数理解析研究所講究録
第518巻 1984年 21-37

On Sapphire Spaces

神戸大 理 森元勘治 (Kanzi Morimoto)

二つのSolid toriをその境界で同一視して得られる三次元多様体をLens spaceと呼び、Solid torusとKlein bottle上のtwisted I-bundleをその境界で同一視して得られる三次元多様体をPrism manifoldと呼ぶことはよく知られている。

本稿では、二つのKlein bottle上のtwisted I-bundleをその境界で同一視して得られる三次元多様体をSapphire spaceと呼び、この多様体のtopological typeを分類し、構造や性質を考察する。

§1 Sapphire spacesの定義と分類

KをKlein bottleとし、KIをK上のtwisted I-bundleとする。KIは二通りのSeifert fibrations $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$を持つ。ここで$\mathfrak{F}_1$のorbit manifoldはindex 2のexceptional pointを二つ持つdisk、$\mathfrak{F}_2$のorbit manifoldはexceptional pointを持た

ない、Möbius band である。(c.f. Ch. VI of [4])

1.1 Lemma　Aを KI に proper に埋め込まれた、essential annulus とする。Aは $\mathfrak{F}_1$ 又は $\mathfrak{F}_2$ に saturated な annulus に ambient isotopic である。$\mathfrak{F}_1$ のとき type I、$\mathfrak{F}_2$ のとき type II と呼ぶ。

証明　[4]の Therem VI.34 より直ちに従う。

$S^1=\{e^{i\theta} \mid \theta\in R^1,\ e^{i\theta_1}=e^{i\theta_2}$ iff $\theta_1\equiv\theta_2 \pmod{2\pi}\}$ を複素平面上の単位円周とし、$F=S^1\times I$ とおく(但し $I=[0\ 1]$)。
$f:F\to F$: homeo. を、$f(e^{i\theta},t)=(e^{-i\theta},1-t)$ で定義する。
$F\times I$ において $(x,0)\in F\times\{0\}$ と $(f(x),1)\in F\times\{1\}$ を同一視する関係を $\sim$ と書けば、$KI\cong F\times I/\sim$ である(但し $\cong$ は同相を表わす)。

以下で KI 上の三つの self-homeomorphism を定義する。

① $T:KI\to KI$　$((e^{i\theta},t),u)\in F\times I/\sim$ に対して

$$T((e^{i\theta},t),u)=((e^{i(\theta+2\pi u)},t),u)$$

② $S:KI\to KI$　$((e^{i\theta},t),u)\in F\times I/\sim$ に対して

$$S((e^{i\theta},t),u)=((e^{-i\theta},t),u)$$

③ $R:KI\to KI$　$((e^{i\theta},t),u)\in F\times I/\sim$ に対して

$$R((e^{i\theta},t),u)=((e^{i\theta},t),1-u)$$

即ち、T は twist、S は type I の annulus についての折り

返し、Rはtype IIのannulusについての折り返しである。

Xを位相空間とする。Xの全てのself-homeo. からなる群の、identityにisotopicなhomeo.全体からなる部分群による剰余類群をXのhomeotopy groupと呼び$\mathcal{H}(X)$と書く。

1.2 Proposition　$\mathcal{H}(KI) \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$　ここで$\mathbb{Z}_2$は位数2の巡回群、生成元はTとSとRである。

略証　AをKI内のtype IIのannulusとし、hをKIのself-homeo.とする。KIのisotopyによって$h(A)=A$とでき、さらに、S又はRを合成して、A上でidentityとできる。故にKIをAで切り開くことにより結論を得る。

∂KI上のsimple loopで$\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$にsaturatedなものをそれぞれα, βとする。$\pi_1(\partial KI) \cong \langle\alpha\rangle \oplus \langle\beta\rangle$　である。今、K_1IとK_2Iを二つのKIとする。$i=1,2$に対して

$\pi_1(\partial K_iI) \cong \langle\alpha_i\rangle \oplus \langle\beta_i\rangle$　　$\pi_1(K_iI) \cong \langle l_i, m_i \mid l_i m_i l_i^{-1} = m_i^{-1}\rangle$

である。ここで、α_i, β_iはα, βに対応し、l_i, m_iはK_i上のsimple loopsで、α_iとl_i^2、β_iとm_iがhomotopicとなるものである。

