数理解析研究所講究録
第518巻 1984年 96-101

Fox's congruence modulo (2,1)

神大　中西康剛 (Yasutaka Nakanishi)

定義.　3次元球面内の1次元結び目 (S^3, K) に対し, Kと交わらぬ平凡な結び目 O で $\pm\frac{1}{2}$-surgery すると新らしい結び目 (S^3, K^*) が得られる。このような結び目の変形の有限列で、2つの結び目がうつりあうとき, これらは congruent modulo (2,1) であるという。(Fox[1] は, surgery の係数, $lk(K, O)$ 等から congruence mod (n, q) を定義しているが, 本稿では必要がないので省略する.)

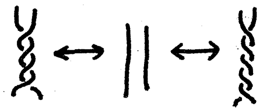
それでは 結び目の congruence class が いくつあるか であるが, 次の予想がある.

予想C　全ての結び目は, congruent modulo (2, 1) である.

なお，絡み輪に拡張して考えた時には，先の変形が絡み輪の成分間の絡み数を変えないことから，この予想は成り立たない．（例．Hopf-link  と 2-comp. trivial link ○○ ）

予想A, Bも列挙しておくと次の通りです．

<u>予想B</u>　全ての結び目は，congruent modulo (2, 2) である．

<u>予想A</u>　全ての結び目は， の変形の有限列でうつりあう．

なお，A ⇒ B ⇒ C の関係があるわけですが，予想Aに対しては，1983年10月KOOKセミナーで，特殊な3-braid knotsと10-crossingsまでの結び目については成り立つことを示しました．

本稿では，予想Cが全ての3-braid knotsについて成り立つことと，その確からしさの一面をAlexander多項式から照らしてみよう．

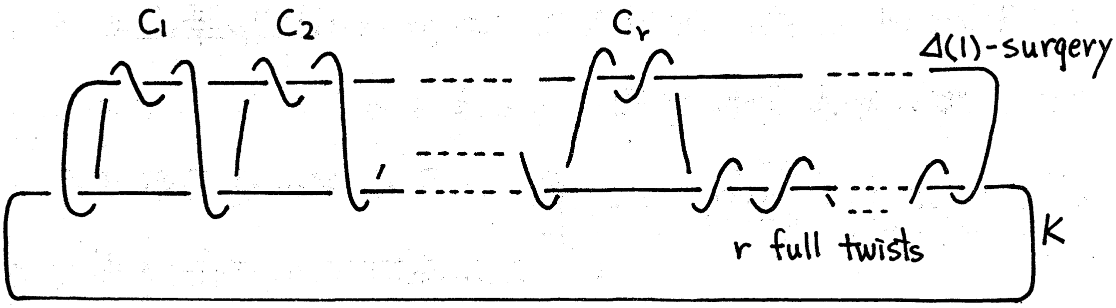
<u>命題</u>．$\Delta(t)$ を結び目多項式とする（すなわち，$|\Delta(1)|=1$，$\Delta(t^{-1}) \doteq \Delta(t)$ をみたすLaurent多項式）．この時，$\Delta(t)$ を

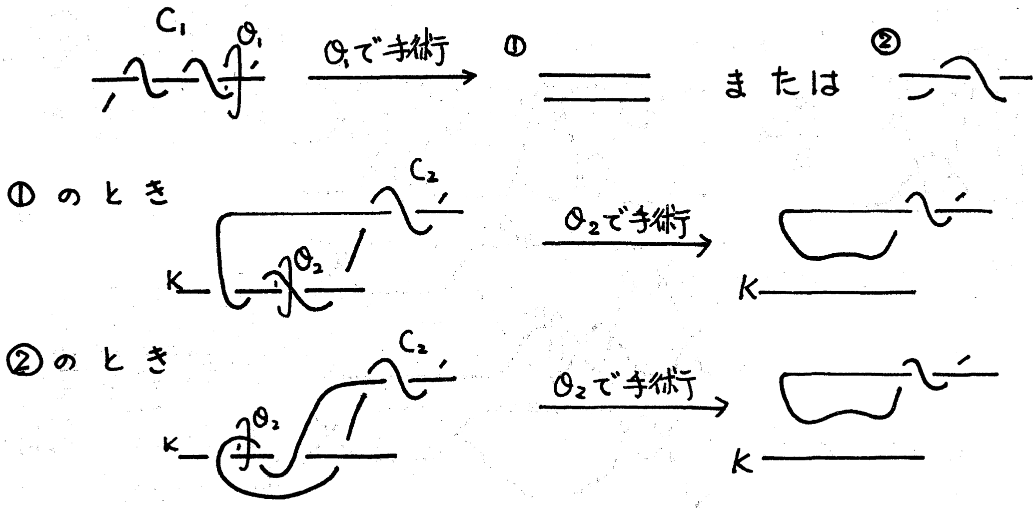
Alexander 多項式とする結び目Kで，平凡な結び目と congruent modulo (2, 1) であるものがある．

