

# On Strongly Invertible Knots

大阪市大 理 作間 誠<sup>(\*)</sup>

Makoto SAKUMA

向き付けられた 3 球面  $S^3$  上の knot  $K$  に対し、次の条件を満足する  $S^3$  上の ori.-pres. involution  $\alpha$  が存在する時、 $K$  は strongly invertible であると言う。

(1)  $\alpha(K) = K$

(2) Fix  $\alpha$  は  $K$  と二点で交わる circle。

この報告では、strongly invertible knot に対し 2 或る 7 項式不変量を定義し、それと equivariant prime decomposition 及び equivariant cobordism との関係論ずる。その不変量は Alexander polynomial とは独立で、特に、自明な Alexander polynomial を持つ knot に対しても、一般には消えたり。

§1. Strongly invertible knot は "沢山" ある。

このセクションでは strongly invertible knot に関してこれまで知られてゐる結果を述べる。

---

(\*) 日本学術振興会奨励研究員

$S^3$ 上の ori.-pres. homeo. で  $K$  の向きを逆転するものが  
 有る時、 $K$  を invertible という。勿論、strongly in-  
 vertible なる invertible である。逆は、hyperbolic knot  
 に関しては正しい ([8, 1]) が、一般の knot に関しては  
 正しくなり ([1, 6, 20])。Fox [3] は、non-invertible  
 knot は存在するか? という問題を提出したが、それは  
 Trotter [18] が ある種の pretzel knot の non-invertibility  
 を証明する事により解決した。しかし、一般的に判定法  
 は '70年代終りの Kawachi [8], Hartley [7], Bonahon-  
 Siebenmann [2] 等の仕事を待たなくてはならなかった。  
 10 crossings までの knot の invertibility は Hartley [7] に  
 依り、完全に決定された。それによると、9 crossings まで  
 の knot で non-invertible なのは 817, 932, 933 のみ、又、  
 10 crossings では 165個の prime knot があるが、その内  
 non-invertible なのは丁度  $1/5$  の 33個である。結局、  
 10 crossings までの prime knot 249個の内、non-in-  
 vertible なのは 36個で全体の約 14% だけであり、  
 残りの 213個の knot は strongly invertible である。

Sakai [14] に依り証明された次の定理も、strongly  
 invertible knot が "沢山" ある事を言っている。

(又、これが knot の non-invertibility の判定の難がさ

を物語っている。) )

定理 (Sakai [14]) 任意の Alexander polynomial は strongly invertible knot の Alexander polynomial と 12 実現できる。

## § 2. Strongly invertible knot と $\theta$ -curve

以下 strongly invertible knot  $K \in S^3$ 、その strong. invertibility を与える  $S^3$  上の involution  $h$  と対にして、 $(K, h)$  で表わす。 Waldhausen [19] に依り、 $h$  は  $S^3$  の standard rotation と同値である。

定義 1  $(K_1, h_1)$  と  $(K_2, h_2)$  が同値であるとは、 $S^3$  上の ori. pres. homeo  $f$  で次の条件を満たすものが有る時をいう。 [この時、 $(K_1, h_1) \cong (K_2, h_2)$  と表わす。]

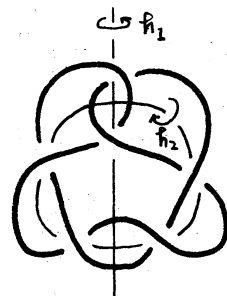
$$(1) f(K_1) = K_2$$

$$(2) f \circ h_1 \circ f^{-1} = h_2$$

註 (1) 右の図でわかる様に、

$K_1 \cong K_2$  であっても、 $(K_1, h_1) \cong (K_2, h_2)$

となるとは限らない。



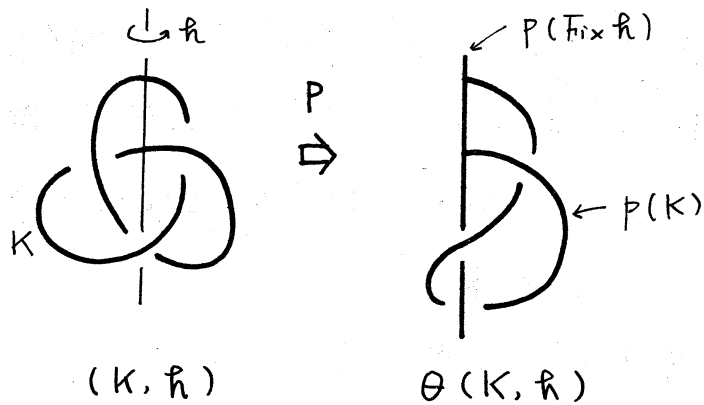
(2) Knot  $K$  を固定した時, その strong invertibility を与える involution は 高々有限個である.

