数理解析研究所講究録
第518巻 1984年 86-95

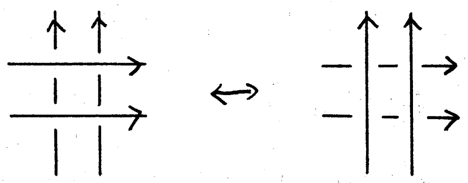


# Some metric functions on classical knots

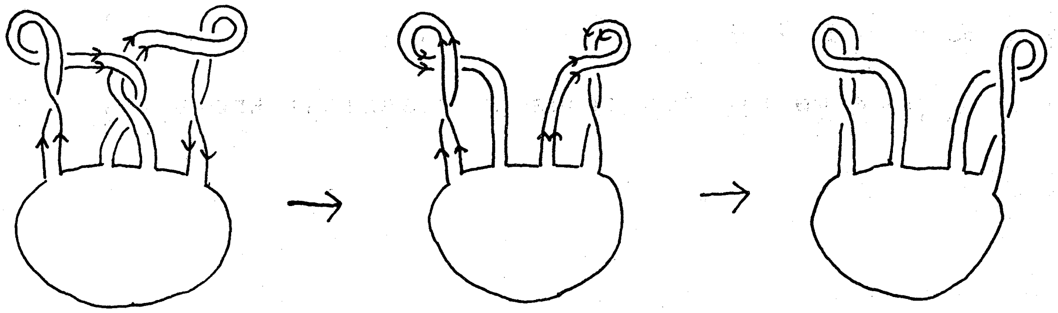
大阪市大　村上　斉　( Hitoshi Murakami )

結び目をほどくという操作を，2つ考える。まず，よく知られている unknotting operation がある。これは，結び目の projection の交差の上下を入れかえる操作である。すべての結び目は，この操作を有限回行なうことでほどけることは，すぐにわかる。

もう一つの操作として，次のような #-unknotting operation が考えられる。この操作を有限回行なうことで，すべての結



び目がほどけることを，以下に $4_1$-結び目 (figure-eight knot) を例にとって示す。



(結び目に，向き付け不能な曲面をはり，standard form にする。)　(band をほどく)　(band のねじれをとってできあがり)

これら２つの結び目をほどく操作を使って，結び目の間の距離を次のように定義する。

<u>定義０</u>

$$\begin{cases} d_G(K, K') = \min(K\text{から}K'\text{を得るために必要な unknotting operation の数}) \\ d_G^{\#}(K, K') = \min(K\text{から}K'\text{を得るために必要な \#-unknotting operation の数}) \end{cases}$$

また $\begin{cases} u(K) = d_G(K, O) \\ u^{\#}(K) = d_G^{\#}(K, O) \end{cases}$　（$O$は自明な結び目）

とおく。（結び目には，向きをつけておく。）

$d_G$ を Gordian distance，$d_G^{\#}$ を #-Gordian distance，$u(K)$ を unknotting number，$u^{\#}(K)$ を #-unknotting number と呼ぶ。$u(K)$は，多くの人によって研究されている。（[1]，

[5], [7], [8], [10], [11], [16])

なお，なぜGordianか，については，[12]の序文を参照されたい。

## §1 Gordian distance

まず，[10]により，unknotting operationを一度ほどこせば，結び目のsignatureは −2, 0, or 2 だけ変わるので，

**定理1.1** $d_G(K, K') \geqq \frac{1}{2}|\sigma(K) - \sigma(K')|$

がわかる。これは，$K'$が自明のとき[10, Theorem 10.1]と一致する。

**例** $K(p,2)$を，$(p,2)$-torus knotとすれば($p$: odd)，

$$d_G(K(p,2), K(q,2)) = \begin{cases} \frac{1}{2}|p-q| & (pq > 0) \\ \frac{1}{2}|p-q| - 1 & (pq < 0) \end{cases}$$

