

有限 BUFFER 多重待ち行列の解析

東北大学院 野口 清広 (Kiyohiro Noguchi)
東北大通研 白鳥 則郎 (Norio Shiratori)
東北大通研 野口 正一 (Shoichi Noguchi)

第一章 序論

有限 BUFFER 多重待ち行列 MODEL を解析する際、呼の到着時点で 有限 BUFFER 数と待ち呼数の関係により、その到着呼が棄却されるか否かが決定される。この有限 BUFFER 多重待ち行列 MODEL の解析に隠れマルコフ連鎖法を適用するならば、状態空間を呼の到着時点と Service の開始時点での状態数としなければならない。

多重待ち行列 Model において呼の到着時点隠れマルコフ点として扱うことは解析を非常に困難にする。そこで、状態空間を Server の到着時点の状態数のみで表わす UPPER BOUND MODEL と LOWER BOUND MODEL を提案し、両 MODEL を解析することにより、有限 BUFFER MODEL の特性を明かにしてゆく。

ここで、本論文の構成を示す。

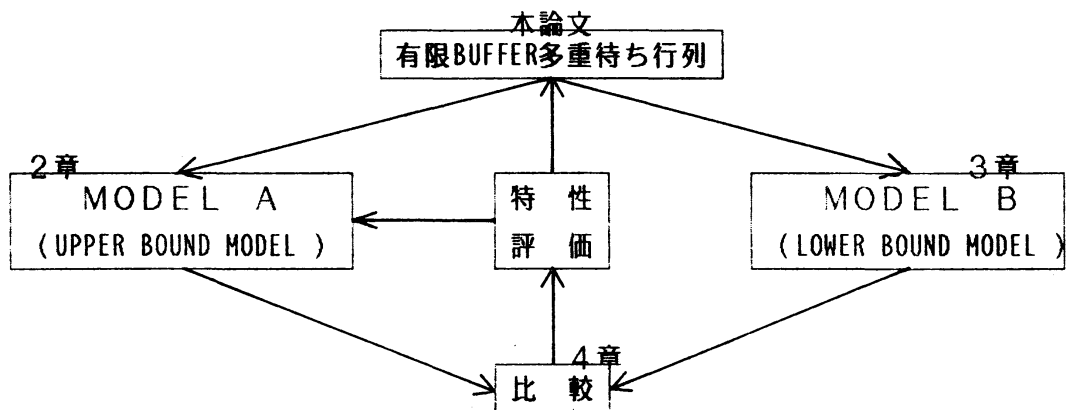


FIG. 1-1 本論文の構成

まず、第 2 章では、MODEL A (Upper Bound MODEL) の解析を行ない、第 3 章では、MODEL B (Lower Bound MODEL) の解析を行なう。第 4 章では、第 2・3 章での数値解析結果を示し、最後の第 5 章に於いて 両 MODEL の数値解析結果を比較し、有限 BUFFER 多重待ち行列 MODEL の特性評価を行ない、MODEL A の有効性を示す。

以下、本論文で特性評価を行なう有限BUFFER多重待ち行列MODELを示す。

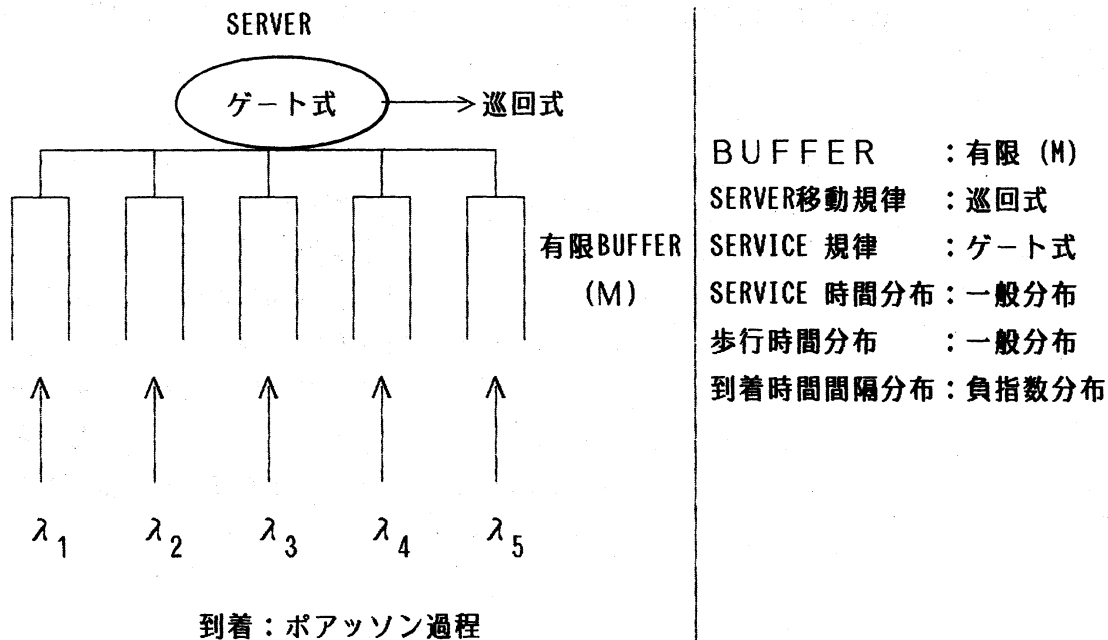


FIG. 1-2 有限BUFFER多重待ち行列解析MODEL

SERVERの処理方式は、ゲート式である。すなわち、SERVERが到着した時点でQueueに存在する待ち呼を全て処理し、次のQueueに有限の歩行時間で移行する。もし、SERVERが到着した時点で待ち呼が存在しなければ、SERVICE時間零で次のQueueに移行する。SERVERの移動規律は巡回的に $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow (N-1) \rightarrow N \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots$ と各Queueを順に移動してゆく。呼の各queueへの到着は、平均到着率 λ_i (FOR i-th queue)のポアソン過程に従う。処理時間・歩行時間分布は一般分布とする。BUFFERは、当然有限(M)である。

このMODELを解析する際、BUFFERが有限であることから各呼の到着に対してこの到着呼が棄却されるか否か (BUFFERに受理されるか否か) は、呼の到着時点の状態数 (待ち呼数) によって決定される。従って、このMODELに隠れマルコフ連鎖法を適用すると状態空間は、呼の到着時点とSERVICEの開始時点の状態数となる。呼の到着時点を隠れマルコフ点として解析することは、到着過程を一般分布とする以上に困難 (複雑) となる。

本論文では、FIG. 1-2に与えた有限BUFFER MODELの特性を十分に表わし、かつ解析的な困難さを最小限に押えたMODELを仮想BUFFERを導入することにより実現し、(FIG. 2-1)このMODELの解析を行なった。