(Kojima [9])

(3) Hyperbolic knot  $K$  は その様な involution は 高々二つである (cf. [1, 16])


$(K, h)$  を strongly invertible knot とする時,  
 $p: S^3 \rightarrow S^3/h \cong S^3$  を projection とする.

定義 2  $p(\text{Fix } h) \cup p(K)$  を  $\theta(K, h)$  と表わし,  $(K, h)$  に付随した  $\theta$ -curve と呼ぶ.



Knot  $K$  の性質は 次のように  $\theta(K, h)$  の性質に  
 反映する。 (証明は [15] と同様の方法で出来る。)

定理 1(1) (Marumoto [11])  $K: \text{trivial} \Leftrightarrow \theta(K, h): \text{trivial}$ (2)  $K: \text{prime} \Leftrightarrow \theta(K, h): \text{irreducible}$ 

但し、 $\theta$ -curve  $\theta$  が irreducible であるとは、  
 $\theta$  が local knot を持たなく、かつ prime (ie  $\theta$  は  
 non-trivial で、又  $\theta$  と 3 点で交わる任意の 2-sphere は  
 一方で  を bound する) である事とする。

## § 3. Strongly invertible knot の 同変一意分解

まず、 $\Rightarrow$  の strongly invertible knots  $(K_i, h_i)$  ( $i=1,2$ )  
 の equivariant connected sum  $(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)$  を定義  
 する。各  $i$  ( $i=1,2$ ) に 対し、 $Z_i \in \text{Fix } h_i \cap K_i$  の点、  
 $B_i \in Z_i$  の equivariant regular nbd. とし、 $f: (\partial B_1, \partial B_1 \cap K_1)$   
 $\rightarrow (\partial B_2, \partial B_2 \cap K_2)$  を ori.-rev. equivariant homeomorphism  
 とする。この時  $\{(S^3, K_1) - (\dot{B}_1, \dot{B}_1 \cap K_1)\} \cup_f \{(S^3, K_2) - (\dot{B}_2, \dot{B}_2 \cap K_2)\}$   
 は  $(S^3, K_1 \# K_2)$  を与え、その上には、 $K_1 \# K_2$  の strong  
 invertibility を与える involution  $h = (h_1|_{S^3 - \dot{B}_1}) \cup (h_2|_{S^3 - \dot{B}_2})$   
 がある。この pair  $(K_1 \# K_2, h)$  を  $(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)$  と  
 定める。しかし、この定義には次の ambiguity がある。

(1)  $Z_i \in \text{Fix } h_i \cap K_i \cong S^0$  ( $i=1,2$ ) の 記 び 方。

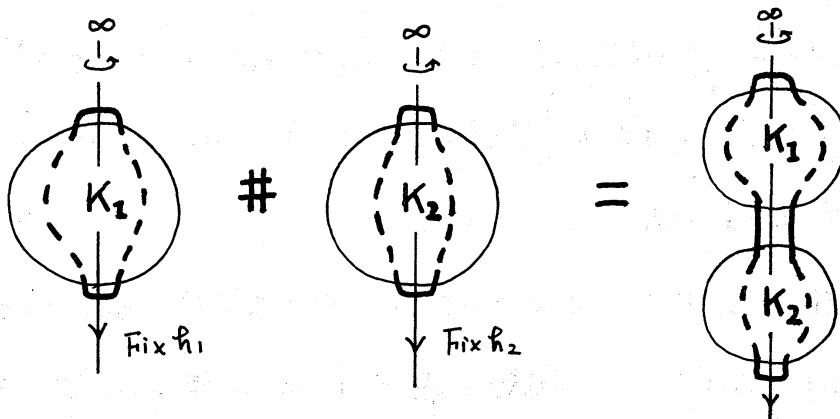
(2) Equivariant homeo.  $f$  の取り方。(  $f$  の equivariant isotopy class  $\text{rel } \partial B_1 \cap K_1$  は  $f$  の  $\partial B_1 \cap \text{Fix } h_1$  及び  $\partial B_1 \cap K_2$  への制限で定まる。しかし、出来上がる connected sum の equivalence class は  $f|_{\partial B_1 \cap K_1}$  には依らな(り) )

