知られている。それらは"∧"の操作により、自動的に素環で無い場合の結果となっているはずである。問題はその結果が環を考えているとき知りたい結果につながってくるかどうかである。

Aを(*)を満たす nonsingular な環とし、$M_\alpha\ (\alpha\in\Lambda)$ が nonsingular で injective な A-加群とする。このとき直和 $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$ の injective envelope $E(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha)$ がどんなものになっているかを考えよう。 $N=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}M_\alpha$ とおく。

$E(N) \simeq N_\varepsilon$ である。今までの考察から $E(N) \simeq \widehat{\varphi(\check{N})}_\varepsilon$ である。ところで $V^{(B)}$ で考えると $\check{N} \simeq \oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \check{M}_\alpha$ であるから $\varphi(\check{N}) \simeq \oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \varphi(\check{M}_\alpha)$ である。又 $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{M}_{\check{\alpha}}) \simeq \varphi(\check{M}_\alpha)$ であるから、$\widehat{\varphi(\check{M}_\alpha)} \simeq M_\alpha$ である。

$E(N)$ を表現するために次の定義をする。

定義5: M_α $(\alpha\in\Lambda)$ が A-加群のとき 直積 $\prod_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ の部分 A-加群 $PS(M_\alpha : \alpha\in\Lambda)$ を次のように定める。

$f \in PS(M_\alpha : \alpha\in\Lambda) \Longleftrightarrow$ ある $P \subseteq B(A)$ が存在して任意の $b\in P$ について $\{\alpha : f(\alpha)\cdot b \neq 0\}$ が有限。

(PS は Proper sequence の略で多少違った形で[E]にある。)

系2: A が(*)を満たす環で、$V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ がネーター環であるとする。M_α $(\alpha\in\Lambda)$ が nonsingular で injective な A-加群とすると $E(\oplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha)$ は $PS(M_\alpha : \alpha\in\Lambda)$ と同型である。

証明: $N = \oplus_{\alpha\in\Lambda} M_\alpha$ とおく。$V^{(B)}$ で $\check{N} \simeq \oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \check{M}_\alpha$ であるから $\varphi(\check{N}) \simeq \oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \varphi(\check{M}_\alpha)$ である。$V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ がネーター環であるから $\oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \varphi(\check{M}_\alpha)$ は injective になる。よって補題4により $V^{(B)}$ で $\left(\oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \varphi(\check{M}_\alpha)\right)_\varepsilon = \oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \varphi(\check{M}_\alpha)$。定理1により $\widehat{\varphi(\check{N})} \simeq N_\varepsilon \simeq E(N)$ だから $PS(M_\alpha : \alpha\in\Lambda)$ と $\widehat{\oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \varphi(\check{M}_\alpha)}$ が同型であることを示せばよい。有限部分集合がブール拡大について絶対的であることに注意しよう。

この機会に証明の途中ではあるが、この絶対的であるということを説明しよう。Xを集合とし、Xの有限部分集合の全体を$P_F(X)$で表わす。このとき$V^{(B)}$でも同じ定義によって$P_F(\check{X})$が定義できる。そして$[\![\check{P_F(X)} = P_F(\check{X})]\!] = 1$が成立する。このことを有限部分集合がブール拡大について絶対的であるという。一方Xの部分集合全体$P(X)$については一般には$[\![\check{P(X)} = P(\check{X})]\!] = 1$が成立しない。つまり一般には絶的的ではない。同じようにαが順序数のとき$[\![\check{\alpha}$は順序数$]\!]=1$であるので順序数は絶対的であるが、αが基数のとき必ずしも$[\![\check{\alpha}$は基数$]\!]=1$とは限らない。よって基数は一般には絶対的では無い。

さて証明にもどろう。直和は直積の部分加群で、有限コを除き0となる関数の全体で表わされることを思い出せば、

$$[\![x \in \oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}} \varphi(\check{M}_\alpha)]\!] = \bigvee_{\text{finite } F\subseteq\Lambda} \bigwedge_{\alpha\notin F} [\![x(\check{\alpha}) = 0]\!]$$
$$= [\![\mathrm{dom}(x) = \check{\Lambda} \text{ で } x(\alpha)\in\varphi(\check{M}_\alpha)\ (\alpha\in\Lambda)]\!]。$$

