数理解析研究所講究録
第 518 巻 1984 年 1-8

Cabling, Twisting, and Branching on Higher Dimensional Knots

九州大 理　金信泰造(Taizo Kanenobu)

高次元 knot の構成法として，Artin [1] の spinning，Zeeman [11] の twist spinning 等が知られている．また，satellite knot やその特別の場合である cable knot は同じ次元の knot の構成法である．[6] このノートでは，knot を $(n+2)$-manifold への n-sphere の埋め込みと考えて，さらに，knot の cyclic branched cover と knot の引き戻しの pair を branching という knot の構成法とみて表題に示した3つの関係について調べてみる．

§1. Branching

定義 1.1. M を oriented, connected, closed $(n+2)$-manifold，k を n-sphere とするとき locally flat pair (M, k) を n-knot という．$\mathcal{N}\mathcal{K}^n$ を n-knot 全体の集合とする．□

Lemma 1.2. (Kato [7] Wall [10])　(M, k) を n-knot とすると，k は $S^n \times D^2$ と同相な regular neighborhood をもち，k は $S^n \times$

0（0 は D^2 の中心）に対応する．□

K の exterior を $E(K)$ とかくと，この Lemma により同相写像 $\nu: S^n\times S^1 \to \partial E(K)$ が存在する．

[11, Lemma 2] と同様にして次の Lemma を得る．

Lemma 1.3. $K\in NK^n$, $n\geq 1$. $\nu: S^n\times S^1\to\partial E(K)$ を上の同相写像で，$H_1(E(K);\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}(\mu) + A$ とする　μ は meridian loop $\nu(*\times S^1)$ に対応する生成元で，A は Abel 群．$g_m: H_1(E(K);\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}_m$ を $g_m(\mu)=+1$, $g_m(a)=0$ $(a\in A)$ で与えられる epimorphism とする．$n\geq 2$ のとき，g_0 を表現する map $p: E(K)\to S^1$ で，$p\nu: S^n\times S^1 \to S^1$ が射影となっているものが存在する．$n=1$ のときは同相写像 $\nu': S^n\times S^1\to\partial E(K)$ で，同じ性質をみたすものが存在する．□

定義 1.4. Lemma 1.3 の条件をみたす n-knot 全体を BK^n とかき，pair (ν, p) $n\geq 2$ $((\nu', p)$ $n=1)$ を K の projection とよぶ．□

定義 1.5. $K=(M,k)\in BK^n$, (ν, p) を K の projection とする．$E(K)$ の a-fold cyclic covering を $E_a(K)=\{(y,\theta)\in E(K)\times S^1 \mid p(y)=a\theta\}$ とする．これは $\pi_1(E(K)) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_1(E(K);\mathbb{Z}) \xrightarrow{g_a} \mathbb{Z}_a$ に関する covering である．$\nu_a: S^n\times S^1 \to \partial E_a(K)$ を $\nu_a(x,\theta) = (\nu(x, a\theta), \theta)$ で定義された同相写像，$p_a: E_a(K)\to S^1$ を $p_a(x,\theta)=\theta$ で定義された map とすると $B_a(K) = (S^n\times D^2 \underset{\nu_a}{\cup} E_a(K),\ S^n\times 0) \in BK^n$ で，

projection (ν_a, p_a) をもつ．□

次の性質は明らかである．

Proposition 1.6. $K, K_1, K_2 \in BK^n$, $n \geqq 1$.

(i) $B_1(K) = K$, (ii) $B_{ab}(K) = B_a(B_b(K))$, (iii) $B_a(K_1 \# K_2) = B_a(K_1) \# B_b(K_2)$.

□

定義 1.7. $K = (M, k) \in NK^n$, $n \geqq 2$. $\nu : S^n \times S^1 \to \partial E(K)$ を同相写像，$t : S^n \times S^1 \to S^n \times S^1$ を $t(x, \theta) = (\rho_\theta(x), \theta)$，($\rho_\theta$ は S^n の S^{n-2} に関する回転）で与えられた同相写像とするとき，$K^* = (S^n \times D^2 \underset{\nu t}{\cup} E(K),\ S^n \times 0) \in NK^n$ を K の Gluck surgery で得られた knot という．□

$E(K)$ と同相な exterior をもつ knot は，K または K^* であることが知られている．[4, 2, 8]

また，$K \in BK^n$ で，(ν, p) を projection とすると，$K^* \in BK^n$ で，$(\nu t, p)$ がその projection である．

Proposition 1.8. $K_1, K_2 \in NK^n$, $n \geqq 2$.