証明概略．Levin による surgery description で，次の図で与えられる結び目Kの Alexander 多項式は

$\Delta(t) = C_r(t^r+t^{-r}) + C_{r-1}(t^{r-1}+t^{1-r}) + \cdots + C_1(t+t^{-1}) + C_0$

である．（図では，$C_r=-2, \cdots, C_2=2$，$C_1=3$ である．）



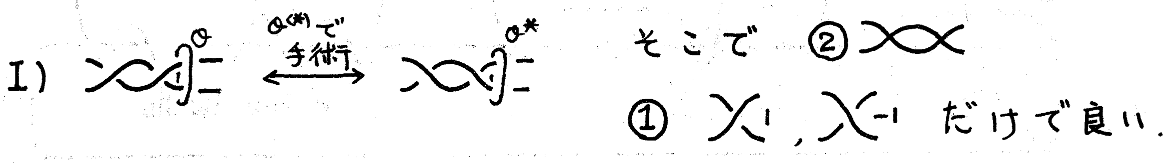


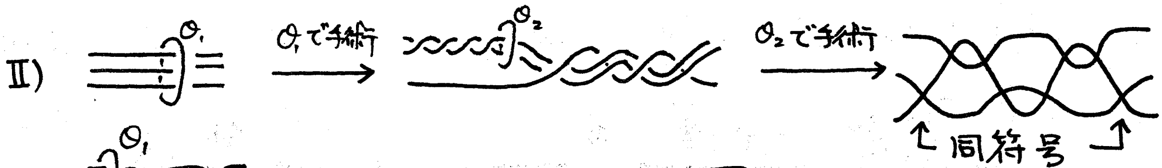
こうした変形のくり返しにより，平凡な結び目の surgery description が得られる．■

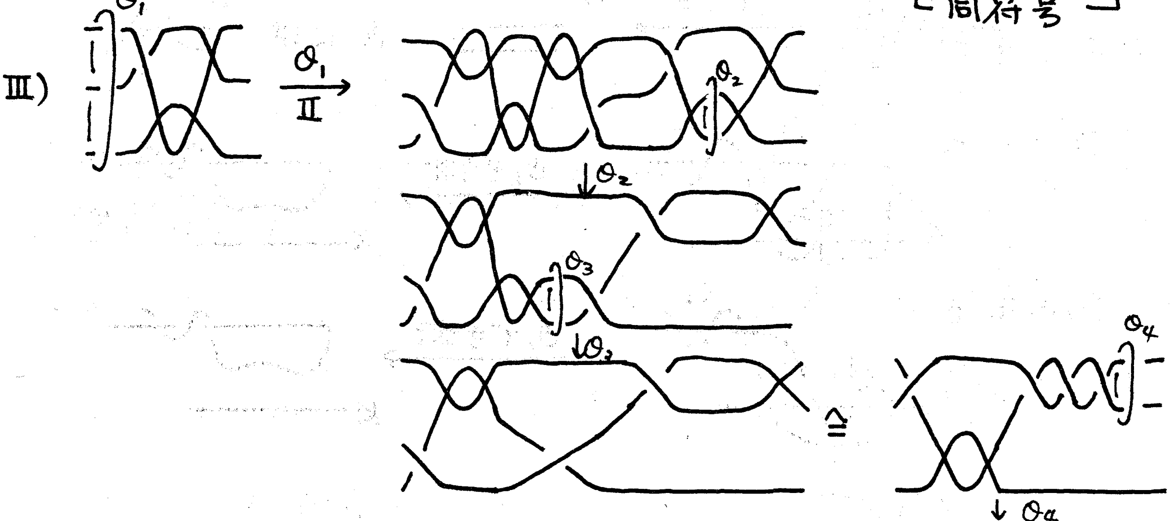
問題. Δ(t)を結び目多項式, Kを結び目とする. これらをどのようにとっても, Δ(t)を結び目多項式とし, かつ, Kとcongruent な結び目K*があるか.

先の命題で, Alexander 多項式のcongruenceに関する障害はないと言った所, 作間氏より上の問題が出た. 残念ながら未解決です.

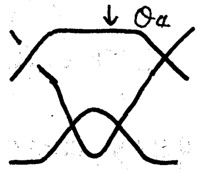
3-braid knots がすべて congruentであることを示すために, 次の基本変形 I, II, III を考える.