$M_K$を，$S^3$の$K$に沿った double branched cover，$D(K)$を，$K$の determinant（つまり $|H_1(M_K)|$），$\lambda : H_1(M_K) \times H_1(M_K) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ を $M_K$ の linking form とする。

<u>定理1.2</u>　$d_G(K,K')=1$ ならば，ある $a\in H_1(M_K)$ と，ある $a'\in H_1(M_{K'})$ が存在して，$\lambda(a,a)\equiv\pm n/D(K)$, $\lambda(a',a')\equiv\pm n/D(K')$ $\pmod 1$ が成り立つ。ただし，$n=\frac{1}{2}|D(K)-D(K')|$ である。

証明は，KとK'のSeifert matrixが，それぞれ $\left(\begin{array}{c|c} c & * \\ \hline * & V\end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|c} c\pm1 & * \\ \hline * & V\end{array}\right)$ の形で与えられることと，$M_K$ のlinking formが，KのSeifert matrix $S$ により $-(S+S^t)^{-1}$ で与えられること（[15]，[2]）を使えばよい。（$S^t$ は $S$ の転置行列。）

定理1.2を，2-bridge knot $K_{p,q}$（double cover が lens space $L_{p,q}$ となる結び目）に適用することにより，次の系が得られる。

<u>系</u>　$d_G(K,K_{p,q})=1$ ならば，ある整数 $s$ が存在して，$\pm q s^2\equiv\frac{1}{2}|p-D(K)|\pmod p$ となる。

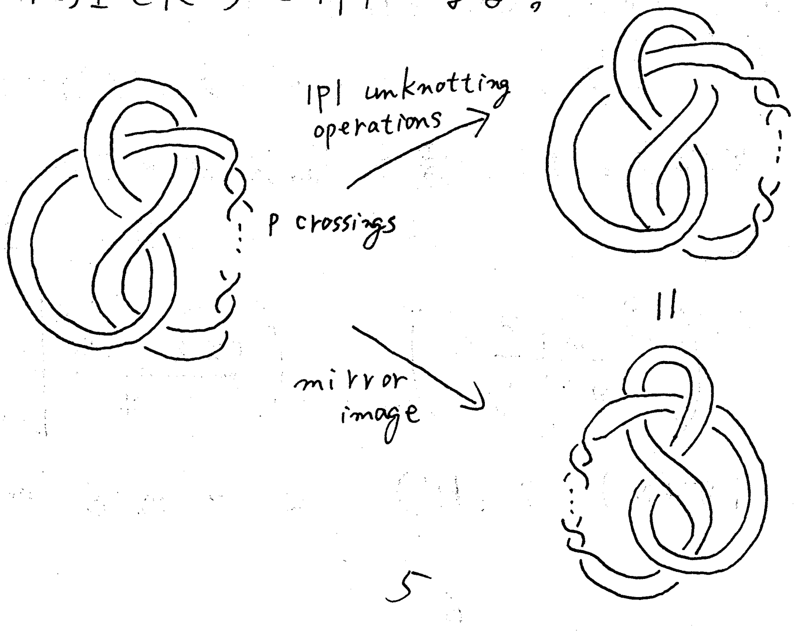
<u>例</u>　$4_1$-結び目は，2-bridge knot $K_{5,2}$ と表わされるので，$d_G(K,4_1)=1$ ならば，$D(K)\equiv 1, 5,$ or $9$ $\pmod{10}$ でなければならない。特に，trefoil knot $3_1$

は，$D(3_1)=3$ であるから，$d_G(3_1, 4_1)=2$，つまり，一度の unknotting operation では，$3_1$ から $4_1$ は得られないことがわかる。

上の系は，任意の正の奇数 $d$ に対し，$u(K)=1$ かつ $D(K)=d$ となる結び目 $K$ が存在する（[6]，[14]）ことと比較すると興味深い。