$G.L.(2,\mathbb{Z}) = \{(r\,s\,t\,u) \mid r,s,t,u \in \mathbb{Z},\ ru-st=\pm 1\}$ とおく。$(r\,s\,t\,u) \in G.L.(2,\mathbb{Z})$に対して$h: \partial K_2I \to \partial K_1I$: homeo.を$h(\alpha_2) = r\alpha_1 + s\beta_1$, $h(\beta_2) = t\alpha_1 + u\beta_1$で定義する。(但し$h$が導く基本群間の準同型

を再びhと書いた)。このとき、hによって$\partial K_1 I$と$\partial K_2 I$を同一視して得られる三次元多様体を$K(rstu)$と書き、type $(rstu)$のSapphire spaceと呼ぶ。

1.3 Proposition　$K(rstu)$はirreducibleであり、$\partial K_1 I = \partial K_2 I$はseparating incompressible torusである。

$$\pi_1(K(rstu)) \cong \left\langle \ell_1, m_1, \ell_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \ell_1 m_1 \ell_1^{-1} = m_1^{-1} \quad \ell_2^2 = \ell_1^{2r} m_1^s \\ \ell_2 \ell_1^{2t} m_1^u \ell_2^{-1} = m_1^{-u} \ell_1^{-2t} \end{array} \right\rangle$$

$$H_1(K(rstu)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_{4t} \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 & \text{if } s : \text{even} \\ \mathbb{Z}_{4t} \oplus \mathbb{Z}_4 & \text{if } s : \text{odd} \end{cases}$$

1.4 Lemma　TをKI内のincompressible torusとすれば、Tは∂-parallelである。

証明　[4]のTheorem Ⅵ.34より直ちに従う。

1.5 Lemma　Tを$K(rstu)$内のseparating incompressible torusとすれば、Tは以上の三つのtypesのtoriの一つにambient isotopicである。

① $\partial K_1 I = \partial K_2 I$

② $K_1 I \cap T$, $K_2 I \cap T$ 共にtype Iのannuli

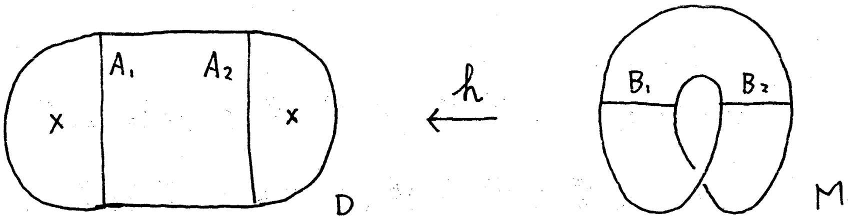
③ $K_1 I \cap T =$ 二つのtype Iのannuli、$K_2 I \cap T =$ 二つのtype

IIのannuli。又はこの逆。

略証　$K_1\mathrm{I}\cap T = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$、$K_2\mathrm{I}\cap T = B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_n$ A_i, B_iはそれぞれ$K_1\mathrm{I}$, $K_2\mathrm{I}$内のessential annulus $(n\geq 0)$としてよい。$n=0$のとき、明らかに①が成立。$n>0$のとき、A_i, B_i共にtype Iならば②が成立、A_iとB_iのtypeが異なれば③が成立する。共にtype IIとはならない。

1.6 Lemma　Tを$K(rstu)$内の、Lemma 1.5における③のtorusとする。このとき$K(rstu)$のself-homeo.でTを$\partial K_1\mathrm{I}$へうつすものが存在する。

略証　一般性を失わずに、$K_1\mathrm{I}\cap T=A_1\cup A_2$をtype I、$K_2\mathrm{I}\cap T=B_1\cup B_2$をtype IIとしてよい。$\partial B_1$の一つのcomponentを$\beta_2$、$\partial A_1$の一つのcomponentを$\alpha_1$とみなせば、$h:\partial K_2\mathrm{I}\to\partial K_1\mathrm{I}$において$h(\beta_2)=\alpha_1$とおける。故に$K(rstu)=K(r110)$とおける。$D$と$M$をそれぞれdiskとMöbius bandとし、$P_1:K_1\mathrm{I}\to D$、$P_2:K_2\mathrm{I}\to M$を$\mathcal{F}_1$と$\mathcal{F}_2$のfibrationのprojectionとする。$P_1(A_1\cup A_2)$と$P_2(B_1\cup B_2)$に注目すれば、Tは$K(r110)$を二つのKIに切り開き、その同一視は$(r110)$とみなせることがわかる。