$\widehat{\varphi(\check{M}_{\check{\alpha}})} \simeq \widehat{\varphi(\check{M}_\alpha)} \simeq M_\alpha\ (\alpha\in\Lambda)$であるから自然な対応で$\widehat{\oplus_{\alpha\in\check{\Lambda}}\varphi(\check{M}_\alpha)}$と$PS(M_\alpha : \alpha\in\Lambda)$は同型。 $\boxed{/}$

さて系2の"$V^{(B)}$で$\varphi(\check{A})$がネーター環"という条件は、Aについてどういう条件なのであろうか。例えばAがstrongly regularな環なら$V^{(B)}$で$\varphi(\check{A})$は斜体であるからこの条件は満たされる。又後に示すようにAが

regular, self-injective, directly finite で Type I とすると $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ は有限次元ベクトル空間の full linear ring であるからやはり $\varphi(\check{A})$ がアルティン環となりネーター環である。

ここで "$[\![\varphi(\check{A})$ はネーター環$]\!] = 1$" を書き下してみよう。$[\![I$ が $\varphi(\check{A})$ のイデアルである$]\!] = 1$ のとき前に使った I^* を考える。すべてのイデアルが I^* の形をしているわけではない。そこで A のイデアル J で $J = (\varphi(\check{J}))^*$ なるものはいかなるものであろうか。A の元 a について $b_\alpha \in B(A)$, $a_\alpha \in J\ (\alpha \in \Lambda)$ があって $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha = 1$, $b_\alpha \wedge b_\beta = 0\ (\alpha \neq \beta)$, $a \cdot b_\alpha = a_\alpha b_\alpha\ (\alpha \in \Lambda)$ が成立すれば a は J に属する。これが $J = (\varphi(\check{J}))^*$ になるためのイデアル J の必要十分条件である。AW^*-環では $B(A)$ が完備であり、加群についてこの条件を満たすものを normal な加群と呼んでいるようだが筆者は詳しくは知らない。しかし名前だけ借りて normal なイデアルと呼ぶことにしよう。

さて $[\![\varphi(\check{A})$ がネーター環$]\!] = 1$ の性質は "$J_n\ (n \in N)$" が normal なイデアルで $J_n \subseteq J_{n+1}$ であるときに、$P \subseteq B(A)$ が存在して $\bigvee P = 1$ で任意の $b \in P$ に対して $n \in N$ があって $\forall k \geq n\ (J_n \cdot b = J_k \cdot b)$ が成立することと同値である。筆者はこのような性質が環論として必ずしも自然な性質であるとは思わないが、とくに中心冪等元の無限個ある環にある意味の有限性を導入するやり方の一つではあると思う。又

ブール拡大が目的に応じ refine され、少し弱い論理を反映する体系がとって代われば 性質ももう少し自然なものになり得るかもしれない。いずれにしろこのあたりは実験段階で可能性のあるところのように思える。

次に nonsingular で injective な加群の次元論を展開する。まずベクトル空間の次元論に帰着できる場合を扱ってみよう。

命題15： A が $(**)$ を満たすオーレ環とする。すると $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ はオーレ整域である。

証明：例により $b \in B(A)$，$x, y \in A$ で $b \leq [\![\varphi(\check{x}) \varphi(\check{y}) = 0]\!]$ とする。すると $xyb = 0$ で $(**)$ の性質から $C(x)C(y)b = 0$ となり $b \leq [\![\varphi(\check{x}) = 0]\!] \vee [\![\varphi(\check{y}) = 0]\!]$ となる。よって $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ は整域である。 次に $b \leq [\![\varphi(\check{s}) \neq 0]\!]$ とすれば $(**)$ により $s + (1-b)$ は零因子では無い。よって $x \in A$ に対して零因子で無い $t \in A$ と $y \in A$ が存在し，$xt = (s + (1-b))y$ が成り立つ。故に $xt - sy = (1-b)y$ であり t は零因子で無いから $C(t) = 1$。 $b \leq [\![\varphi(\check{xt}) = \varphi(\check{sy})]\!]$ で $[\![\varphi(\check{t}) \neq 0]\!] = 1$、よって $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ はオーレ整域である。□