$(K_1 \# K_2)^* = K_1^* \# K_2^*$. □

（証明） $S^n = D^n_+ \cup D^n_-$，$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1 \}$，$D^n_+ = \{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \geqq 0 \}$，$D^n_- = \{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_{n+1} \leqq 0 \}$，$r : D^n_\pm \to D^n_\mp$ を reflection $r(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \cdots, x_n, -x_{n+1})$，$K_i = (S^n \times D^2 \underset{\nu_i}{\cup} E(K_i),\ S^n \times 0) \in NK^n$, $n \geqq 2$，$\nu_{i\pm} = \nu_i | D^n_\pm \times S^1$ とする．($i = 1, 2$)

$E(K_1 \# K_2) = E(K_1) \underset{\nu_{1+} \cup \nu_{2-}}{\cup} E(K_2)$ とすると，$K_1 \# K_2 = (S^n \times D^2 \underset{\nu_{1+} \cup \nu_{2-}}{\cup} E(K_1 \# K_2),\ S^n \times 0)$ となる．$t_\pm = t | D^2_\pm \times S^1$ とすると，$(\nu_i t)_\pm = \nu_{i\pm} t_\pm$ なので，$(\nu_1 t)_+ \cup (\nu_2 t)_- = (\nu_{1+} \cup \nu_{2-}) t$，$(\nu_2 t)_+ \cup (\nu_1 t)_-^{-1} = \nu_2 \cup \nu_1^{-1}$ となり Proposition が示される．□

Proposition 1.9. $K \in BK^n$, $n \geqq 2$.

$$B_a(K^*) = \begin{cases} B_a(K)^* & a : \text{odd}, \\ B_a(K) & a : \text{even} \end{cases}$$ □

§2. Twisting

定義 2.1. Proposition 1.8 の notation を使う．$K = (M, k) \in BK^n$ に対して $\mathring{K} = (\mathring{M}, \mathring{k}) = (D^n_+ \times D^2 \underset{\nu_+}{\cup} E(K),\ D^n_+ \times 0)$ は disk pair であるが，これを K に関する disk knot と呼ぶ．□

定義 2.2. $K = (M, k) \in BK^n$，$B_a(K) = (M_a, k_a)$，$\tau_a : M_a \to M_a$ を covering translation，i.e. $\tau_a : S^n \times D^2 \to S^n \times D^2$ は，$\tau_a(x, (r, \theta)) = (x, (r, \theta - \frac{1}{a}))$，$\tau_a : E_a(K) \to E_a(K)$ は，$\tau_a(y, \theta) = (y, \theta - \frac{1}{a})$ で定義されているとする．$B_a(\mathring{K}) = (B_a(K))^\circ = (\mathring{M}_a, \mathring{k}_a)$ に対して，$\mathring{\tau}_a = \tau_a | \mathring{M}_a$ と定義する．$\partial B_a(\mathring{K}) = (\partial \mathring{M}_a, \partial \mathring{k}_a)$ は，trivial $(n+1)$-knot なので，$\mathring{\tau}_a | \partial \mathring{M}_a$ は軸 $\mathring{k}_a$ に関する回転 $\rho_{\frac{1}{a}}$ と考えられる．$\partial \mathring{M}_a \times [0, 1] \hookrightarrow \mathring{M}_a$ を $\partial \mathring{M}_a \times 0$ を $\partial \mathring{M}_a$ に同一視するような collar とする．$\sigma_a : \mathring{M}_a \to \mathring{M}_a$ を次のように定義する：collar の complement においては $\sigma_a = \mathring{\tau}_a$，collar では，

$$\sigma_a(x,s)=\begin{cases}(x,s) & x\in\partial\mathring{M}_a,\ 0\leqq s\leqq \frac{1}{3},\\ (\rho_{(3s-1)/a}(x),s) & \text{〃}\quad \frac{1}{3}\leqq s\leqq\frac{2}{3},\\ (\rho_{1/a}(x),s) & \text{〃}\quad \frac{2}{3}\leqq s\leqq 1.\end{cases}$$

特に $\sigma_1=\sigma$ とかく。□

定義 2.3. $K=(M,k)\in \mathcal{BK}^n$, $n\geqq 1$. K の a-twist spin を次で定義する： $T_a(K)=(\mathring{M}\times_{\sigma^a}S^1,\ \mathring{k}\times_{\sigma^a}S^1)/\sim$, 但し, $(x,\theta)\sim(x,0)$, $\forall x\in\partial\mathring{M}$, $\forall\theta\in S^1$. □

このように一般化しても，次の Goldsmith - Kauffman の interchanging theorem [5, Theorem 1.10] が成り立つ.

Proposition 2.4. $K=(M,k)\in\mathcal{BK}^n$, $n\geqq 1$, $T_1(K)=(M_{\langle 1\rangle},k_{\langle 1\rangle})$ とすると triple の間の同相写像 $h:(M_{\langle 1\rangle},\partial\mathring{M},k_{\langle 1\rangle})\to(M_{\langle 1\rangle},k_{\langle 1\rangle},\partial\mathring{M})$ が存在する. □

従って [5] の多くの twist spin に関する結果が成り立つ. ここでは Zeeman の fibration theorem [11, Main Theorem] と, [5] の主定理を挙げる.