1.7 Theorem $A, A' \in G.L.(2.\mathbb{Z})$ $B=(1\ 0\ 0\ -1)$
$K(A)$, $K(A')$ 二つのSapphire spacesとする。
$K(A)$と$K(A')$が同相である為の必要十分条件は、A'が $\pm A^{\pm1}$ $\pm BA^{\pm1}$, $\pm A^{\pm1}B$, $\pm BA^{\pm1}B$, のうちの一つに等しいことである。

略証 $K(A)=K_1I \cup K_2I$ $h: \partial K_2I \to \partial K_1I$ 、$K(A')=K_1'I \cup K_2'I$ $h': \partial K_2'I \to \partial K_1'I$、とする。$h=A$, $h'=A'$ である。

まず、A'が上記行列のうちの一つ、たとえば$-A^{-1}B$に等しいとする。 $S: K_1'I \to K_2I$とおけば、$S|_{\partial K_1'I}=B$ であるから、$h \circ S|_{\partial K_1'I} \circ h' : \partial K_2'I \to \partial K_1I$ は $A'BA=-A^{-1}BBA=(-1\ 0\ 0\ -1)$ となり、これは $S \circ R: K_2I \to K_1I$ へ拡張されて、$K(A) \cong K(A')$を得る。その他の場合も同様である。

逆に、$f: K(A) \to K(A')$: homeo. のとき、$f(\partial K_1I)$が$\partial K_1'I$に重ならすことができれば明らか。そうでないとき、1.5 Lemmaと1.6 Lemmaより、$f(\partial K_1I)$は1.5 Lemmaにおける②のtorusとしてよく、このとき $A=(\varepsilon_1\ 0\ t\ \varepsilon_2)$、$A'=(\varepsilon_1'\ 0\ t'\ \varepsilon_2')$ ($\varepsilon_i=\pm1$, $\varepsilon_i'=\pm1$, $i=1.2$) とおけるが、$H_1(K(A))=H_1(K(A'))$ より$|t|=|t'|$。故に結論を得る。

次の定理は Homology groupの計算と、Ch. 12 of [3]より直ちに従う。

1.8 Theorem $K(r\ s\ t\ u)$ がcircle上のtorus bundleである為の必要十分条件は $t=0$ である。このとき

monodromy は $(-1\ S\ 0\ -1)$ となる。

次の定理は、[4]の Theorem VI.34 と KI の Seifert fibration より直ちに従う。

1.9 **Theorem** $K(r\,s\,t\,u)$ が Seifert fibered space となる為の必要十分条件は、r, s, t, u のうちの一つが 0 となることである。またその orbit manifold は以下となる。

$s=0 \Leftrightarrow$ index 2 の exceptional points を4点持つ 2-Sphere

$r=0$ 又は $u=0 \Leftrightarrow$ index 2 の exceptional points を2点持つ projective plane

$t=0 \Leftrightarrow$ exceptional point を持たない Klein bottle

§2 Sapphire Spaces の Heegaard genus

V を Solid torus とし、$\pi_1(\partial V) \cong \langle \ell \rangle \oplus \langle m \rangle$ (meridian loop) とする。また $\pi_1(\partial KI) \cong \langle \alpha \rangle \oplus \langle \beta \rangle$ である。coprime integers (p, q) に対して $h: \partial V \to \partial KI$ を $h(m) = p\alpha + q\beta$ で定義し、この h によって ∂V と ∂KI を同一視して得られる三次元多様体を $M(p, q)$ と書く。これは

type (p,q) のPrism manifoldと呼ばれる。(c.f. [1], [4], [5])

2.1 Lemma ① $M(p,q)$ はgenus 2 のHeegaard splittingを持つ。② $M(p,q)$ がgenus 1 のHeegaard splittingを持つ為の必要十分条件は $|q|=1$ である。

証明 ①は定義よりすぐわかる。②は [5] Theorem 2 より従う。

2.2 Lemma Mをsapphire spaceとし、KをM内のKlein bottleとし、N(K)をKのregular neighborhoodとする。$N(K) \cong KI$ かつ $Cl(M-N(K)) \cong KI$ である。(但し $Cl(\cdot)$ は閉包)

