数理解析研究所講究録
第518巻 1984年 75-85

Irregular 3-fold coverについて

神戸大理 細川藤次 (Fujitsugu Hosokawa)
神戸大理 中西康剛 (Yasutaka Nakanishi)

orientable closed 3-manifoldはすべて3次元球面内のあるknotで分岐するirregular 3-fold coverとして表現できることは、すでによく知られている。そこで、3次元球面内に具体的にknotを与え、そこで分岐するirregular 3-fold coverはどうなるか？は興味あることである。

ここでは、pretzel knotについて考えてみよう。

3次の対称群$\mathcal{S}_3$において、

$$a=(0,1),\quad b=(0,2),\quad c=(1,2)$$

$$x=(0,1,2),\quad y=(0,2,1)$$

とすると、次の関係が成り立つ。

$$a^2=b^2=c^2=1,$$

$$ab=bc=ca=x,\quad ba=ac=cb=y$$

特に、次の関係が成立することに注意する。

$$aba^{-1}=c,\quad aca^{-1}=b,\quad axa^{-1}=y,\quad aya^{-1}=x$$

$$bab^{-1}=c,\quad bcb^{-1}=a,\quad bxb^{-1}=y,\quad byb^{-1}=x$$
$$cac^{-1}=b,\quad cbc^{-1}=a,\quad cxc^{-1}=y,\quad cyc^{-1}=x$$
$$xax^{-1}=b,\quad xbx^{-1}=c,\quad xcx^{-1}=a,\quad xyx^{-1}=y$$
$$yay^{-1}=c,\quad yby^{-1}=a,\quad ycy^{-1}=b,\quad yxy^{-1}=x$$

これは、knot group から $\mathfrak{S}_3$ への準同型写像 φ に対し、ある種の制約を与えることがわかる。

さて、knot group G の Wirtinger presentation を考える。つまり、G の表示

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n; r_1, r_2, \cdots, r_{n-1} \rangle$$

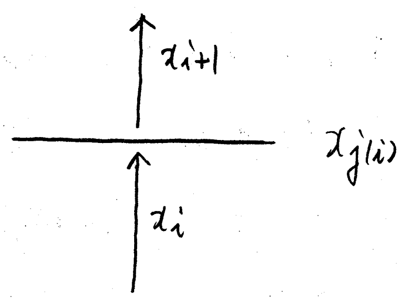
において、各 relator r_i は、

右のような交叉点で

$$r_i = x_{j(i)}^{\varepsilon}\, x_i\, x_{j(i)}^{-\varepsilon}\, x_{i+1}^{-1}, \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

の形をしている。



このとき、上の $\mathfrak{S}_3$ における関係より、次のことが成り立つ。

Proposition 1

$$\langle x_1, x_2, \cdots, x_n ; r_1, r_2, \cdots, r_{n-1} \rangle$$

を knot group G の Wirtinger presentation とする。このとき、G から3次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ への準同型写像 φ があれば、次の (1), (2), (3) のいずれか1つをみたす。

(1) $\varphi(x_i) = a$ または b または c $\quad (i = 1, 2, \cdots, n)$

(2) $\varphi(x_i) = x$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

(3) $\varphi(x_i) = y$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

同じように考えて，3次元球面内の link に対しても、次のことが言える。

Proposition 2

$$\langle x_{11}, \cdots, x_{1n_1}, \cdots\cdots, x_{\mu 1}, \cdots, x_{\mu n_\mu} ; r_1, \cdots\cdots, r_m \rangle$$

を μ components の link の group の Wirtinger presentation とする。ただし，$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{in_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ は link の1つの component に対応する生成元とする。

このとき，この群から3次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ への準同型写像 φ があるとすると，$1 \leqq i \leqq \mu$ なる各 i に対して，次の(1)か(2)をみたす。

(1) $\varphi(x_{ij}) = a$ または b または c $(j = 1, 2, \cdots, n_i)$

(2) $\varphi(x_{ij}) = x$ または y $(j = 1, 2, \cdots, n_i)$

すべての生成元が φ によって a に対応するような場合には、この φ に対応して生まる branched cover は 2 fold regular cover となる。

また，すべての生成元が φ によって x に対応する場合には、この φ に対応して生まる branched cover は 3-fold regular cover となる。

したがって, irregular 3-fold cover を考えるには、φ は Proposition の (1) の場合で, $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$ となる生成元 x_i, x_j が存在するようなときを調べればよい。