第二章 MODEL A (upper bound model) の解析

前章で示した有限BUFFER多重待ち行列MODEL (FIG. 1.2) に対するUPPER BOUND MODEL (MODEL A) を示す。

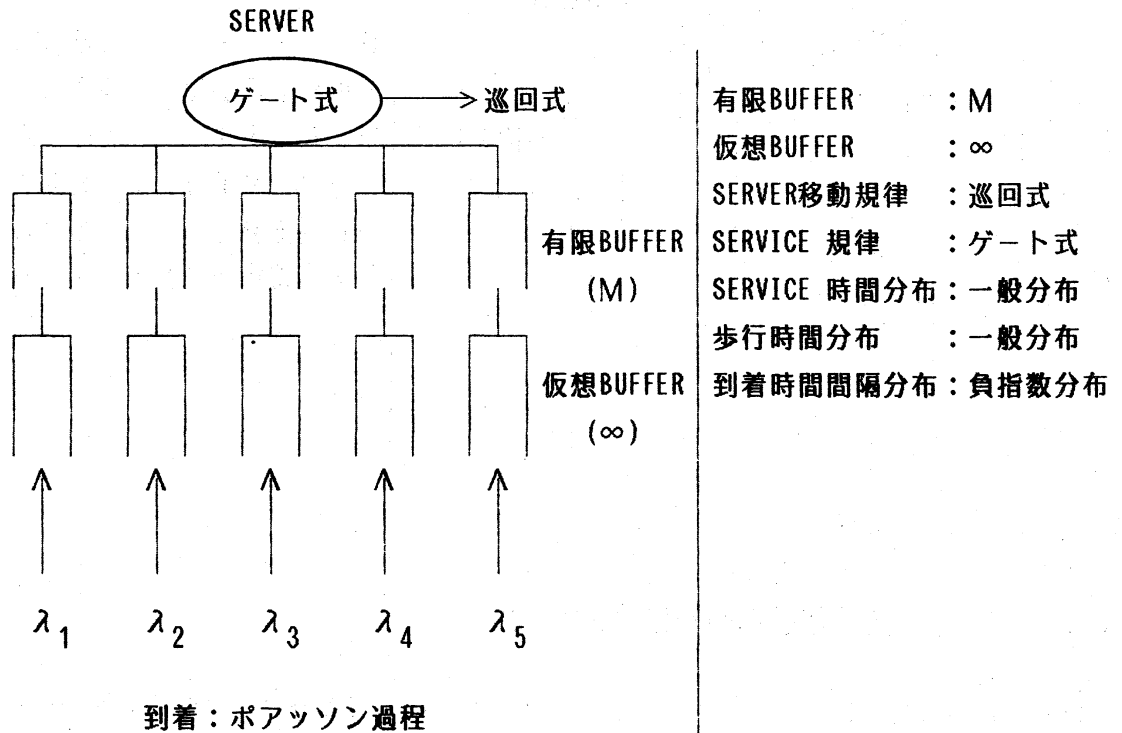


FIG. 2-1 解析MODEL A

有限BUFFER MODELに対して、仮想BUFFERを考える。

到着呼は全て一旦、仮想BUFFER (∞) に入り SERVERの到着と同時に瞬時にMAX Mで有限BUFFER (M) に入り、他は棄却する。有限BUFFERに入った呼は、そのSERVERで全て処理されてから次のqueueに移行する。従って、このMODEL Aに対する隠れマルコフ点は、SERVERの到着時点のみで表わせる。

ここで、仮想BUFFERの導入によるMODEL Aと有限BUFFER MODELとの関係を明らかにしておく。MODEL Aでは、到着呼を全て一旦、仮想BUFFERに入れる為、有限BUFFER MODELに於けるSERVICE中の棄却を十分に表わすことができない。しかし、この事象が生じる確率は極めて低い。このことを示す為にこのMODEL Aが有限BUFFER MODELの待ち呼数分布のUpper Boundを与えることよりLower Bound特性を与えるMODEL Bを提案し、両MODELの数値解析結果よりMODEL Aの有効性を示す。

[NOTATION 及び 諸定義]

- N : Station 数.
- M : 有限BUFFER数.
- λ_i : i-th Stationに於ける平均到着率.
- \bar{h}_i : i-th Stationに於ける平均処理時間.
- \bar{u}_i : i-th Stationから, (i+1)modN-th Station への平均歩行時間.
- $\xi_i^{(n)}(j)$: n-th cycleに於いて, serverが i-th stationに到着した時点での j-th stationでの待ち呼数.
- t(b) : b個の呼を処理するのに要する時間.
- $\nu_j(t)$: Time interval tの間にj-th stationに到着する呼数.
- $H_i(t)$: i-th Stationでの処理時間分布.
- $U_i(t)$: i-th Stationから (i+1)modN-th Station への歩行時間分布.
- $H_i^*(s)$: $H_i(t)$ のLST.
- $U_i^*(s)$: $U_i(t)$ のLST.

[状態方程式]

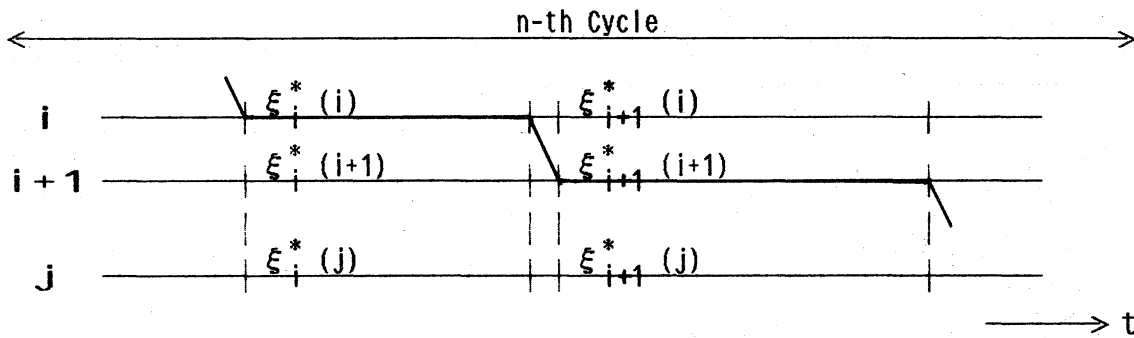


FIG. 2-2 Time Chart (FOR MODEL A)

FIG. 2-2 より SERVERの到着時点での状態数を状態空間として状態方程式を立てると

$$\xi_{i+1}^{(n)}(i) = \nu_i(u_i + t([\xi_i^{(n)}(i)]_M)) \quad \dots (2-1)$$

$$\xi_{i+1}^{(n)}(j) = \xi_i^{(n)}(j) + \nu_j(u_i + t([\xi_i^{(n)}(i)]_M)) \quad \text{FOR } j \neq i \quad \dots (2-2)$$

但し, $[b]_M = \min(b, M)$

(2-2) 式の関係を再帰的に変形してゆくと 次式で示す様に 各状態数は、状態数に依存する時間Interval中に到着する呼数で表わすことができる。

When $j \leq i$

$$\xi_{i+1}^{(n)}(j) = \sum_{l=j}^i \nu_j (u_l + t([\xi_l^{(n)}(l)]_M)) \quad \dots (2-3)$$