証明 Mがorientableかつirreducibleであることと§1の結果を用いれば直ちに結論を得る。

2.3 Lemma k を S^3 内のtame knot $N(k)$ を k のregular neighborhood、$M(k) = Cl(S^3 - N(k))$ とする。μ_1, μ_2 を $\partial M(k)$ 上の交わらない k のmeridian loopsとし、μ_1, μ_2 を $M(k)$ の内部へ押し込んだsimple loopsを $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ とする。二つのintegers p_1, p_2 に対して $M(k)$ を $\bar{\mu}_i$ に沿って p_i/q_i surgery(但し q_i は p_i と互いに素なinteger c.f. ch.9 of [7])して得られる三次元多様体を M_1 とすれば、$H_1(M_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{G(p_1, p_2)}$ である。ここで

$G(P_1, P_2)$はP_1とP_2の最大公約数である。

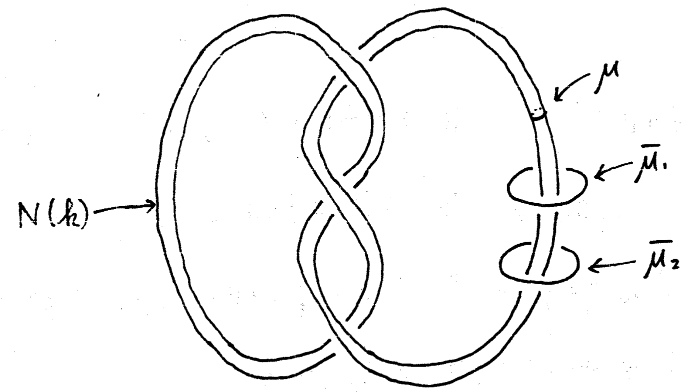
証明　Mayer-Vietoris の完全系列を用いて簡単に計算することができる。

さて、ここでKlein bottleを含むclosed orientable 3-manifolds の三つの族を与える。

C(1)　kをS^3内の2-bridge knot (c.f. Ch4 of [7]) とし（但しtrivial knotも許す）、$N(k)$をkのregular neighborhood、$M(k) = Cl(S^3 - N(k))$とする。μ, μ_1, μ_2を$\partial M(k)$上の三つの交わらないkのmeridian loopsとし、μ_1, μ_2を$M(k)$の内部へ押し込んだsimple loopsを$\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$とする。M_1を$\bar{\mu}_1$と$\bar{\mu}_2$に沿ったDehn surgeriesを行って$M(k)$から得られる3-manifoldとする。このとき、βをμに移すhomeo.により∂KIと∂M_1を同一視して得られる3-manifolds全体の族をC(1)とおく。

C(2)　kをS^3内の2-bridge knotとし（但しtrivial knotも許す）、$N(k)$をkのregular neighborhood、$M(k) = Cl(S^3 - N(k))$とする。μ, μ_1を$\partial M(k)$上の二つの交わらないkのmeridian loopsとし、μ_1を$M(k)$の内部に押し込んだsimple loopを$\bar{\mu}_1$とする。M_1を$\bar{\mu}_1$に沿ったDehn surgeryを行って$M(k)$から得られる3-manifoldとする。このとき、αをμに移すhomeo.により∂KIと∂M_1を同一視して得られる3-manifolds

全体の族をC(2)とおく。



C(3)　LをLens space とする。$L = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$ ここでV_iはsolid torusである。kをL内の1-bridge knotとする。即ち$i=1,2$に対して$(V_i, V_i \cap k)$は$(A \times I, P \times I)$に対として同相である。ここでAはannulus、PはAの内部のある点である。N(k)をkのregular neighborhoodとし、$M(k) = Cl(L - N(k))$とし、μを$\partial M(k)$上のkのmeridian loopとする。このとき、αをμに移すhomeo.により∂KIと$\partial M(k)$を同一視して得られる3-manifolds全体の族をC(3)とおく。

2.4 Lemma (Theorem 2 of [6])　MをKlein bottleを含むclosed orientable 3-manifoldとする。Mがgenus 2のHeegaard splittingを持つ為の必要十分条件は、MがC(1)又はC(2)又はC(3)に属することである。