さて, twist の所における各 x_i の φ による対応の様子を調べてみよう。

図には、φ による像を書くことにすると、代表的な場合は次のようになる。

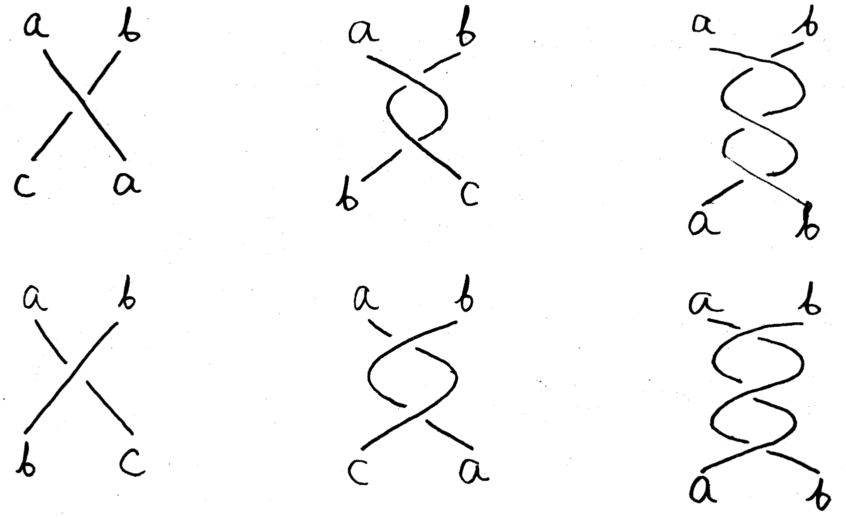
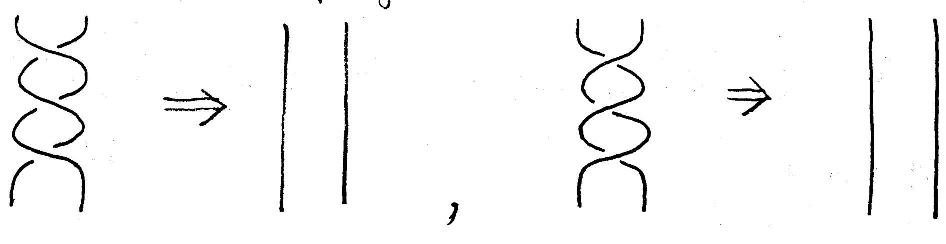


図 (1)

$a^2 = b^2 = c^2 = 1$ なので, knot の方向は無視してよい。

これによると, half twist 3回で, φ による像は変らない

そこで, knot の projection において,



のように，3回の half twist を解消する operation を考え，これを 3-half twist operation と呼ぶことにする。

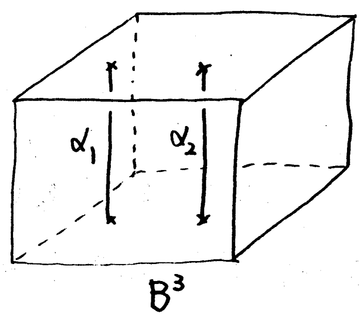
Proposition 3

L' を link L に対して，3-half twist operation によって得られた link とし，L, L' に対する link group を，それぞれ G, G' とする。

G から 3次の対称群 $\mathfrak{S}_3$ への準同型写像で，proposition 2 (1) をみたす φ があったとすると，G' から $\mathfrak{S}_3$ への準同型写像で proposition 2 (1) をみたす φ' がある。

L と L' の projection は 3-half twist operation をほどこした部分以外では同じであり，前ページの図からわかるように φ' を φ と同じ対応にとることができる。このようにとった φ' を φ から導かれる準同型写像ということにする。

さて，3-ball B^3 に proper に含まれる2本の線分 α_1, α_2 が，右の図のようになっている場合，これを trivial tangle という。



このとき，$B^3-\alpha_1\cup\alpha_2$ の基本群 $\pi_1(B^3-\alpha_1\cup\alpha_2)$ は階数2の自由群である。

この群の表示を $\langle x_1, x_2 ; \rangle$ とする。

このとき、準同型写像 $\varphi : \pi_1(B^3 - \alpha_1 \cup \alpha_2) \longrightarrow \mathcal{S}_3$ を

$$\varphi(x_1) = a, \quad \varphi(x_2) = b$$

とする。この φ に対応する B^3 の $\alpha_1 \cup \alpha_2$ で分岐する irregular 3-fold cover が 3-ball になることは容易にわかる。

この事実を使うと、次のことが容易に証明される。

Proposition 4

L' を link L に対して、3-half twist operation によって得られた link とし、link L, L' に対する link group をそれぞれ G, G' とする。

G から 3 次の対称群 $\mathcal{S}_3$ への準同型写像 φ が存在し、φ' を φ から導かれる G' から $\mathcal{S}_3$ への準同型写像とする。

更に、3-half twist operation の場所において、それぞれの線分に対応する G' の生成元の φ' による像は異なっていて、しかも a, b, c のどれかとする。