When $j > i$

$$\begin{aligned} \xi_{i+1}^{(n)}(j) = & \sum_{l=j}^N \nu_j (u_l + t([\xi_l^{(n-1)}(l)]_M)) \\ & + \sum_{l=1}^i \nu_j (u_l + t([\xi_l^{(n)}(l)]_M)) \quad \dots (2-4) \end{aligned}$$

serverの到着時点での状態はエルゴート性を満足するため、定常状態は存在する。

定常状態での状態変数を $\xi_i^*(j)$ とあらわすと、(2-3)、(2-4) 式より、

次式ですべての状態が記述可能となる。

$$\xi_{i+1}^*(j) = \sum_{l=j}^i \nu_j (u_l + t([\xi_l^*(l)]_M)) \quad \dots (2-5)$$

(FOR $i=1, 2, \dots, N$)
subscript i は mod N

[母関数表示]

定常状態における母関数を次の様に定義する。

$$G_i^*(x_1, \dots, x_N) \triangleq E \left[\prod_{j=1}^N x_j^{\xi_i^*(j)} \right] \quad \dots (2-6)$$

$$G_{i+1}^*(x_1, \dots, x_N)$$

$$= E \left[\prod_{j=1}^N x_j^{\xi_{i+1}^*(j)} \right] \quad (\text{BY (2-6) 式})$$

$$= E \left[\prod_{j=1}^N x_j^{\sum_{l=j}^i \nu_j (u_l + t([\xi_l^*(l)]_M))} \right] \quad (\text{BY (2-5) 状態方程式})$$

$$= E \left[\prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i x_j^{\nu_j (u_l)} * x_j^{\nu_j (t([\xi_l^*(l)]_M))} \right] \quad (\text{BY サービス タイムと歩行時間はoverlapしない})$$

$$= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i E \left[x_j^{\nu_j (u_l)} * x_j^{\nu_j (t([\xi_l^*(l)]_M))} \right] \quad (\text{BY 到着過程をランダムと考えているため、各到着は独立である})$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i E [x_j^{\nu_j} (u_l)] * E [x_j^{\nu_j} (t([\xi_l(l)]_M))] \\
&\hspace{15em} \text{(BY 各到着は独立)} \\
&= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i E [x_j^{\nu_j} (u_l)] \\
&\hspace{15em} * E [E [x_j^{\nu_j} (t([\xi_l(l)]_M)) | \xi_l^*(l)]] \\
&\hspace{15em} \text{(BY 条件付き期待値の定理)} \\
&= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i U_l^*(z_j) * E [\{H_l^*(z_j)\} [\xi_l^*(l)]_M] \quad \dots (2-7) \\
&\hspace{15em} \text{(BY APPENDIX)}
\end{aligned}$$

(2-7)式において,

$$K_l^*(y) \triangleq E [y^{[\xi_l^*(l)]_M}] \quad \dots (2-8)$$

と定義すると,

$$G_{i+1}^*(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i U_l^*(z_j) K_l^*(H_l^*(z_j)) \quad \dots (2-9)$$

$$G_i^*(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^{i-1} U_l^*(z_j) K_l^*(H_l^*(z_j)) \quad \dots (2-10)$$

(2-8)式を母関数 $G_l^*(x_1, \dots, x_N)$ で記述すると次式で表わすことができる.

$$K_l^*(y) = y^M + \sum_{b_l=0}^{M-1} \frac{1}{b_l!} \frac{\partial^{(b_l)}}{\partial x_l^{(b_l)}} G_l^*(1, \dots, x_l, \dots, 1) \Big|_{x_l=0} (y^{b_l} - y^M) \quad \dots (2-11)$$

一方, (2-10)式より, i -th Queueの特性は次式で表わすことができる.

$$\begin{aligned}
G_i^*(1, \dots, x_i, \dots, 1) &= \prod_{l=i}^{i-1} U_l^*(z_l) K_l^*(H_l^*(z_l)) \\
&= \prod_{l=1}^N U_l^*(z_l) K_l^*(H_l^*(z_l)) \quad \dots (2-12)
\end{aligned}$$

(2-11), (2-12)式より, $\frac{\partial^{(b_i)}}{\partial x_i^{(b_i)}} G_i^*(1, \dots, x_i, \dots, 1) \Big|_{x_i=0}$

(FOR $b_i=0, 1, \dots, M-1$; $i=1, 2, \dots, N$) を決定することができる.

$\frac{\partial^{(b_i)}}{\partial x_i^{(b_i)}} G_i^* (1, \dots, x_i, \dots, 1) |_{x_i=0}$ を決定すれば, $K_i^* (x_i)$, $G_i^* (1, \dots, x_i, \dots, 1)$ (FOR $i=1, 2, \dots, N$) が決定できる.

しかし, $\frac{\partial^{(b_i)}}{\partial x_i^{(b_i)}} G_i^* (1, \dots, x_i, \dots, 1) |_{x_i=0}$ に対する陽表現を得ることは, 非常に困難である. 何故ならば, 陽表現を得るためには, (2-12)式に対する b_i 階微分 (FOR $b_i = 0, 1, \dots, M-1$) と, (2-11)式に対する c_i 階微分 (FOR $c_i = 0, 1, \dots, M-1$) を連立させなければならぬ. この際, 連立させるべき変数が積表現になっていること, i に対しても連立させなくてはいけないため, 非常に困難となる.

以下, 対称なMODEL に対して考えてゆく. (対称なMODELでは, 高次方程式を連立する問題に帰着される.) 対称なMODEL に対しては, あるひとつのQueueの特性を決定すれば, 十分である. そこで, 以下, 1-st QUEUEでの特性を決定してゆく. (2-10), (2-11), (2-12)式を対称なMODEL に対する表現にすると, 次の様になる.

$$G_1^* (x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N \{ U^* (z_j) K^* (H^* (z_j)) \}^{N-j+1} \quad \dots\dots (2-13)$$

$$G_1^* (x, 1, \dots, 1) = \{ U^* (z) K^* (H^* (z)) \}^N \quad \dots\dots (2-14)$$

$$K^* (y) = y^M + \sum_{b=0}^{M-1} \frac{1}{b!} \frac{\partial^{(b)}}{\partial x^{(b)}} G_1^* (x, 1, \dots, 1) |_{x=0} (y^b - y^M) \quad \dots\dots (2-15)$$

(2-14), (2-15)式から, $\frac{\partial^{(b)}}{\partial x^{(b)}} G_1^* (x, 1, \dots, 1) |_{x=0}$ (FOR $b=0, 1, \dots, M-1$) を決定すれば, $K^* (x)$, $G_1^* (x, 1, \dots, 1)$ が決定でき, 諸特性を求めることができる.

以下, 処理時間分布が一定分布の場合, $\frac{\partial^{(b)}}{\partial x^{(b)}} G_1^* (x, 1, \dots, 1) |_{x=0}$ を決定するアルゴリズムを示す. (本論文の結果は, 処理時間分布・歩行時間分布が一定分布でなくても任意分布に対して 分布が与えられれば, 母関数は決定できる.)