従って、equivariant connected sum を定義するには、例えば次の様な情報を  $(K, h)$  に付加しておく必要がある。

(1)  $\text{Fix } h$  の向き  $[\text{Fix } h]$

(2)  $\text{Fix } h$  上の "base point"  $\infty$  ( $\infty \notin K$ )

この情報付きの strongly invertible knot  $\{(K, h), [\text{Fix } h], \infty\}$  の connected sum を次の図の様(に)定義できる。



このセクションでは以下  $(K, h)$  には上の情報が付いて(いる)ものとする。 Strongly invertible knot の列  $\{(K_i, h_i)\}_{i=1}^n$  に対して  $\#_{i=1}^n (K_i, h_i) = (((K_1, h_1) \# (K_2, h_2)) \# (K_3, h_3)) \# \dots \# (K_n, h_n)$  と定義する。この和は非可換である事に注意されたい。

$(K, h)$  が上の意味で non-trivial strongly invertible knot

二つの和に表わせたり時、 $(K, h)$  は prime であると言う。

$(K, h)$  が prime であるための必要十分条件は  $\theta(K, h)$  が prime である事であり、それは定理 1 により次と同値である。

(1)  $K$  : prime, 又は

(2)  $K = R \# R$  ( $R$  : prime) と表わせ、 $h$  はその factor を入れ替える involution。 (これを以下  $D(R)$  で表わす。)

この時、次の一意分解定理が成り立つ。

定理 2 (1) 任意の strongly invertible knot  $(K, h)$  は prime decomposition  $\#_{i=1}^m (K_i, h_i)$  を持つ。又、この時、和は  $(\#_{i=1}^r (K_i, h_i)) \# (\#_{j=1}^s D(R_j))$  ( $K_i, R_j$  : prime) の形に直せる。

(2)  $(\#_{i=1}^{r'} (K'_i, h'_i)) \# (\#_{j=1}^{s'} D(R'_j))$  をもう一つの prime decomposition とすると次が成り立つ。

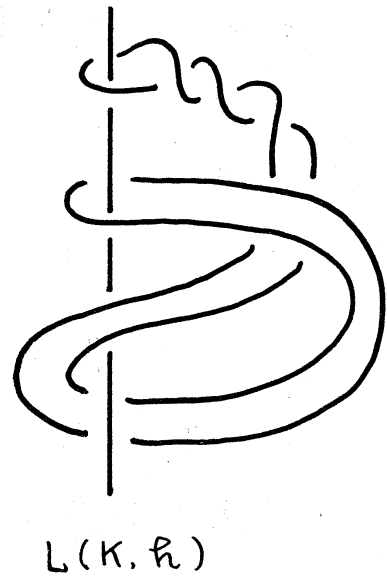
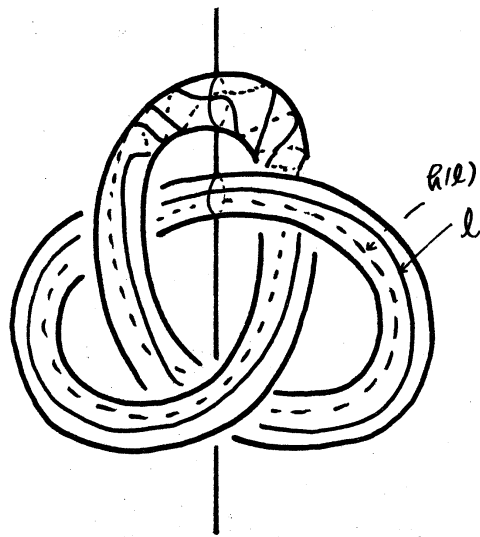
(i)  $r = r'$ ,  $(K_i, h_i) \cong (K'_i, h'_i)$  ( $1 \leq i \leq r$ )

(ii)  $s = s'$ , 順番を適当に入れ替れば  $R_j \cong R'_j$  .