このとき、φ に対応して定まる L で分岐する 3 次元球面の irregular 3-fold cover と、φ' に対応して定まる L' で分岐する 3 次元球面の irregular 3-fold cover は、たがいに位相同型である。

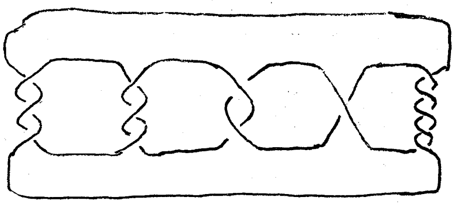
このことを使うと、pretzel knot の irregular 3-fold cover をすべて求めることができる。

Theorem 1

pretzel knot で分岐する irregular 3-fold cover は 3次元球面か, type $(p, 1)$, $(p \geqq 0)$, の lens space の connected sum である。

half twist の数が $p_1, p_2, \cdots, p_m$ である pretzel knot を $K(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ で表すことにする。

例



$K(3, 3, -2, -1, -5)$

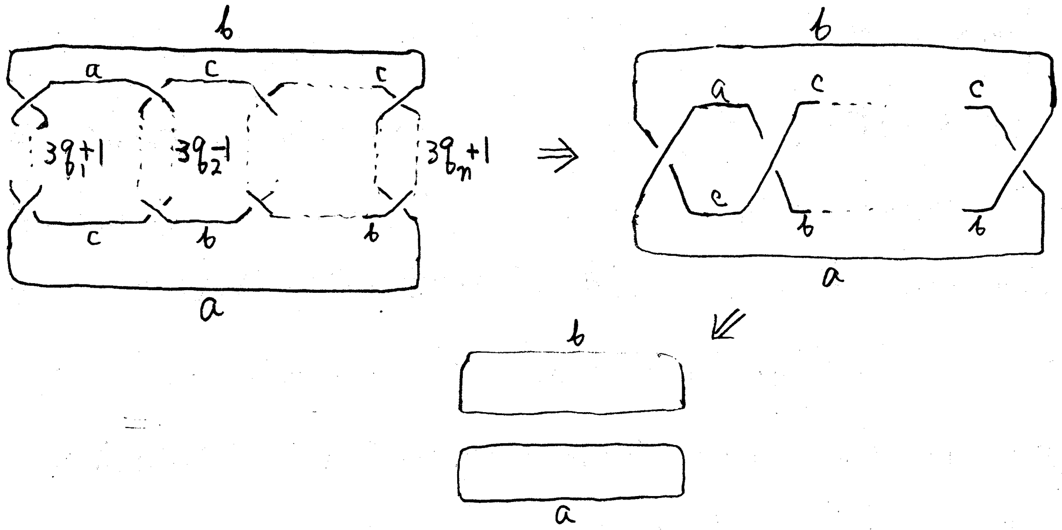
pretzel knot group から $\mathfrak{S}_3$ への準同型写像は、いつでも存在するとは限らない。

そこで、先ず、上、下の長い線に対応する生成元の φ による像が異なる場合を考えてみよう。

この場合、各 p_i は mod 3 で ± 1 にならなければならないことが、4ページの図1の考察からわかる。

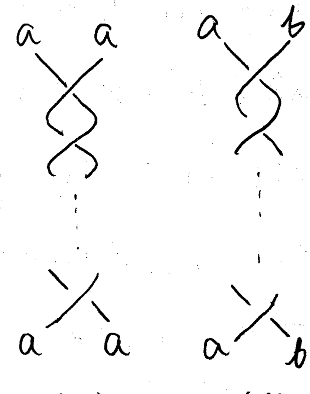
この pretzel knot に 3-half twist operation を何回か行なうと、最終的に $K(1, 1, \cdots, 1)$ または $K(-1, -1, \cdots, -1)$ になることが容易に図をかくことによって確かめられる。しかも、各 3-half twist operation において、proposition 4 の条件をみたしている。

K(1,1,…,1) や K(-1,-1,…,-1) の 1 や -1 の個数は、3の倍数になっていて、これに再び 3-half twist operation を行なうと、これは 2 components の trivial link となり、しかも、各 component の生成元の φ による像は a か b か c で、かつ異なるものとなる。このような 2 components の trivial link で分岐する φ に対応する irregular 3-fold cover が3次元球面となることは容易にわかる。



次に、上、下2つの長い線に対応する生成元の φ による像が同じ場合を考えてみよう。

この場合、1つの twist を見て右の図の(ア)のように φ によって対応する場合、half twist の数は任意であるが、(イ)の場合は half twist の数は3の倍数でなければならない。