(2-15)式を Matrix表現すると,

$$\begin{pmatrix} K^*(y) - y^M \\ K^*(y) - My^{M-1} \\ \dots\dots \\ K^*(y) - M!y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - y^M & y - y^M & \dots\dots & y^{M-1} - y^M \\ -My^{M-1} & 1 - My^{M-1} & \dots\dots & (M-1)y^{M-2} - My^{M-1} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ -M!y & -M!y & \dots\dots & (M-1)! - M!y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^* (0, 1, \dots, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} G_1^* (x, 1, \dots, 1) |_{x=0} \\ \dots\dots \\ \frac{\partial^{(M-1)}}{\partial x^{(M-1)}} G_1^* (x, 1, \dots, 1) |_{x=0} \end{pmatrix} \quad \dots\dots (2-16)$$

$\cong D$

(2-16) 式を逆変換し, $\frac{\partial^{(b)}}{\partial x^{(b)}} G_1^*(x, 1, \dots, 1) |_{x=0}$ を $K^*(y)$ の関数として表わすと,

$$\begin{pmatrix} G_1^*(0, 1, \dots, 1) \\ \frac{\partial}{\partial x} G_1^*(x, 1, \dots, 1) |_{x=0} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial^{(M-1)}}{\partial x^{(M-1)}} G_1^*(x, 1, \dots, 1) |_{x=0} \end{pmatrix} = \frac{1}{|D|} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{M1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{M2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1M} & \alpha_{2M} & \dots & \alpha_{MM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^*(y) - y^M \\ K^{*\prime}(y) - M y^{M-1} \\ \dots\dots\dots \\ K^{*(M-1)}(y) - M! y \end{pmatrix}$$

(但し, α_{ij} は Matrix D の小行列式, $i, j=1, 2, \dots, M$) (2-17)

(2-17) 式 $\{y \leftarrow \text{EXP}(-\rho)\}$ と

(2-14) 式の b 階微分式 (FOR $b=0, 1, \dots, M-1$) $\{x \leftarrow 0\}$ とを連立させると,

$K^*(\text{EXP}(-\rho))$ に対する高次方程式が得られ, かつ各 $\frac{\partial^{(b)}}{\partial x^{(b)}} G_1^*(x, 1, \dots, 1) |_{x=0}$ が $K^*(\text{EXP}(-\rho))$ の関数として決定できる. これが決定されると母関数が決定できる.

以下, 各 M に対し, このアルゴリズムを適用した結果を示す.

[F O R M = 1]

(2-14), (2-15) 式より,

$$\begin{aligned} G_1^*(x, 1, \dots, 1) &= \{U^*(z) K^*(H^*(z))\}^N \\ &= \text{EXP}(-Nzu) \{K^*(\text{EXP}(-zh))\}^N \end{aligned} \quad \dots\dots (2-18)$$

$$K^*(y) = y^M + (1-y) G_1^*(0, 1, \dots, 1) \quad \dots\dots (2-19)$$

(2-19) 式に於ける $G_1^*(0, 1, \dots, 1)$ を決定すれば, 両母関数は, 決定できる.

(2-18) 式より,

$$\begin{aligned} G_1^*(0, 1, \dots, 1) &= \text{EXP}(-N\lambda u) \{K^*(\text{EXP}(-\lambda h))\}^N \\ &= \text{EXP}(-a\rho) \{K^*(\text{EXP}(-\rho))\}^N \end{aligned} \quad \dots\dots (2-20)$$

(但し, $a = Nu/h$; $\rho = \lambda h$) (2-21)

(2-19), (2-20) 式より,

$$\begin{aligned} \{1 - \text{EXP}(-\rho)\} \text{EXP}(-a\rho) \{K^*(\text{EXP}(-\rho))\}^N \\ - K^*(\text{EXP}(-\rho)) + \text{EXP}(-\rho) = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots (3-22)$$

(2-22) 式は, $K^*(\text{EXP}(-\rho))$ に関する N 次方程式である. この式の解を

$$\alpha \triangleq K^*(\text{EXP}(-\rho)) \quad ; \alpha \text{ is real. } 0 < \alpha < 1 \quad \dots (2-23)$$

と定義すると 母関数は, 次の様に決定できる.

$$G_1^*(x, 1, \dots, 1) = \frac{\text{EXP}(-Nzu) \{K^*(\text{EXP}(-zh))\}^N}{\dots} \quad (2-24)$$

$$K^*(y) = \frac{\{(1-\alpha) / (1-\text{EXP}(-\rho))\} y}{+ (\alpha - \text{EXP}(-\rho)) / (1-\text{EXP}(-\rho))} \quad \dots (2-25)$$

(2-24), (2-25) 式より, 平均特性は 以下の様に決定できる.

$$G_1^*(0, 1, \dots, 1) = \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N \quad \dots (3-26)$$

$$\bar{k} = 1 - G_1^*(0, 1, \dots, 1) \quad \dots (3-27)$$

$$\bar{g} = (a + N\bar{k}) \rho \quad \dots (3-28)$$

$$\bar{q} = \bar{g} - \bar{k} \quad \dots (3-29)$$

$$\bar{c} / \bar{h} = \bar{g} / \rho = a + N\bar{k} \quad \dots (3-30)$$

$$\text{The average Pr of reject} = \bar{q} / \bar{g} = 1 - \bar{k} / \bar{g} \quad \dots (3-31)$$

ここで, \bar{k} : 平均処理呼数

\bar{g} : 平均待ち呼数

\bar{q} : 平均棄却呼数

\bar{c} : 平均サイクル時間 $\dots \bar{c} / \bar{h}$: 正規化平均サイクル時間

とした.

[F O R M = 2]

(2-14), (2-15) 式より,

$$G_1^*(x, 1, \dots, 1) = \{U^*(z) K^*(z)\}^N \\ = \frac{\{\text{EXP}(-zu) K^*(\text{EXP}(-zh))\}^N}{\dots} \quad (2-32)$$

$$K^*(y) = \frac{y^2 + (1-y^2) G_1^*(0, 1, \dots, 1)}{+ (y-y^2) \frac{\partial}{\partial x} G_1^*(x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0}} \quad \dots (2-33)$$

$M=1$ の場合と同様に まず, $K^*(\text{EXP}(-\rho))$ を決定する.