オーレ整域の極大商環はその商体である。ベクトル空間の次元を $\dim(\ )$ で表わすことにする。すると命題12，15 定理2により、つぎの系をうる。

系3． A が $(**)$ を満たすオーレ環とする。nonsingular で

injective な A-加群 M, N について $M \lesssim N$ と $[\![\dim(\varphi(\check{M})) \leq \dim(\varphi(\check{N}))]\!] = 1$ は同値である。さらに $b \in B(A)$ について $Mb \lesssim Nb$ と $b \leq [\![\dim(\varphi(\check{M})) \leq \dim(\varphi(\check{N}))]\!]$ は同値である。

この系3と定理により(**)を満たすオーレ環Aについて nonsingularで injectiveなA-加群の同型は $V^{(B)}$ の基数の順序型と一致していることがわかる。つまり $[\![\dim(\varphi(\check{M})) = \check{\kappa}_\alpha]\!] = b_\alpha$ $\bigvee_{\alpha \in \Lambda} b_\alpha = 1$, $b_\alpha \wedge b_\beta = 0\ (\alpha \neq \beta)$, $\kappa_\alpha \neq \kappa_\beta\ (\alpha \neq \beta)$ で κ_α は基数である。但し、すべてのこの型のものが $V^{(B)}$ での基数となるとは限らない。これは集合論ではよく知られていることで κ が基数のとき $[\![\check{\kappa}$ は基数である $]\!] = 1$ とは限らないのである。すべての κ について、これが成立することは、すべての基数 $\kappa\ (\leq \overline{\overline{B}})$ について B が (κ, κ^+)-弱分配律を満たすことと同値である。

次にもっと一般にAが nonsingular な環の場合を考えよう。これについては Goodearl と Boyle の研究がある。[G]、結局 A が regular で self-injective な場合を考えればよいのだが、彼等はその条件のもとで素環でない場合ブーリアンスペクトラム (= BS(A) B(A) の極大イデアルの全体) を使って次元関数を定義している。そのため [G, p.346] の問題18にあるように次元関数の値域がわからなくなることが起きる。我々

はブール拡大により系3と同じように素環上の次元([G]にあるように関数は1つてすむ)に帰着させる。それにより、次元が$V^{(B)}$の実数及で基数により表わされることがわかる。このことから彼等の定義している次元関数の値域もはっきりする。(問題18の答は否定的である。反例は小澤[O_2]と同じで 前に述べたκが基数のとき$V^{(B)}$で$\check{\kappa}$が基数とならない例がそれとなる。) Goodearl と Boyle が定義している BS(A) を使った次元関数をブール拡大の言葉で表現してみよう。(次元関数その他の定義は[G]による。)

補題8:Aをregularでself-injectiveな環でMをnonsingularなA-加群とする。すると $cc(M) = [\![\varphi(\check{M}) \neq 0]\!]$。

証明: $b \in B(A)$ について

$$Mb = 0 \longleftrightarrow b \leq [\![\varphi(\check{M}) = 0]\!] \longleftrightarrow [\![\varphi(\check{M}) \neq 0]\!] \wedge b = 0$$

である。 $\boxed{\diagup}$

補題9:補題8と同じ条件で $m \in BS(A)$、κを無限基数とする。もし $\kappa < \mu_m(M)$ ならば、あるA-加群と $b \in B(A) - m$ があって $cc(N) = b$ で $\kappa N \lesssim M$ が成立する。

証明:$\bar{b}$を $cc(N) = b$ で $\kappa N \lesssim M$ なるNの存在するbの最小上界とする。すると次のような b_α と N'_α $(\alpha \in \Lambda)$ が存在する:$\bigvee_{\alpha\in\Lambda} b_\alpha = \bar{b}$、$b_\alpha \wedge b_\beta = 0$ $(\alpha \neq \beta)$、$\kappa N'_\alpha \lesssim N$、$cc(N'_\alpha) = b_\alpha$。すると $cc(\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} N'_\alpha) = \bar{b}$ で

$\kappa(\oplus_{\alpha\in\Lambda} N'_\alpha) \precsim \oplus_{\alpha\in\Lambda} N b_\alpha \precsim N\bar{b}$。 $\kappa < \mu_m(N)$ であるから $\bar{b} \in B(A)-m$ である。 $\boxtimes$