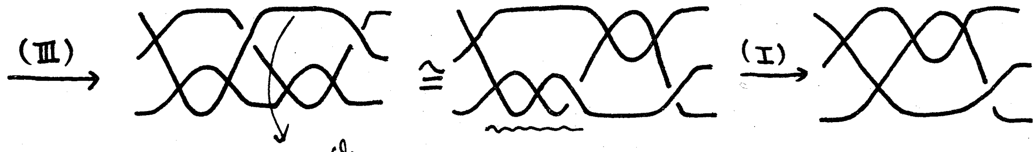


註. IIIの重要なところは②の隣の①の符号を同時に変えるところである.

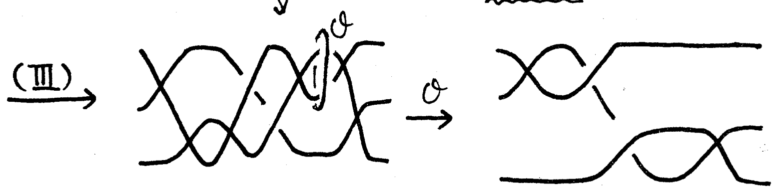


つまり，Ⅰの変形で3-braidを①，②だけにした後に，②が隣りあっておれば，Ⅲの変形でcrossingsを減らせる．以下，このcrossingに関するinductionで示す．

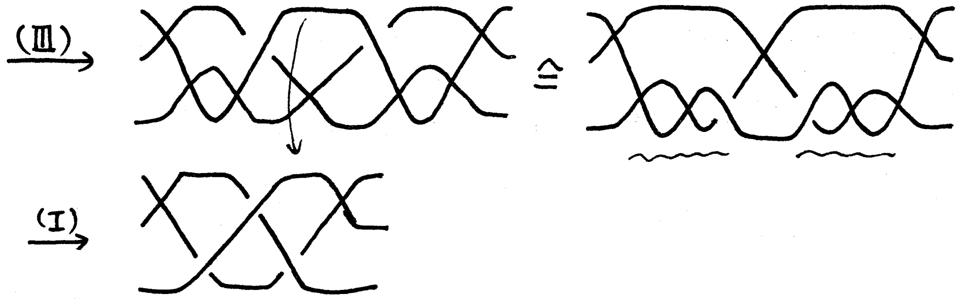
① ① ①
② ②



①①②
②①①

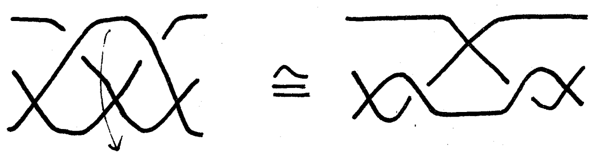


①①①①
②①②



以上から，①が4個以上続くとして良い．また，②があれば，(Ⅲ) を用いて　次のパターンをcrossingsをふやさずに作れる．

+1　−1
①　①　①



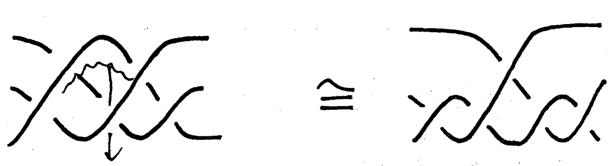
crossingをへらせるか ① ①①
② ② 型へ

故に，あと考えなくてはいけないのは　次の２タイプ．

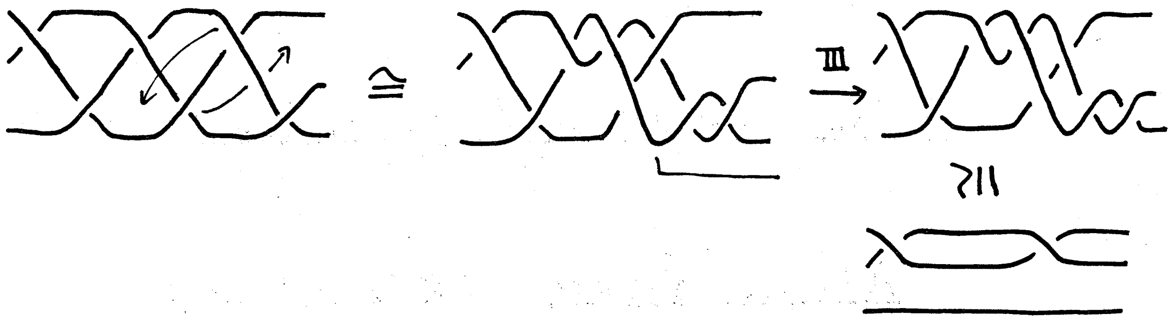
+1　+1　+1　+1　…
−1　−1　−1　−1　…

と

+1　+1　+1　+1　…
+1　+1　+1　+1　…



① ① ①
② ② 型へ



これらの変形を施せば，10-crossings 以下にはなる．そこで，KOOKセミナー（予想A）だけで，平凡な結び目に congruent であると示せる．■

参考文献

[1] R.H.Fox "Congruent classes of knots" O.J.M. vol.10