(2-32), (2-33) 式の導関数より導かれる代数方程式を示すと,

[簡単の為, $X \triangleq K^* (\text{EXP}(-\rho))$ とおく.]

$$\begin{aligned} & \frac{N\rho(1-\text{EXP}(-\rho))^2 \text{EXP}(-\rho(2a+1)) X^{2N-1}}{-\text{EXP}(-a\rho) [1+\rho(N+a)\text{EXP}(-\rho)]} \\ & \quad - \frac{\{1+\rho(2N+a)\} \text{EXP}(-2\rho)}{X^N} \\ & \quad - \frac{N\rho \text{EXP}(-\rho(3+a)) X^{N-1} + X - \text{EXP}(-2\rho)}{\dots\dots (2-34)} = 0 \end{aligned}$$

(2-34) 式の一実根を α とすると, (α is real ; $0 < \alpha < 1$)

$$G_1^* (0, 1, \dots, 1) = \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N \quad \dots\dots (2-35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} \\ & = \frac{(\alpha - \text{EXP}(-2\rho)) / \{ (1 - \text{EXP}(-\rho)) \text{EXP}(-\rho) \}}{-\{1 + 1/\text{EXP}(-\rho)\} \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N} \quad \dots\dots (2-36) \end{aligned}$$

(2-35), (2-36) 式より, 両母関数が決定できる.
以下, 平均特性を示す.

$$\bar{k} = 2 - 2G_1^* (0, 1, \dots, 1) - \frac{\partial}{\partial x} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} \quad \dots\dots (2-37)$$

$$\bar{g} = (a + N\bar{k}) \rho \quad \dots\dots (2-38)$$

$$\bar{q} = \bar{g} - \bar{k} \quad \dots\dots (2-39)$$

$$\bar{c}/\bar{h} = \bar{g}/\rho = a + N\bar{k} \quad \dots\dots (2-40)$$

$$\text{The Pr of reject} = \bar{q}/\bar{g} = 1 - \bar{k}/\bar{g} \quad \dots\dots (2-41)$$

[F O R M = 3]

(2-14), (2-15) 式より,

$$\begin{aligned} G_1^* (x, 1, \dots, 1) & = \{ U^* (z) K^* (H^* (z)) \}^N \\ & = \{ \text{EXP}(-zu) K^* (\text{EXP}(-zh)) \}^N \quad \dots\dots (2-42) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K^* (y) & = y^3 + (1-y^3) G_1^* (0, 1, \dots, 1) \\ & \quad + (y-y^3) \frac{\partial}{\partial x} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} \\ & \quad + \frac{1}{2} (y^2 - y^3) \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} \quad \dots\dots (2-43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(X^{2N-1} \text{の係数}) &= 2N\rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^3 \text{EXP}(-2a\rho) \\
&+ 2N^2 \rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^2(1-3\text{EXP}(-2\rho)) \text{EXP}(-2a\rho) \\
&+ 2N\rho \text{EXP}(-\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))\{a^2 \rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^2 \\
&\quad - 2(1+2\text{EXP}(-\rho))(1-\text{EXP}(-\rho))^2 - 2N\rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-3\text{EXP}(-\rho) \\
&\quad \quad + 3\text{EXP}(-2\rho))\} \text{EXP}(-2a\rho) \\
&+ 2N\rho \text{EXP}(-\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^3(1+\text{EXP}(-\rho)) \\
&\quad \quad \quad * \{2+(1+a\rho)\text{EXP}(-\rho)\} \text{EXP}(-2a\rho) \\
&- 2N\rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^2 \{2+(1+a\rho)\text{EXP}(-\rho)\} \\
&\quad \quad \quad * \{a+1-(a+2)\text{EXP}(-\rho)\} \text{EXP}(-2a\rho) \\
&+ 2N^2 \rho^3 \text{EXP}(-3\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))(2-3\text{EXP}(-\rho)) \\
&\quad \quad \quad * \{a+1-(a+2)\text{EXP}(-\rho)\} \text{EXP}(-2a\rho) \\
&- 2N(N-1) \rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^2(2-3\text{EXP}(-\rho)) \\
&\quad \quad \quad * \{2+(1+a\rho)\text{EXP}(-\rho)\} \text{EXP}(-2a\rho)
\end{aligned}$$

$$(X^{3N-3} \text{の係数}) = 2N^3 \rho^4 \text{EXP}(-7\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^2 \text{EXP}(-3a\rho)$$

$$\begin{aligned}
(X^{3N-2} \text{の係数}) &= 4N^2 \rho^3 \text{EXP}(-3\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^4 \text{EXP}(-3a\rho) \\
&+ N^2 \rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^2 [a^2 \rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^2 \\
&\quad - 2(1+2\text{EXP}(-\rho))(1-\text{EXP}(-\rho))^2 - 2N\rho^2 \text{EXP}(-2\rho)\{1-3\text{EXP}(-\rho) \\
&\quad \quad \quad + 3\text{EXP}(-2\rho)\}] \text{EXP}(-3a\rho) \\
&- 2N^2 \rho^3 \text{EXP}(-3\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^3 \{2+(1+a\rho)\text{EXP}(-\rho)\} \\
&\quad \quad \quad * \{a+1-(a+2)\text{EXP}(-\rho)\} \text{EXP}(-3a\rho) \\
&+ N(N-1) \rho^2 \text{EXP}(-2\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^4 \{2+(1+a\rho)\text{EXP}(-\rho)\}^2 \text{EXP}(-3a\rho)
\end{aligned}$$

$$(X^{4N-3} \text{の係数}) = 2N^3 \rho^4 \text{EXP}(-4\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))^5 \text{EXP}(-4a\rho)$$

..... (2-45)

以上の多項式の解き、この多項式の解を α (α is real; $0 < \alpha < 1$) とすると、

$$\underline{K^*(\text{EXP}(-\rho))} = \alpha$$

$$\underline{K^*(\text{EXP}(-\rho))}$$

$$= [\text{EXP}(-3\rho) - \text{EXP}(-\rho)(1-\text{EXP}(-\rho))] \alpha$$

$$\begin{aligned}
& - (1 - \text{EXP}(-\rho)) \{ 2 - (1 - a\rho) \text{EXP}(-\rho) \\
& \quad - (1 + a\rho) \text{EXP}(-2\rho) \} \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N] \\
& / [\text{EXP}(-\rho) (1 - \text{EXP}(-\rho)) \\
& \quad * \{ 1 + N\rho (1 - \text{EXP}(-\rho)) \text{EXP}(-\rho(a+1)) \alpha^{N-1} \}] \\
& \quad \dots\dots (2-46)
\end{aligned}$$

$$K^{*''}(\text{EXP}(-\rho))$$

$$\begin{aligned}
& = [2 (1 - \text{EXP}(-\rho)) / \text{EXP}(-2\rho)] \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N \\
& \quad - [2 \{ 1 - 3\text{EXP}(-\rho) + 3\text{EXP}(-2\rho) \} \\
& \quad \quad \quad / \{ \text{EXP}(-2\rho) (1 - \text{EXP}(-\rho))^2 \}] \alpha \\
& \quad + 2\text{EXP}(-\rho) / (1 - \text{EXP}(-\rho)) \\
& \quad + [2 (1 - 2\text{EXP}(-\rho)) \{ \text{EXP}(-3\rho) + (2 - 3\text{EXP}(-\rho)) \alpha \\
& \quad - (1 - \text{EXP}(-\rho))^2 (2 + (1 + a\rho) \text{EXP}(-\rho)) \\
& \quad \quad \quad * \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N] \\
& / [\text{EXP}(-2\rho) (1 - \text{EXP}(-\rho))^2 \\
& \quad * \{ 1 + N\rho (1 - \text{EXP}(-\rho)) \text{EXP}(-\rho(a+1)) \alpha^{N-1} \}] \\
& \quad \dots\dots (2-47)
\end{aligned}$$