以上の準備によりSapphire spacesのHeegaard genusを決

めることができる。

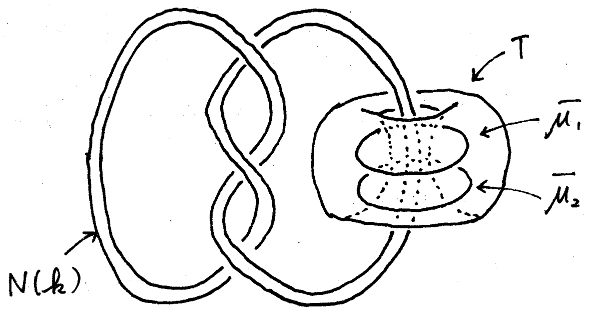
2.5 Theorem　K(rstu) を Sapphire space とする。

① K(rstu) は genus 3 の Heegaard splitting を持つ。

② K(rstu) が genus 2 の Heegaard splitting を持つ為の必要十分条件は $|s|=1$ である。

略証　①は定義よりすぐわかる。②の証明。K(rstu) が genus 2 の Heegaard splitting を持ったとする。2.4 Lemma より K(rstu) は C(1) 又は C(2) 又は C(3) に属する。

C(1) のとき。C(1) の定義における M_1 と KI によって $K(rstu) = M_1 \cup KI$ となる。2.2 Lemma より $M_1 \cong KI$ 故 $H_1(M_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$。一方 2.3 Lemma より $H_1(M_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{G(P_1,P_2)}$。故に $|P_2| \geqq 2$ となる。そこで T を M(k) 内の torus で $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$ を core とする solid torus を張る torus とすれば、$|P_2| \geqq 2$ より T は M_1 で incompressible。



1.4 Lemma より T は ∂-parallel となり、k は trivial knot となる。故に $|P_2|=2$ となって μ は M_1 を $\mathcal{F}_1$ とみたときの regular fiber となり $u=0$ を得る。即ち $|s|=1$ である。

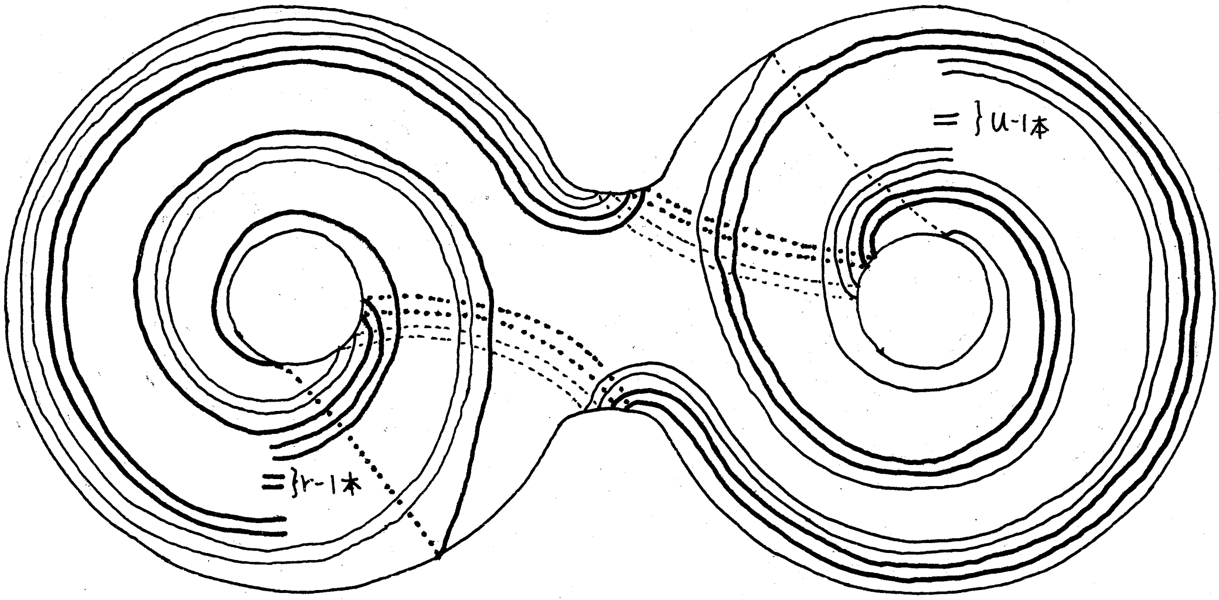
C(2) のとき。$H_1(M_1) \cong \mathbb{Z}$ となる故 Sapphire space は C(2) には属さない。

C(3)のとき。$L=V_1\cup V_2$をLens spaceとし、kをL内の1-bridge knot、$N(k)$をkのregular neighborhoodとすれば2.2 Lemmaより$cl(L-N(k))\cong KI$となる故LはPrism manifoldとなり、2.1 Lemmaと簡単な考察により$|s|=1$がわかる。