$rK$ を，$K$ の鏡像，$-K$ を，$K$ の向きを変えたものとしたとき，$Ref_+(K)=d_G(K, rK)$，$Ref_-(K)=d_G(K, -rK)$，$Inv(K)=d_G(K, -K)$ とおき，それぞれ $K$ の <u>positive reflection distance</u>，<u>negative reflection distance</u>，<u>inversion distance</u> と呼ぶ。定理 1.1より，$Ref_\pm(K) \geqq |\sigma(K)|$，また，$Ref_\pm(K(p,2))=|p|-1$ となることはすぐにわかる。

$K^p$ を figure-eight knot の $(2,p)$-cable とすると，次の図より $Ref_\pm(K^p) \leqq |p|$ となる。



また，$|\sigma(K^p)| = |p|-1$ だから，$Ref_{\pm}(K^p) = |p|-1$ or $|p|$ である。$K^p$ の exterior の torus 分解（［3］，［4］）を考えれば，$Ref_{\pm}(K^1) = 1$ となることは証明できるが，$|p| \geq 3$ に対して $Ref_{\pm}(K^p) = |p|$ となるかどうかは，わからない。

## §2 #-Gordian distance

まず，signature との関係を述べる。

定理 2.1　$d_G^{\#}(K, K') = 1$ なら $|\sigma(K) - \sigma(K')| = 2, 4,$ or $6$ である。

証明には，［2］による signature の計算法を使う。#-unknotting operation が，同じ band の上下の入れ換えに対応するときは，K と K′ の Goeritz matrix（定義は［2］による）がそれぞれ

$$\left(\begin{array}{c|c} c & * \\ \hline * & V \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c} c\pm 4 & * \\ \hline * & V \end{array}\right)$$

で与えられるので，$|\sigma(K) - \sigma(K')| = 2$ or $4$ となる。また，違う band の上下の入れ換えに対応するときは，

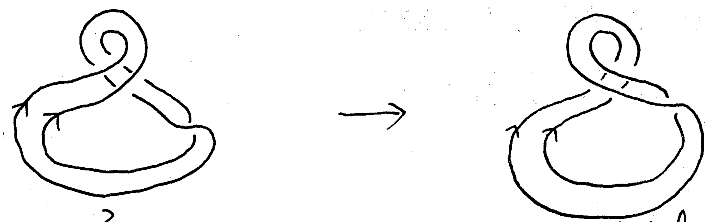
$$\left(\begin{array}{cc|c} a & c & * \\ c & b & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & V \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|c} a & c\pm 2 & * \\ c\pm 2 & b & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{*} & V \end{array}\right)$$

となるので，$|\sigma(K) - \sigma(K')| = 2, 4,$ or $6$ がわかり，

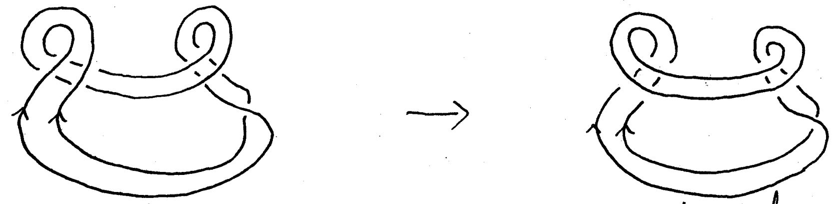
証明が終わる。

<u>系</u>　$d_G^{\#}(K, K') \geqq \frac{1}{6}\,|\sigma(K)-\sigma(K')|$

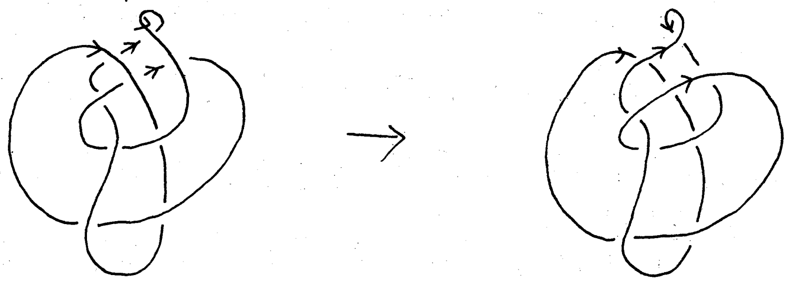
<u>例</u>　次の図により，$u^{\#}(3_1)=u^{\#}(5_1)=u^{\#}(8_{19})=1$ がわかるが，$|\sigma|$ は，それぞれ 2，4，6 である。