この定理の証明は、 $\theta$ -curve の unique prime decomposition を証明する事により成される。

§ 4. ある双項式不変量

Strongly invertible knot  $(K, R) = \overline{RL}$ .  $N(K)$  を  $K$  の equivariant regular nbd.,  $l \in N(K)$  の preferred longitude で  $R(l) \cap l = \emptyset$  とするものをとる。この時  $L(K, R) = p(\text{Fix } R) \cup p(l) \subset S^3/R \cong S^3$  とおく。



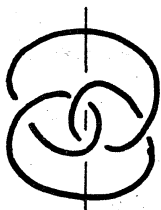
$L(K, R)$  は linking number が 0 の 2-component link であるので、Kojima-Yamasaki [10] (cf. [5]) の  $\eta$ -function が定義できる。(  $S^3 - p(\text{Fix } R)$  の infinite cyclic cover  $\cong S^1 \times D^2$  への  $p(l)$  の lift 達の " $\mathbb{Z}\langle t \rangle$ -linking number" ) これを  $(K, R)$  の  $\eta$ -polynomial と呼ぶ  $\eta_{(K, R)}(t)$  で表わす。

例

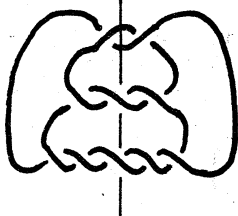


$$-t^{-2} + 2 - t^2$$

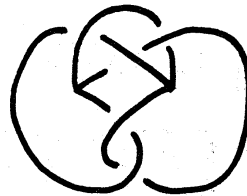




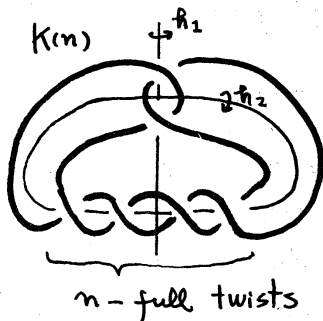
$$-t^3 + t^{-2} + t^{-1} - 2 + t + t^2 - t^3$$



$$-2t^{-2} + 4 - 2t^2$$



$\theta(K, h) = \text{Kinoshita's } \theta\text{-curve [ ]}$



$$\eta_{(K(n), h_1)}(t) = \left[ \frac{n}{2} \right] t^{-3} - n t^{-2} - \left[ \frac{n}{2} \right] t^{-1} + 2n \\ - \left[ \frac{n}{2} \right] t - n t^2 + \left[ \frac{n}{2} \right] t^3$$

$$\eta_{(K(n), h_2)}(t) = -t^{-(2n+1)} + t^{-2n} + t^{2n} - t^{(2n+1)}$$

(特  $\{ = (K(n), h_1) \neq (K(n), h_2) \}$ )

定理 3. (1)  $\eta_{(K, h)}(t)$  は次の条件を満足する。

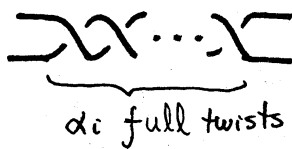
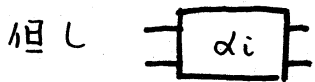
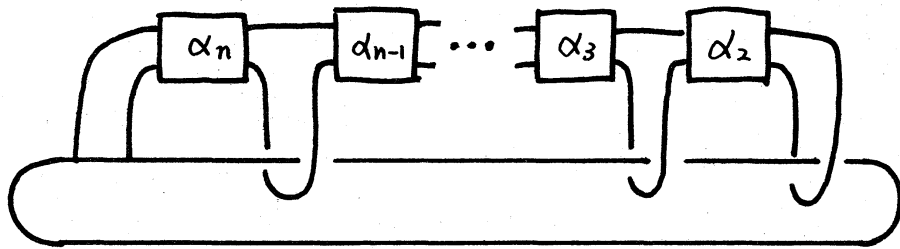
$$\begin{cases} \eta_{(K, h)}(t) = \eta_{(K, h)}(t^{-1}) \\ \eta_{(K, h)}(1) = \eta_{(K, h)}(-1) = 0 \end{cases}$$

(2) 逆に、上の条件を満足する整数係数 Laurent polynomial は或る strongly invertible knot の  $\eta$ -polynomial となる。

証明 (1) 対称性と  $\eta_{(K, h)}(1) = 0$  は  $\eta$ -function の一般的性質である (cf. [10])。  $\eta_{(K, h)}(-1)$  は、  $\eta_{(K, h)}(t)$  を  $\mathbb{Z}\langle t, t^{-1} \rangle$  で見た時の  $t$  の係数が  $p(l)$  の  $(S^3, p(\text{Fix}h))$  の double cover