$$G_1^* (0, 1, \dots, 1) = \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N \quad \dots\dots (2-48)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} \\
& = a\rho \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N + N\rho \text{EXP}(-\rho(a+1)) \alpha^{N-1} K^{*'}(\text{EXP}(-\rho)) \\
& \quad \dots\dots (2-49)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} \\
& = a^2 \rho^2 \text{EXP}(-a\rho) \alpha^N \\
& \quad + 2Na\rho^2 \text{EXP}(-\rho(a+1)) \alpha^{N-1} K^{*'}(\text{EXP}(-\rho)) \\
& \quad + N\rho^2 \text{EXP}(-\rho(a+1)) \alpha^{N-2} \\
& \quad * [(N-1) \{ K^{*'}(\text{EXP}(-\rho)) \}^2 + \alpha K^{*''}(\text{EXP}(-\rho))] \\
& \quad \dots\dots (2-50)
\end{aligned}$$

(2-45) 式の解 α と (2-48), (2-49), (2-50) 式より, 母関数 (2-42), (2-43) 式が決定できる.

以下、平均特性を示す。

$$\bar{k} = 3 - 3G_1^* (0, 1, \dots, 1) - 2 \frac{\partial}{\partial x} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} G_1^* (x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} \quad \dots (2-51)$$

$$\bar{g} = (a + N\bar{k}) \rho \quad \dots (2-52)$$

$$\bar{q} = \bar{g} - \bar{k} \quad \dots (2-53)$$

$$\bar{c} / \bar{h} = \bar{g} / \rho = a + N\bar{k} \quad \dots (2-54)$$

$$\text{The Pr of reject} = \bar{q} / \bar{g} = 1 - \bar{k} / \bar{g} \quad \dots (2-55)$$

第三章 MODEL B (lower bound model) の解析

[解析MODEL B]

解析MODEL B (Lower Bound MODEL)は、解析MODEL Aに対し 処理中のQueue への到着呼を強制的に棄却する解析MODEL である。他は、解析MODEL Aと等しい。

以下、この解析MODEL に対し 解析を行なつてゆく。

[状態方程式] FOR MODEL B

$$\xi_{i+1}^{(n)}(i) = \nu_i (u_i) \quad \dots (3-1)$$

$$\xi_{i+1}^{(n)}(j) = \xi_i^{(n)}(j) + \nu_j (u_i + t([\xi_i^{(n)}(i)]_M)) \quad \dots (3-2) \quad (\text{FOR } j \neq i)$$

{但し, $[b]_M = \text{MIN}(b, M)$ }

(3-1), (3-2) 式をMODEL Aの場合と同様に 再帰的に変形すると,

When $j \leq i$

$$\xi_{i+1}^{(n)}(j) = \nu_j (u_j) + \sum_{l=j+1}^i \nu_l (u_l + t([\xi_l^{(n)}(l)]_M)) \quad \dots (3-3)$$

When $j > i$

$$\xi_{i+1}^{(n)}(j) = \nu_j (u_j) + \sum_{l=j+1}^N \nu_l (u_l + t([\xi_l^{(n-1)}(l)]_M)) + \sum_{l=1}^i \nu_l (u_l + t([\xi_l^{(n)}(l)]_M)) \quad \dots (3-4)$$

serverの到着時点に対する状態はエルゴート性を満足するため、定常状態は存在する。定常状態での状態変数を $\xi_i^*(j)$ と表すと、(3-3)、(3-4)式より、

$$\xi_{i+1}^*(i) = \nu_i(u_i) \quad \dots (3-5)$$

$$\xi_{i+1}^*(j) = \nu_j(u_j) + \sum_{l=j+1}^i \nu_l(u_l + t([\xi_l^*(l)]_M)) \quad (\text{FOR } j \neq i) \quad \dots (3-6)$$

[母関数表示]

$$\begin{aligned} G_{i+1}^*(x_1, \dots, x_N) &= E \left[\prod_{j=1}^N x_j^{\xi_{i+1}^*(j)} \right] \\ &= E \left[\prod_{j=1, j \neq i}^N x_j^{\nu_j(u_j) + \sum_{l=j+1}^i \nu_l(u_l + t([\xi_l^*(l)]_M))} * x_i^{\nu_i(u_i)} \right] \\ &= E \left[\prod_{j=1, j \neq i}^N x_j^{\nu_j(u_j) + \sum_{l=j+1}^i \nu_l(u_l) + \sum_{l=j+1}^i \nu_l(t([\xi_l^*(l)]_M))} * x_j^{\nu_i(u_i)} \right] \\ &= E \left[\prod_{j=1}^N x_j^{\sum_{l=j}^i \nu_l(u_l)} * \prod_{j=1, j \neq i}^N x_j^{\sum_{l=j+1}^i \nu_l(t([\xi_l^*(l)]_M))} \right] \\ &= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i E \left[x_j^{\nu_l(u_l)} \right] * \prod_{j=1, j \neq i}^N \prod_{l=j+1}^i E \left[x_j^{\nu_l(t([\xi_l^*(l)]_M))} \right] \\ &= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i E \left[x_j^{\nu_l(u_l)} \right] * \prod_{j=1, j \neq i}^N \prod_{l=j+1}^i E \left[E \left[x_j^{\nu_l(t([\xi_l^*(l)]_M))} \mid \xi_l^*(l) \right] \right] \\ &= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i U_l^*(z_j) * \prod_{j=1, j \neq i}^N \prod_{l=j+1}^i E \left[\{ H_l^*(z_j) \} [\xi_l^*(l)]_M \right] \\ &= \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^i U_l^*(z_j) * \prod_{j=1, j \neq i}^N \prod_{l=j+1}^i K_l^*(H_l^*(z_j)) \quad \dots (3-7) \end{aligned}$$

ここで、(2-8)式と同様に

$$K_i^*(y) \triangleq E[y^M [\xi_i^*(l)]^M] \quad \dots\dots (3-8)$$

と定義した。

(3-7, 8)式より、

$$G_i^*(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N \prod_{l=j}^{i-1} U_l^*(z_j) \prod_{j=1, j \neq i-1}^N \prod_{l=j+1}^{i-1} K_l^*(H_l^*(z_j)) \quad \dots\dots (3-9)$$

(3-9)式より、i-th Queueの特性を表わすと

$$\begin{aligned} G_i^*(1, \dots, x_i, \dots, 1) &= \prod_{l=i}^{i-1} U_l^*(z_i) \prod_{l=i+1}^{i-1} K_l^*(H_l^*(z_i)) \\ &= \prod_{l=1}^N U_l^*(z_i) \prod_{l=1, l \neq i}^N K_l^*(H_l^*(z_i)) \quad \dots\dots (3-10) \end{aligned}$$