Proposition 2.5. (c.f. [5, Lemma 7.4]) $K\in\mathcal{BK}^n$, $n\geqq 1$, $a>0$ とする. $T_a(K)$ は fibered $(n+1)$-knot で, fiber は $\mathring{M}_a$ で, monodromy は, τ_a である. □

Proposition 2.6. ([5, Theorem ∗], cf. [3, Theorem 6]) $K\in\mathcal{BK}^n$, $n\geqq 1$, $a,b>0$, $g=\mathrm{g.c.d}(a,b)$ とする.

$$|B_a T_b(K)| \underset{\text{同相}}{\cong} \begin{cases} |B_0 T_g(K)| , & ab : \text{even}, \\ |B_g T_g(K)| , & ab : \text{odd} \end{cases}$$

但し，$K=(M,k)$に対して，$|K|=M$， fiber が F, monodromy が h の fibered knot K に対して，$B_0(K)$を，fiber が F, monodromy が identity の fibered knot で定義する．□

Proposition 2.7. ([5, Theorem **]) Proposition 2.6 と同じ条件の下で，

$$T_a T_b(K) = \begin{cases} T_g T_0(K) , & ab : \text{even}, \\ T_g T_g(K) , & ab : \text{odd}. \end{cases} \quad \square$$

Proposition 2.5 より次の Proposition を得る．

Proposition 2.8. ([5, Theorem 7.6], cf. [9]) $K \in \mathcal{B}K^n$, $n \geq 1$, $a, b > 0$. $B_{a+b} T_a(K) = (B_b T_a(K))^*$. □

Proposition 2.9. $K \in \mathcal{B}K^n$, $n \geq 1$. $a \geq 0$, $b > 0$.

$$T_a B_b(K) = B_b T_{ab}(K) \quad \square$$

Remark. $ab \neq 0$ ならば，この knot は fiber が $\dot{M}_{ab}$ で，monodromy が τ_{ab}^{b} の fibered knot である．□

§3. Cabling

定義 3.1. $K \in \mathcal{N}K^n$, O : trivial n-knot, $n \geq 2$, とする．$O=(S^{n+2}, S^n)$ に対して，l を $lk(S^n, l)=a$ となるような単純閉曲線とする． V を l の tubular neighborhood とする．$h: S^{n+2} - \mathrm{int}\, V \to N(K)$ を同相写像とする．K 関する a-

Cable knot を次で定義する： $\Gamma_a(K) = (M, h(S^n))$. □

次の性質は [6] と同様にして示される.

Proposition 3.2. $K, K_1, K_2 \in NK^n$, $n \geqq 2$.

(i) $\Gamma_0(K) = 0$, (ii) $\Gamma_1(K) = K$, (iii) $\Gamma_{ab}(K) = \Gamma_a \Gamma_b(K)$,

(iv) $\Gamma_a(K_1 \# K_2) = \Gamma_a(K_1) \# \Gamma_a(K_2)$,

(v) $$\Gamma_a(K)^* = \begin{cases} \Gamma_a(K) & a : \text{even}, \\ \Gamma_a(K^*) & a : \text{odd}. \end{cases}$$ □

Theorem 3.3. $K \in BK^n$, $n \geqq 2$, $g.c.d.(r, s) = 1$ とする.

$$B_{gr}\Gamma_{gs}(K) = \begin{cases} g\Gamma_s B_r(K)^* & g : \text{even}, \ r, s : \text{odd}, \\ g\Gamma_s B_r(K) & \text{otherwise}. \end{cases}$$

但し $gK = \underbrace{K \# \cdots \# K}_{g}$. □

この Theorem は, [6] の Theorem の一般化である.

Remark. NK^n, BK^n の knot は, # に関して可換半群をなすが, B_a, Γ_a, T_a, $*$, は半群の準同型写像とみなすことができる.

References

1. Artin, E.: Zur Isotopie zweidimensionaler Flächen im R_4. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4 (1925) 174-177.

2. Browder, W.: Diffeomorphisms of 1-connected manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967) 155-163.

3. Giffen, C. H.: The generalized Smith conjecture. Amer. J. Math. 88 (1966) 187-198.

4. Gluck, H.: The embedding of two-spheres in the four-sphere. Trans. Amer. Math. Soc. 104 (1962) 308-333.

5. Goldsmith, D. L. and Kauffman, L. H.: Twist spinning revisited. Trans. Amer. Math. Soc. 239 (1978) 229-251.

6. Kanenobu, T.: Higher dimensional cable knots and their finite cyclic covering spaces. to appear.

7. Kato, M.: Combinatorial prebundles Part II. Osaka J. Math. 4 (1967) 305-311.

8. Kato, M.: A concordance classification of PL homeomorphisms of $S^p \times S^q$. Topology 8 (1969) 371-383.

9. Viro, O. Ya.: Nonprojecting isotopies and knots with homeomorphic coverings. J. Soviet Math. 12 (1979) 86-96.

10. Wall, C.T.C.: Locally flat PL submanifolds with codimension two. Proc. Camb. Phil. Soc. 63 (1967) 5-8.

11. Zeeman, E. C.: Twisting spun knots. Trans. Amer. Math. Soc. 115 (1965) 471-495.