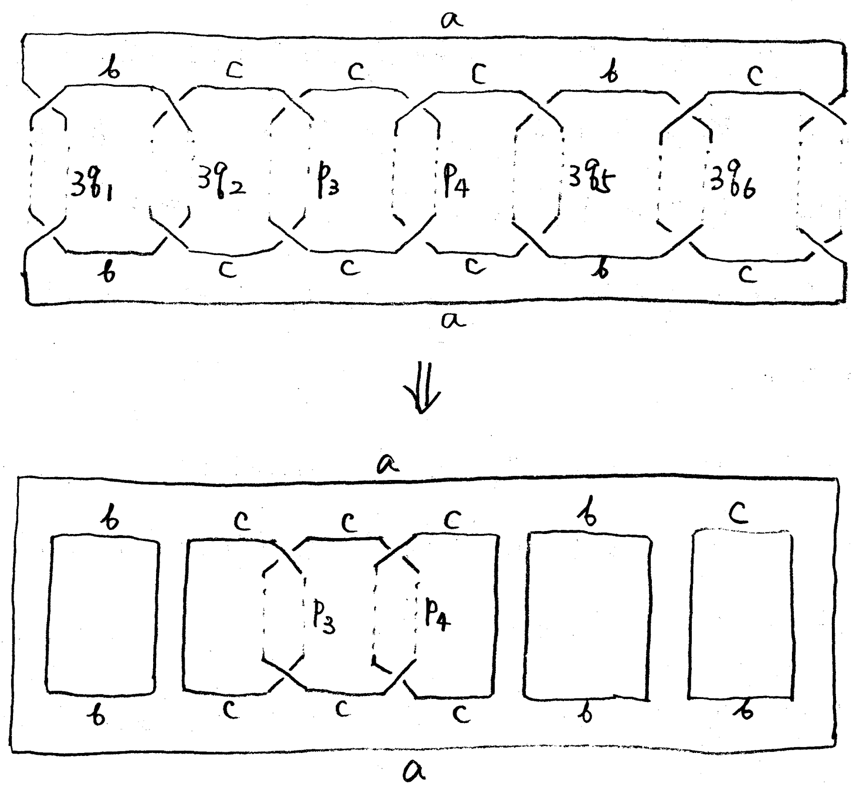


(ア)　(イ)

そして，(イ)の場合は，3-half twist operation によって，half twist の数は 0 とすることができ，しかも proposition 4 の条件をみたしている。しかし，(ア)の場合には，proposition 4 の条件をみたさないから，3-half twist operation を行うことはできない。

(イ)の場所だけに 3-half twist operation を何回か行なうことにより，もとの pretzel knot は各 component が split した link になり，しかも，それぞれの component は，trivial knot か，または，いくつかの torus knots の和 (knot composition) となり，かつ，1つの component の生成元はすべて φ によって導かれる準同型写像によって，$\mathfrak{S}_3$ の a か b か c のどれか1つに対応することになる。

type (p, 1) の torus knot で分岐する 3次元球面の 2-fold cover は type (p, 1) の lens space になることはすでに知られている。特に $S^2 \times S^1$ を type (0, 1) の lens space と見ることにより，最終的に求められた link で分岐する φ によって導かれた $\mathfrak{S}_3$ への準同型写像に対応する irregular 3-fold cover が type (p, 1) の lens space の connected sum になることは，容易に示すことができ，これが，もとの pretzel knot の φ に対応する irregular 3-fold cover となる。



以上のようにしてTheorem 1の証明が終るが、この考え方を使うと、2-bridge knotのirregular 3-fold coverも簡単に求めることができる。

2-bridge knotは2つのtrivial tangles $(B_1^3, \alpha_1 \cup \alpha_2)$と$(B_2^3, \beta_1 \cup \beta_2)$を2つの3-balls B_1^3とB_2^3の境界で張り合わせ、$\alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \beta_1 \cup \beta_2$で1つのknotになるようにしたとき、このknotが2-bridge knotとなる。

このとき、α_1, α_2に対応する生成元は、knot groupから$\mathfrak{S}_3$への準同型写像φによって、1方はaに、また他方はbに対応するときにのみirregular 3-fold coverが考えられる。このとき、$(B_1^3, \alpha_1 \cup \alpha_2)$の準同型写像$\varphi$に対応してき

まる $\alpha_1 \cup \alpha_2$ で分岐する irregular 3-fold cover は、前に述べたように 3-ball となる。

$(B^3_2, \beta_1 \cup \beta_2)$ に関しても同様であり、2つの 3-balls を境界で張り合わせたものは3次元球面となることから、次の定理が成立する。

Theorem 2

2-bridge knot で分岐する irregular 3-fold cover は、すべて3次元球面である。

講演では触れなかったが、同じように考えて、次の定理も容易に証明できる。

Theorem 3

3-bridge knot で分岐する irregular 3-fold cover はすべて lens space となる。

この考え方は 4-bridge knot まで拡張されるが、5-bridge knot との間には、まだ大きな gap があるように思える。