定義式(3-8)より、

$$K_i^*(y) = y^M + \sum_{b_i=0}^{M-1} \frac{1}{b_i!} \frac{\partial^{(b_i)}}{\partial x_i^{(b_i)}} G_i^*(1, \dots, x_i, \dots, 1) \Big|_{x_i=0} (y^{b_i} - y^M) \quad \dots\dots (3-11)$$

以下、対称なMODELを考えてゆく。

(3-10), (3-11)式を対称なMODELに対する表現で表わすと、次の様になる。

$$G_1^*(x_1, \dots, x_N) = \prod_{j=1}^N \{U^*(z_j)\}^{N-j+1} \{K^*(H^*(z_j))\}^{N-j} \quad \dots\dots (3-12)$$

$$G_1^*(x, 1, \dots, 1) = \{U^*(z)\}^N \{K^*(H^*(z))\}^{N-1} \quad \dots\dots (3-13)$$

$$K^*(y) = y^M + \sum_{b=0}^{M-1} \frac{1}{b!} \frac{\partial^{(b)}}{\partial x^{(b)}} G_1^*(x, 1, \dots, 1) \Big|_{x=0} (y^b - y^M) \quad \dots\dots (3-14)$$

(3-13, 14)式に対する導関数を連立することにより、2章と同様に各Mに対して母関数は決定できる。[(3-13, 14)式の導関数より導かれる代数方程式は、2章で与えた各Mに対する代数方程式でNを(N-1)で置換した場合と等しい。]

第四章 数値解析結果

各N (N=2, 6, 10) を固定してパラメータをMとした場合の平均処理呼数—Total Traffic Intensity 特性のグラフをFIG. 4-1, 2, 3 に示した。

これらのグラフを比較するとNが小さい時は、Upper Bound 特性値とLower Bound 特性値の差は、かなり大きい。Nの増大と共にこの差は、減少してくる。このことは、各Mを固定してパラメータをNとした場合の平均処理呼数—Total Traffic Intensity 特性が端的に表わしている。

FIG. 4-4 のグラフによりUpper Bound 特性値は、Nの増大に対してさほど変化はないが、Lower Bound 特性値は、急激にUpper Bound 特性値に近づくことが分かる。

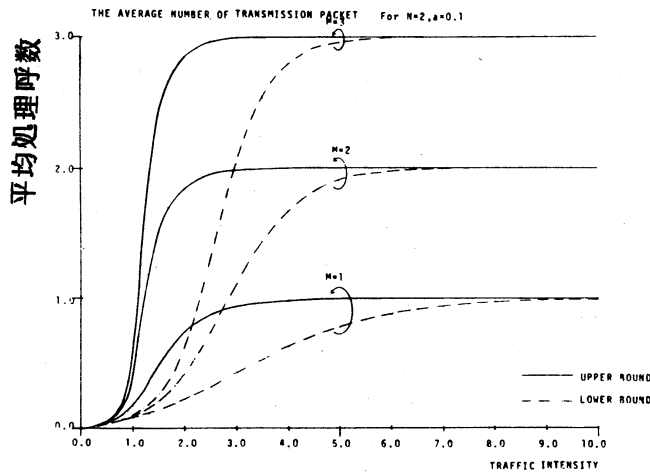


FIG. 4-1 平均処理呼数特性
FOR N=2, a=0.1

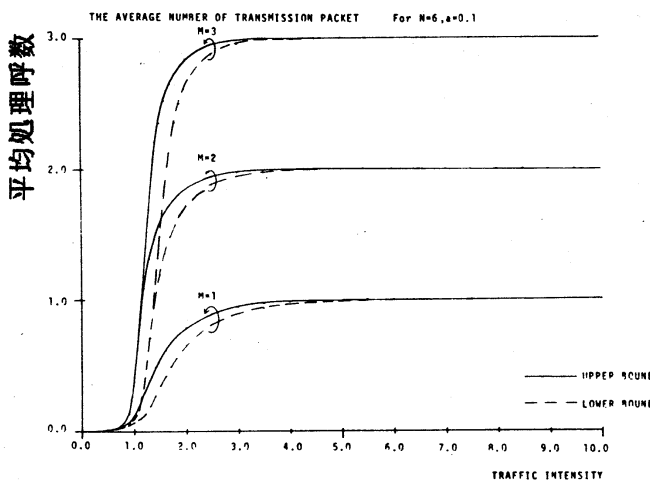


FIG. 4-2 平均処理呼数特性
FOR N=6, a=0.1

Queue 数Nの増大に共ない 1QueueでのService 時間が1Cycleに占める割合が減少する為、1Cycle中に到着した呼の中で、Service中に到着した呼の割合が減少する。このことは、MODEL BでのService中の到着呼を全て強制的に棄却する仮定がLower Boundを与えながらかつ、有限BUFFER MODELの特性に近づいていることを意味する。(しかしながら、MODEL Bは、潜在的な強制的棄却を含む。)

MODEL Aの低Traffic状態での有効性は明らかであるから、高Traffic状態を考える。この状態でNが大であるという条件下では、上述した様にMODEL Bの特性が有限BUFFERの特性に近づきかつ、MODEL AとMODEL Bの特性差が減少してくることでMODEL Aの有効性が示せる。