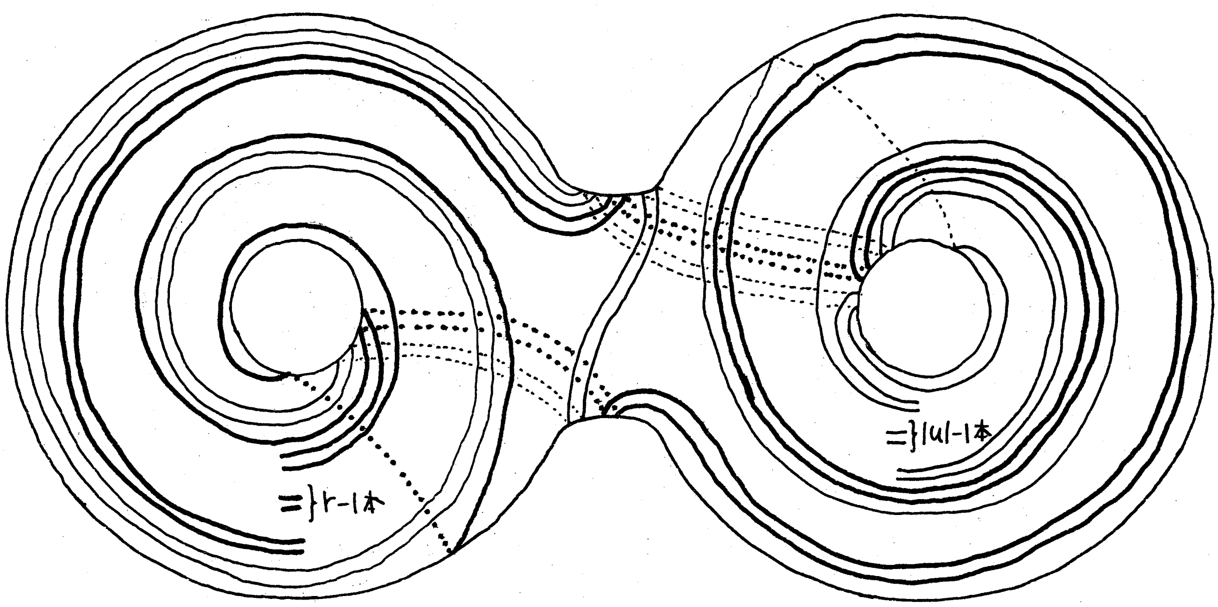
逆に$|s|=1$のとき。$K(rstu)=K_1I\cup K_2I$を、$\partial K_1I=\partial K_2I=T$とおき、$cl(K(rstu)-T\times I)=K_1I\cup K_2I$とみなして、$K(rstu)=K_1I\cup T\times I\cup K_2I$とみる。この分割を用いることにより、$|s|=1$に注意すれば、$K(rstu)$のgenus 2のHeegaard splittingを得る。

以上でSapphire spaceのHeegaard genusが分かったが、今genus 2のHeegaard splittingを持つものに注目する。$|s|=1$のとき、1.7 Theoremより$K(rstu)=K(r\ 1\ ru\text{-}1\ u)$とおける。このとき実際にgenus 2のHeegaard splittingを構成すればそのdiagramsは以下のようになる。