$\cong S^3$  における逆像  $= l \cup h(l)$  の linking number  $= 0$  に等しい事から出る。

(2) 次の図で表わされる  $\theta$ -curve を  $\theta(K, h)$  とし、持つ strongly invertible knot の  $\eta$ -polynomial を  $\eta(t)$  とおく。



すると、
$$\eta(t) = A^{(n)}(t) + \alpha_2(t^{-2} + t^2) + \sum_{i=3}^n \alpha_i(t^{-i} - 2t^{-i+1} + t^{-i+2} + t^{-i+2} - 2t^{-i+1} + t^{-i})$$

(但し  $A^{(n)}(t)$  は  $\beta t^{-1} + \gamma + \beta t$  ( $\beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ ) の形の式で  $\eta(1) = \eta(-1) = 0$  とする式として特徴付けられる。)

従って  $\{\alpha_i\}_{2 \leq i \leq n}$  を適当に選べば (1) の条件を満足する多項式をすべて実現出来る。

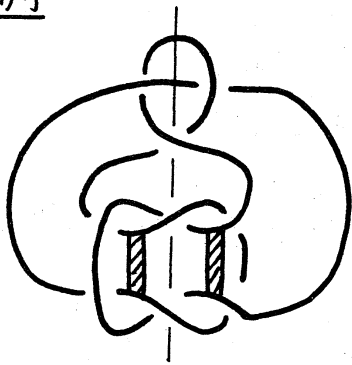
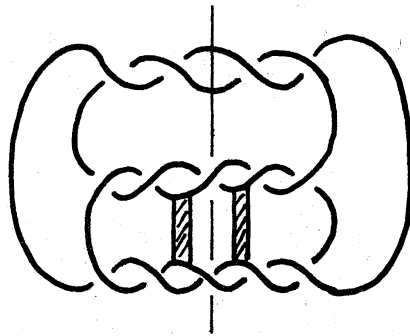
註 上の (2) の証明は本質的に Sakai [13] の議論と同じである。ここでは、任意の "Alexander polynomial" に対応して、それを Alexander polynomial を持つ unknotting number 1 の knot が構成されているか、その knot は、上の例で  $p(l)$  に従って 1-surgery (t=時)  $= p(\text{Fix } h)$  が作る knot に等しい。(cf. Proposition 4 of [4]).

## §5. 同変コホモロジー

二つの strongly invertible knots  $(K_0, h_0)$  と  $(K_1, h_1)$  が equivariantly cobordant であるとは、次の条件を満足する  $S^3 \times I$  内の locally flat annulus  $A$  及び  $\nu(S^3 \times I, A)$  上の P.L. (or smooth) involution  $h$  が存在する事とする。

$$(*) \quad \partial \{(S^3 \times I, A), h\} = (K_0, h_0) \times 0 \cup (K_1, h_1) \times 1$$

例

 $8_{10} \sim 3_1$  $K(p, -p, 2r) \sim 0$ 

§3 で考えた情報付きの strongly invertible knot 全体から equivariantly cobordant なものを同一視して出来る集合  $EC$  は 複算 # に関して (非可換) 群になるか、これに関して次が成り立つ。

定理 4.  $\eta$ -polynomial は 群  $EC$  から abel 群  $\mathbb{Z}\langle + \rangle$  への 準同型写像を与える。可たわす。

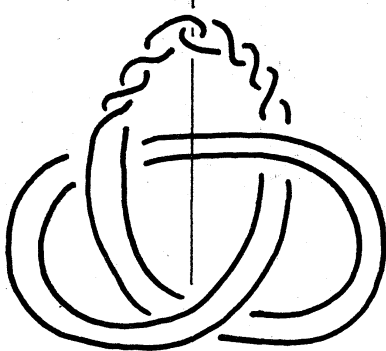
(1)  $(K_0, h_0) \sim (K_1, h_1)$  (equivariantly cobordant)

$$\text{たゞ } \eta_{(K_0, h_0)}(t) = \eta_{(K_1, h_1)}(t).$$

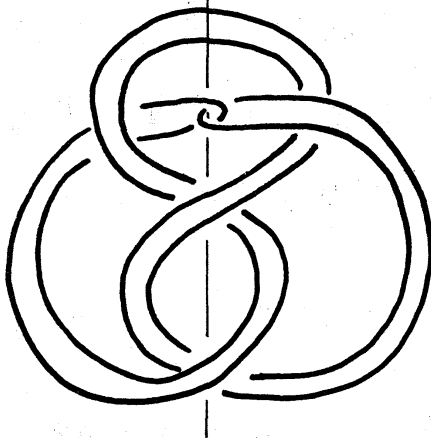
(2)  $\eta_{(K_1, h_1) \# (K_2, h_2)}(t) = \eta_{(K_1, h_1)}(t) + \eta_{(K_2, h_2)}(t)$