系4： A を regular で self-injective な環とし N_1, N_2 を nonsingular で injective な A-加群，$m \in BS(A)$ とする。

(1) $d_m(N_1 : N_2) = \inf\{ m/n : m, n$ は自然数で $[\![d_{\{0\}}(\varphi(\check{N}_1) : \varphi(\check{N}_2)) \leq \check{m}/\check{n}]\!] \in B(A)-m \}$,

(2) 無限基数 κ について $\kappa < \mu_m(N_1)$ と $[\![\check{\kappa} < \mu_{\{0\}}(\varphi(\check{N}_1))]\!] \in B(A)-m$ は 同値。

証明： $b \in B(A)$ について $nN_1 b \precsim mN_2 b$ とする。定理2と補題7によりこのことは $b \leq [\![\varphi(\check{n}\check{N}_1) \precsim \varphi(\check{m}\check{N}_2)]\!] = [\![\check{n}\varphi(\check{N}_1) \precsim \check{m}\varphi(\check{N}_2)]\!]$ と同値，$V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ は regular で self-injective な素環だから $\check{n}\varphi(\check{N}_1) \precsim \check{m}\varphi(\check{N}_2)$ と $d_{\{0\}}(\varphi(\check{N}_1) : \varphi(N_2)) \leq \check{m}/\check{n}$ は同値。よって(1)が成立する。

補題9により $\kappa < \mu_m(N_1)$ ならばある A-加群 N と $b \in B(A)-m$ があって $c(N) = b$ で $\kappa N \precsim N_1$。補題8により，$b = [\![\varphi(\check{N}) \neq 0$ で $\check{\kappa}\varphi(\check{N}) \precsim \varphi(\check{N}_1)]\!]$。よって $[\![\check{\kappa} < \mu_{\{0\}}(\varphi(\check{N}_1))]\!] \in B(A)-m$。 逆に $[\![\check{\kappa} < \mu_{\{0\}}(\varphi(\check{N}_1))]\!] = b \in B(A)-m$ とすると $\varphi(\check{A})$-加群 N が $V^{(B)}$ にあって $b \leq [\![N \neq 0$ で $\check{\kappa} N \precsim \varphi(\check{N}_1)]\!]$ となる。 $b \neq 0$ だから $\hat{N}b$ は 0 でない A-加群で

17:

$\kappa \hat{N} b \simeq \kappa(\widehat{N\varphi(\check{b})}) \lesssim \widehat{\varphi(\check{N_1 b})} \simeq N_1 b$ 。よって $\kappa < \mu_m(N_1)$。☐

この系により nonsingular 環 A について nonsingular injective な A−加群の次元は regular で self-injective な素環上の nonsingular injective な加群の次元に帰着できる。とくに無限次元について素環の場合 $\mu_{\{0\}}$ はつねに $\aleph_{\alpha+1}$ の型の基数を値にとる。本質的な違いは無いが、$\mu_{\{0\}}$ の定義をかえて、$\mu^*(0) = 0$, $M \neq 0$ のとき

$\mu^*(M) = \sup\{\lambda ; \lambda M \lesssim M \quad \lambda$ は基数$\}$ とするのが妥当であると思われる。この定義によれば、M が directly finite で 0 でなければ $\mu^*(M) = 1$ となる。

命題16: A を(*)を満たす環で M が nonsingular で injective な A−加群とする。このとき A が directly finite であることと $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ が directly finite であることは同値。又 M が directly finite であることと $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{M})$ が directly finite であることは同値である。

証明: A が directly finite で $b \leq [\![\varphi(\check{x})\varphi(\check{y}) = 1]\!]$ $(b \in B(A),\ x, y \in A)$ とする。すると $xyb = b$ よって $(xb + (1-b))(yb + (1-b)) = 1$。 $yxb = b$ だから $b \leq [\![\varphi(\check{y})\varphi(\check{x}) = 1]\!]$。逆は明らか。又、加群の場合は補題4, 6 と Functors "$\wedge$" "$\varphi(\check{\ })$" による。☐