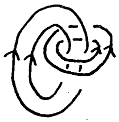
$3_1$　　　　trivial



$5_1$　　　　trivial



$8_{19}$　　　　trivial

#-unknotting operation が， という link との fusion または fission に対応していることに注意すれば，[13] により

<u>定理2.2</u>　$d_G^{\#}(K, K') \equiv Arf(K) + Arf(K') \pmod 2$

が得られる。ただし，$Arf(K)$ は，K の Arf 不変量である。

<u>例</u>　定理2.1，2.2 より，$u^{\#}(4_1) = 3$ となる。（$u^{\#}(4_1) \leqq 3$ は，2ページ目の図よりわかる。）また，$d_G^{\#}(4_1, 3_1) = 2$ である。

渋谷氏から，$u^{\#}(K(p,2)) = [\frac{1}{4}(p+1)]$（$p$ は正，[ ] は Gauss 記号）が一般に成り立つのではないか，と教えていただいたのだが，上の系が役に立たないこともあって正しいかどうかは，まだわからない。（$u^{\#}(K(p,2)) \leqq [\frac{1}{4}(p+1)]$ はすぐにわかる。）

最後に，§1と同様に，$Ref_{\pm}^{\#}(K)$，$Inv^{\#}(K)$ が定義でき，定理2.2より，これらはすべて偶数の値をとることを注意しておく。

詳しい証明などは，[9] を参照されたい。

References

[ 1 ] M. Boileau et C. Weber : Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des noeuds algébriques, Publication interne, Genève, 1983.

[ 2 ] C. McA. Gordon and R. A. Litherland : On the signature of a link, Invent. Math., 47(1978), 53-69.

[ 3 ] W. Jaco and P. Shalen : A new decomposition theorem for irreducible sufficiently-large 3-manifolds, Proc. of Symp. in Pure Math. A.M.S. 32(1977), 209-222.

[ 4 ] K. Johannson : Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries, Lect. Notes in Math. 761, Springer-Verlag, 1979.

[ 5 ] S. Kinoshita : On Wendt's theorem of knots, Osaka Math. J., 9(1957), 61-66.

[ 6 ] H. Kondo : Knots with the unknotting number 1 and their Alexander polynomials, Osaka J. Math., 16(1979), 551-559.

[ 7 ] W. B. R. Lickorish : The unknotting number of a classical knot, preprint, 1982.

[ 8 ] J. Milnor : SINGULAR POINTS OF COMPLEX HYPERSURFACES, Ann. Math. Studies 61, Princeton Univ. Press, 1968.

[ 9 ] H. Murakami : Some metrics on classical knots, preprint, 1984.

[10] K. Murasugi : On a certain numerical invariant of link types, Trans. A.M.S., 117(1965), 387-422.

[11] Y. Nakanishi : A note on unknotting number, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 9(1981), 99-108.

[12] Y. Nakanishi : Unknotting number について,「代数幾何学に応用を見込んだトポロジー」記録, (1983), 207-221.

[13] R. Robertello : An invariant of knot cobordism, Comm. Pure Appl. Math., 18(1965), 543-555.

[14] T. Sakai : A remark on the Alexander polynomials of knots, Math. Sem. Notes, Kobe Univ., 5(1977), 451-456.

[15] H. Seifert : Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 11(1935), 84-101.

[16] H. Wendt : Die gordische Auflösung von Knoten, Math. Z., 42 (1937), 680-696.