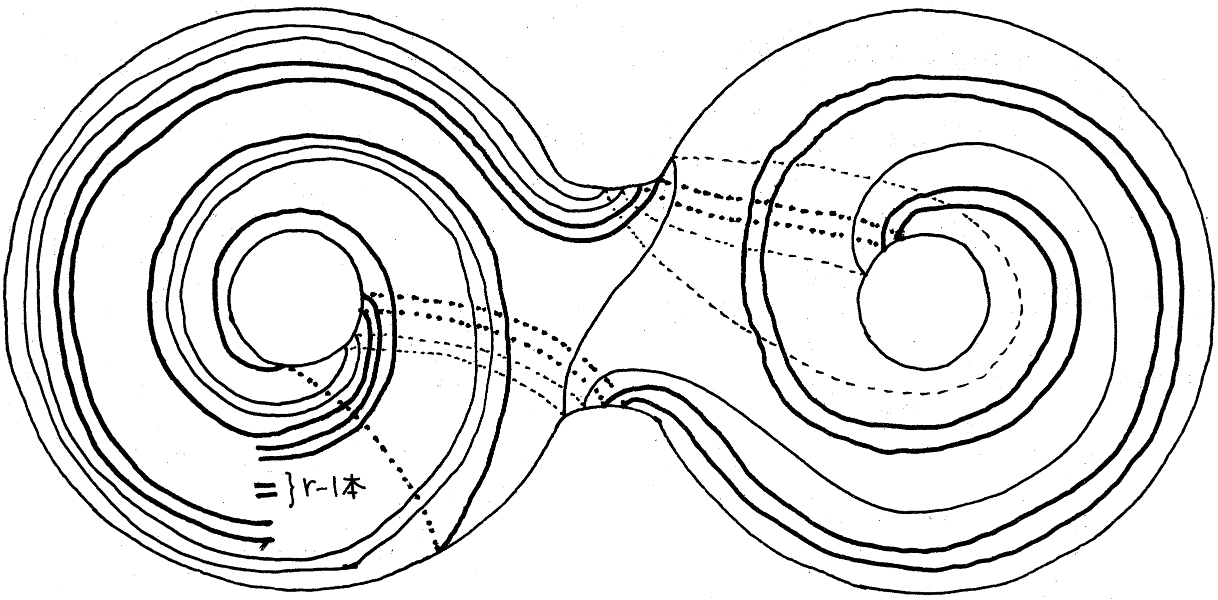
r>0 , u>0 のとき



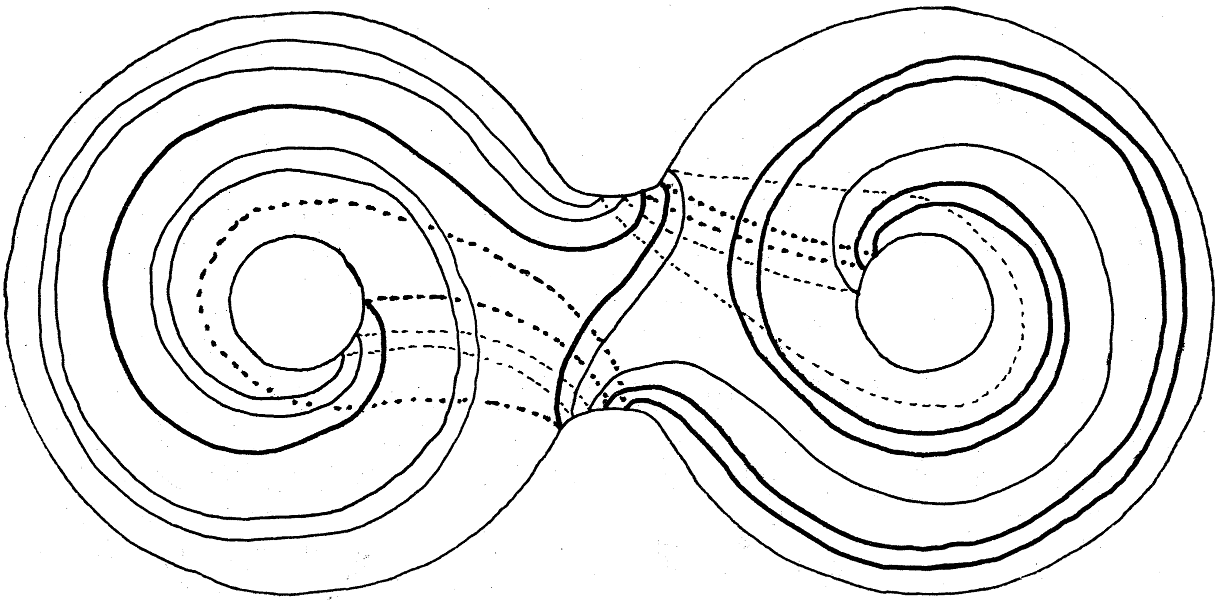
r>0 , u<0 のとき



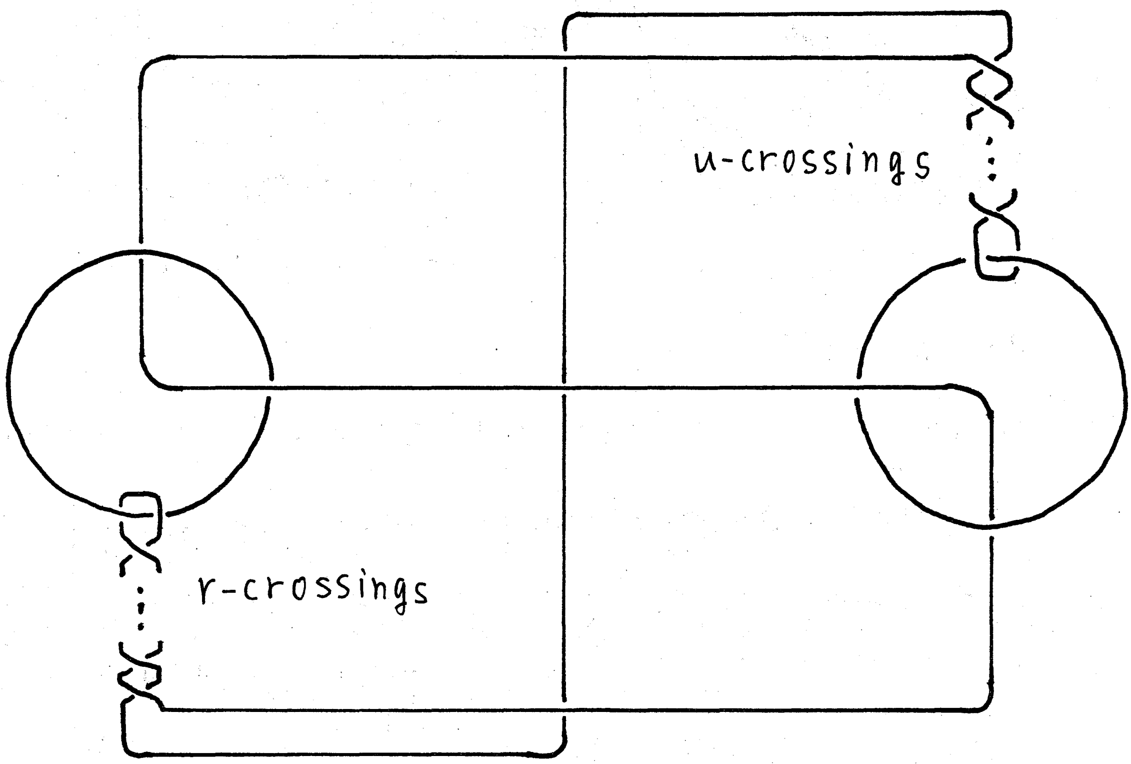
$r>0$, $u=0$ のとき



$r=u=0$ のとき



さて、[2],[8],[9]より、genus 2のHeegaard splittingを持つclosed orientable 3-manifoldはS^3内のあるlinkに沿ってbranchするS^3の2-fold branched covering spaceになる。故に[8]の方法によってそのlinkを構成すれば、K(r1 ru-1u)は下のlinkに沿ってbranchするS^3の2-fold branched covering spaceである。



特にr=u=0のとき。K(0110)はBorromean ringsに沿ってbranchするS^3の2-fold branched covering spaceとなるが、このlinkがperiod 3の周期を持つことを利用すれば、K(0110)はfigure eight knotに沿ってbranchするS^3の3-fold cyclic branched covering spaceとなることがわかる。

—— References ——

[1] K. Asano : Homeomorphisms of Prism manifolds Yokohama Math. J. vol 26 (1978) 19~25

[2] J. S. Birman and H. M. Hilden : Heegaard splitting of branched coverings of S^3, Trans. Amer. Math. Soc. vol 213 (1975) 315~352

[3] J. Hempel : 3-manifolds, Ann. of Math. Studies No. 86 Priceton N. J., Princeton University Press 1976

[4] W. Jaco : Lectures of three manifold topology, Conference board of Math. Science, Regional Conference Series in Math. No. 43 1980

[5] P. K. Kim : Some 3-manifolds which admit Klein bottle, Trans. Amer. Math. Soc. vol 244 (1978) 299~312

[6] K. Morimoto : Klein bottles in genus two 3-manifolds, pre print

[7] D. Rolfsen : Knots and Links, Mathematics Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley, Ca, 1976

[8] M. Takahashi : An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's Theorem, Tsukuba J. Math. vol 2 (1978) 27~34

[9] O. Ja. Viro : Linkings, Two-sheeted branched coverings and Braids, Math. sb. 87 (129) (1972) 216~228 = Math. USSR sb. 16 (1972) 223~236