系4と命題16により有限次元の場合も素環上の次元にどの

ように帰着させるかは明らかであろう。ここで Goodearl の問題18[G]の否定解について述べよう。Bを $V^{(B)}$ で $\check{\omega}_1$ が可算となるような完備ブール代数であるとする。Bは環として regular で self-injective である。このようなBの存在は集合論ではよく知られていることであるがご存じのない方のために少し説明しよう。前に"絶対的"について説明したとき基数は絶対的とは限らないと述べた。そのことを示す例が基数の崩壊(Cardinal Collapsing)である。κを無限基数とし ${}^{\omega}\kappa=\{f: f$ は ω から κ への関数$\}$ に位相を次のように入れる。κ は離散的であるとし ${}^{\omega}\kappa$ に積位相を入れる。その正則開集合のなす完備ブール代数を B_κ とすると $V^{(B_\kappa)}$ で $\check{\kappa}$ は可算である。そのことを示そう。

$b_{m\alpha}=\{f: f(m)=\alpha\}\in B_\kappa$ ($m<\omega$, $\alpha<\kappa$) とおく。$\mathrm{dom}\,\varphi=\{(\check{m,\alpha}): m<\omega, \alpha<\kappa\}$ とし $\varphi((\check{m,\alpha}))=b_{m\alpha}$ とおく。すると $[\![\varphi:\check{\omega}\to\check{\kappa}$ で φ は全射$]\!]^{(B_\kappa)}=1$ となる。(検証されたい。) 又 ω の代わりに他の無限基数をとったり、その位相を積位相より強くすることも考えられる。このようなことは比較的よく調べられている。

さて $\kappa=\omega_1$ のときにもどって $M=E(\omega B)$ とおくと $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{M})\simeq(\check{\omega}\cdot 2)_E=\check{\omega}\,2\simeq\check{\omega}_1 2$ である。但し $2\,(=\{0,1\})$ は標数2の素体である。$[\![\check{\omega}_1<\mu_{\{0\}}(\varphi(\check{M}))]\!]=1$

であるから $\omega_1 < \mu_m(M)$ がすべての $m \in BS(B)$ について成立する。一方 $\mu_m(B) = \omega$ は明らかである。よって $\mu_m(E(\omega B))$ は ω と $\mu_m(B)$ の最大値の次の基数ではない。κ はいくらでも大きくすることが可能であるから $\mu_m(E(\omega B))$ の値は ω と $\mu_m(B)$ に無関係に大きくなりうる。

応用の最後に Type I の regular, self-injective な環の表現について述べる。regular 環 A が Type I であるとは、ある冪等元 e で $C(e) = 1$ なるもので 環 eAe の冪等元がすべて中心に属するようなものが存在することである。

命題17：A が(＊)を満たす Type I の regular 環であるとする。すると $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ は Type I の regular 環である。又 R が $V^{(B)}$ で Type I の regular 環なら $\hat{R}$ は Type I の regular 環である。よって A が Type I の self-injective な regular 環であることと $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ が Type I の self-injective な regular 素環であることは同値である。

証明：A が Type I であることから所定の条件を満たす冪等元 e が存在する。 $a \in A$, $b \in B(A)$ について
$b \leq [\![\varphi(\check{a}) \in \varphi(\widecheck{eAe})$ で $\varphi(\widecheck{a(1-a)}) = 0]\!]$ とする。するとある $c \in B(A)$ で $0 \neq c \leq b$ かつ $a \cdot c \in eAe$ なるものが存在する。 $a(1-a)c = 0$ だから $a \cdot c$ は eAe の冪等元

で環 eAe の中心に入ることになる。故に
$c \leq [\![\varphi(\check{\alpha})$ は環 $\varphi(\check{eAe})$ の中心冪等元である $]\!]$。ここで b は任意であったので結局 $V^{(B)}$ で環 $\varphi(\check{eAe})$ の冪等元はその中心に入ることが成立する。$V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ の中心冪等元は 0 と 1 だけで $\varphi(\check{e})$ は 0 でないから $C(\varphi(\check{e})) = 1$ である。よって $V^{(B)}$ で $\varphi(\check{A})$ は Type I である。regular であることは明らか。
逆の方は $V^{(B)}$ で R の冪等元 e と $C(e)$ をとる。$\hat{R}$ で e は冪等元であり $C(e)$ は $\hat{R}$ で計算した central cover と一致する。よって $\hat{R}$ は Type I。あとは系1と命題14から明らか。$\square$