証明 (1)  $(K_0, h_0) \sim (K_1, h_1)$  たゞ  $L(K_0, h_0)$  と  $L(K_1, h_1)$  が cobordant である事かわかる。従って  $\eta$ -function の cobordism に関する不変性より (1) を得る。

例 次の knot は equivariantly slice ではない。



$$\eta(t) = [6, 0, -4, 0, 1]$$



$$\eta(t) = [-6, 2, 4, -3, -1, 1]$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{但し } [a_0, a_1, \dots, a_n] \\ = a_0 + \sum_{i>0} a_i (t^{-i} + t^i) \end{array} \right)$$

上の二つの knot の Alexander polynomial は共に 1 である事に注意!

しかし、この equivariant cobordism と通常の knot cobordism の間には大きな差がある。例えは、 $b_1$  knot は slice であるが、§4 の例 ( $b_1 = K(2)$ ) からわかる様に、それは equivariant には slice ではない。すなわち  $\gamma$  を  $\mathcal{EC}$  から通常の knot cobordism group  $C$  への自然な写像とすると、 $\text{Ker } \gamma \neq \{1\}$  となる。最後に、次の問題を挙げておく。

問題  $\gamma$  は全射か？ すなわち、任意の knot は strongly invertible knot に cobordant か？

#### References

- [ 1 ] C.M. Boileau: Noeuds rigidement inversibles. preprint.
- [ 2 ] F. Bonahon and L. Siebenmann: Algebraic knots. in preparation.
- [ 3 ] R.H. Fox: Some problems in knot theory. Topology of 3-manifolds, pp.168-176, Prentice-Hall, New York, 1962.
- [ 4 ] S. Furusawa and M. Sakuma: Dehn surgery on symmetric knots, to appear in Math. Sem. Notes, Kobe Univ.
- [ 5 ] D. Goldsmith: A linking invariant of classical link concordance. Lect. Notes in Math. 685, pp.135-170, Springer-Verlag, 1978.
- [ 6 ] R. Hartley: Knots and involution. Math. Z. 171 (1980), 175-185.
- [ 7 ] \_\_\_\_\_: Identifying non-invertible knots. Topology 22 (1982), 137-145.
- [ 8 ] A. Kawachi: The invertibility problem on amphicheiral excellent knots. Proc. Japan Acad. 55 (1979), 399-402.

- [ 9 ] S. Kojima: Finiteness of symmetries of 3-manifolds. preprint
- [10] \_\_\_\_\_ and M. Yamasaki: Some new invariants of links. *Inv. Math.* 54 (1979), 213-228.
- [11] Y. Marumoto: Relations between some conjectures in knot theory. *Math Sem. Notes, Kobe Univ.* 5 (1977), 377-388.
- [12] R. Riley: An elliptic path from parabolic representations to hyperbolic structures. *Lect. Notes in Math.* 722, pp.99-133, Springer-Verlag, 1979.
- [13] T. Sakai: A remark on the Alexander polynomials of knots. *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.* 5 (1977), 451-456.
- [14] \_\_\_\_\_: Polynomials of invertible knots. *Math. Ann.* 266 (1983), 229-232.
- [15] M. Sakuma: Periods of composite links. *Math. Sem. Notes, Kobe Univ.* 9 (1981), 445-452.
- [16] \_\_\_\_\_: '83年までの古典的 knot theory. 代数幾何へ応用と見込んだトポロジー. pp.35-140, 1983.
- [17] W.P. Thurston: Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull A.M.S.* 6 (1982), 357-381.
- [18] H.F. Trotter: Noninvertible knots exist. *Topology* 2 (1964), 275-280.
- [19] F. Waldhausen: On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math.* 87 (1968), 56-88.
- [20] W. Whitten: Inverting double knots: *Pacific J. Math.* 97 (1981), 209-216.