系5. A が (directly finite) Type I の self-injective な regular 環であることと、ある完備ブール代数 B と $V^{(B)}$ の元 R が存在して $\hat{R} \simeq A$ であり $V^{(B)}$ で R が (有限次元) ベクトル空間の全線型環であることが同値である。

証明：[G] の命題10.2 により環が (有限次元) ベクトル空間の全線型環であることと (directly finite) Type I の self-injective, regular 素環であることは同値。よって命題14, 16, 17 から一方向きが成立する。逆のほうは $\hat{R}$ が self-injective なことを示せばよい。I が $\hat{R}$ のイデアルで $h: I \to \hat{R}$ が $\hat{R}$-準同型写像であるとする。$V^{(B)}$ の元 $\underline{I}$ を $dom(\underline{I}) = I$, $\underline{I}(x) = 1 \ (x \in I)$ と定義する。すると $V^{(B)}$ で $\underline{I}$ は R のイデアルである。又 $b \in B(A)$ について $\hat{R}$ の元

1_b を $b = [\![1_b = 1]\!]$, $1-b = [\![1_b = 0]\!]$ なる元とする。
$b \le [\![u = 0]\!]$ とすれば $u \cdot 1_b = 0$ だから $h(u) 1_b = 0$.
つまり $b \le [\![h(u) = 0]\!]$。よって $V^{(B)}$ で $\underline{h}: \underline{I} \longrightarrow R$ が R−準同型写像となる $\underline{h}$ が存在し, $\underline{h}(u) = h(u)$ $(u \in I)$ が成立する。$V^{(B)}$ で R は self-injective だから $\hat{R}$ に r が存在し、$V^{(B)}$ ですべての $u \in \underline{I}$ について $\underline{h}(u) = ru$ が成立する。
よってすべての $u \in I$ について $h(u) = ru$。$\boxed{/}$

(付記)

次元に関して directly finite な場合 $V^{(B)}$ の実数が次元となる。集合論をしているものにすれば B の $(\omega, 2)$−分配律が次元の分類に影響するのではないかと思われるが、環論のほうでは次元をブール冪を使って表現することは試みられていないようなので今まである結果には影響しないようである。又 (ω, ω)-弱分配律は B が測度代数であると満たされるが一般にはそうではない。これが rank function や次元に何か影響することがわかればこれも面白いと思うのだけれど、どんな影響があるのか筆者にはわからない。

(参考文献)

[B] J.L. Bell, Boolean Valued Models and Independence Proofs in Set Theory, Oxford Univ. Press, London, (1977).

[E] 江田勝哉, On a Boolean Power of a Torsion free Abelian

Group, J. Algebra, (1) 82 (1983) 84-93.

[E-H] 江田勝哉－日比野健一：On Boolean Powers of the group Z and (ω,ω)-weak distributivity, to appear.

[G] K.R. Goodearl, Von Neumann Regular Rings, Pitmann, London (1979).

[K] I. Kaplansky, Rings of Operators, Benjamin, New York (1968).

[N] 難波完爾，集合論，サイエンス社，(1975).

[O_1] 小澤正直，Boolean valued interpretation of Hilbert space theory, J. Math. Soc. Japan, to appear.

[O_2] 小澤正直，Boolean valued analisis and type I AW*-algebras, to appear.

[S-T] R.M. Solovay and S. Tennembaum, Iterated Cohen extensions and Souslin's problem, Ann. of Math. 94 (1971) 201-245.

[T_1] 竹内外史，Two applications of Logic to Mathematics, Iwanami and Princeton Univ. Press, Tokyo-Princeton (1978).

[T_2] 竹内外史，Boolean vaued analysis, in LNM 753, Springer, (1979) 714-731.

[T_3] 竹内外史，A transfer priciple in harmonic analysis, J. Symbolic Logic, 44 (1979) 417-440.

[T_4] 竹内外史，Boolean completion and m-convergence, in LNM 915, Springer (1982) 333-350.

[T_5] 竹内外史，Von Neumann algebras and Boolean valued analysis, J. Math. Soc. Japan, (1) 35 (1983) 1-21.

[T-Z] G. Takeuti and W.N. Zaring, Axiomatic Set Theory, Springer, Heidelberg (1973).