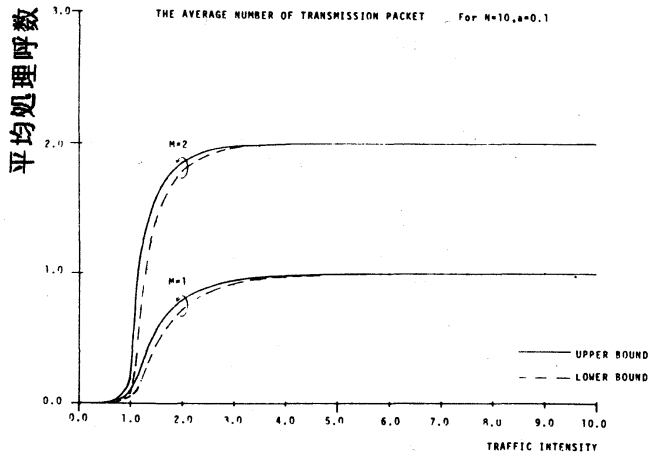


FIG. 4-3 平均処理呼数特性
FOR $N=10$, $a=0.1$

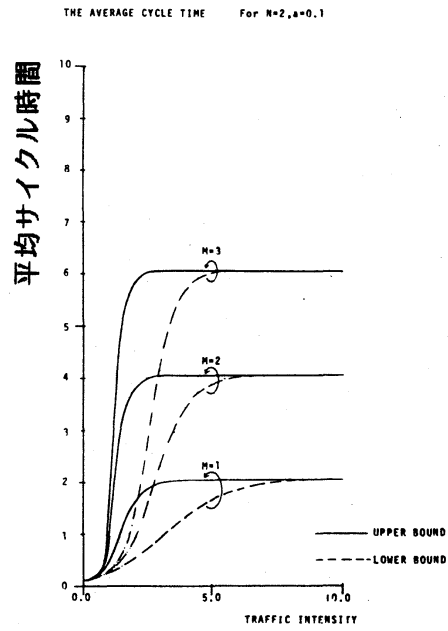


FIG. 4-5 平均サイクル時間特性
FOR $N=2$, $a=0.1$

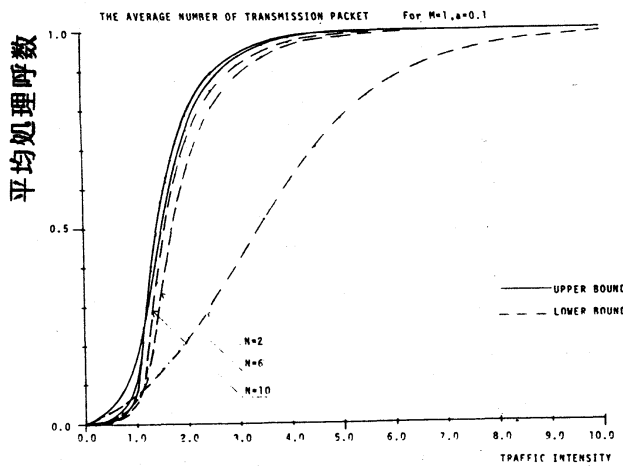


FIG. 4-4 平均処理呼数特性
FOR $M=1$, $a=0.1$

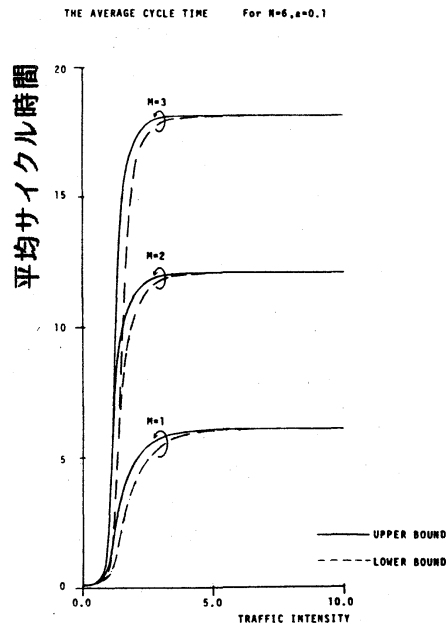


FIG. 4-6 平均サイクル時間特性
FOR $N=6$, $a=0.1$

平均サイクル時間—Total Traffic Intensity 特性をFIG. 5, 6 に与えた。ここで与えた平均サイクル時間は、平均処理呼数の一次関数となっている為、FIG. 4-1, 2, 3, 4 で与えた考察がここでも確めることができる。

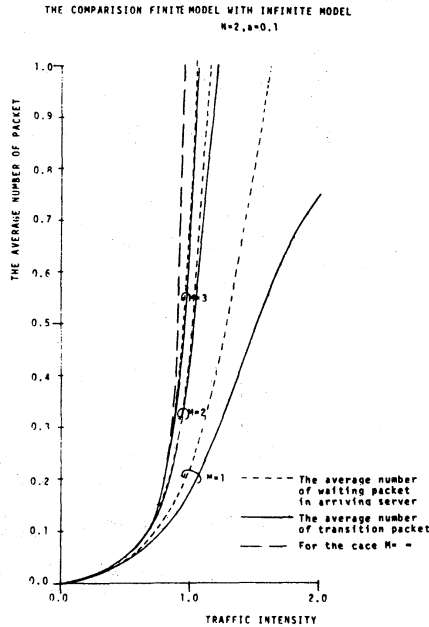


FIG. 4-7 有限BUFFERと
無限BUFFERとの比較
FOR $N=2$, $a=0.1$

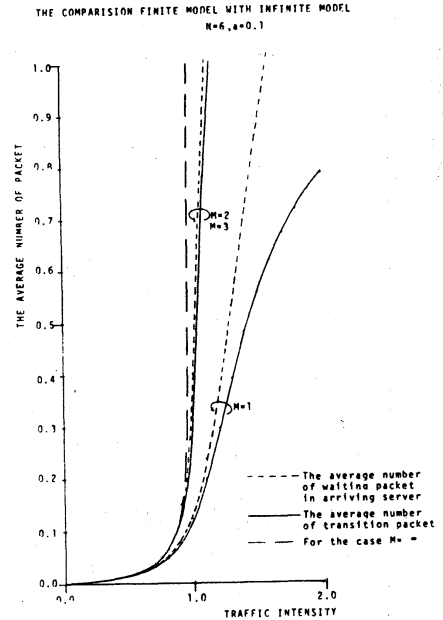


FIG. 4-8 有限BUFFERと
無限BUFFERとの比較
FOR $N=6$, $a=0.1$

FIG. 4-7, 8 には、BUFFER数が 無限大の場合と有限 (M) の場合に対する比較を示した。

点線は、SERVER到着時点直前の仮想BUFFERでの平均待ち呼数—Total Traffic Intensity 特性である。

実線は、SERVER到着時点直後に有限BUFFERに移動する平均呼数—Total Traffic Intensity 特性である。ここで この実線は、Service 規律をゲート式としている為、平均処理呼数—Total Traffic Intensity 特性となる。

鎖線には、BUFFER数が 無限大の場合を示した。BUFFER数が無限大のCaseでは、棄却が生じない為、平均待ち呼数と平均処理呼数は等しい。

これらのグラフにより、M=1のCaseとM=2のCaseを 比較するとTraffic Intensity に対する平均待ち呼数の立ち上がりの変化は、急激に大きくなりMが大きくなるに従い、さほど変化がないことがわかる。(絶対値で比べると 差は大きい、相対的には あまり変化がない。) このことから、BUFFER数の最適値を決定する場合、BUFFER数を大きく取り過ぎても特性はあまり向上せずに Costの増大を招くだけであることが分かる。

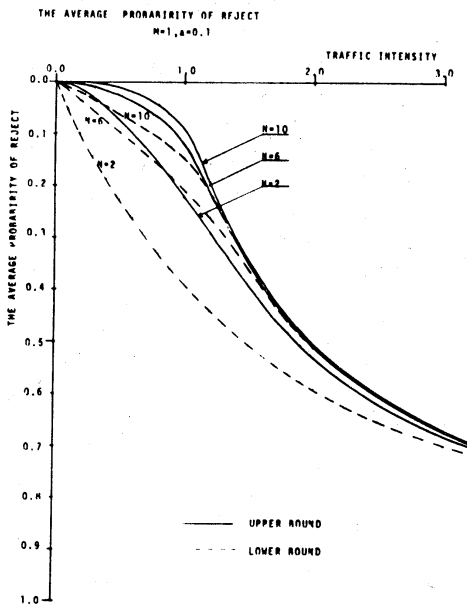


FIG. 4-9 平均棄却率特性
FOR $M=1, a=0.1$

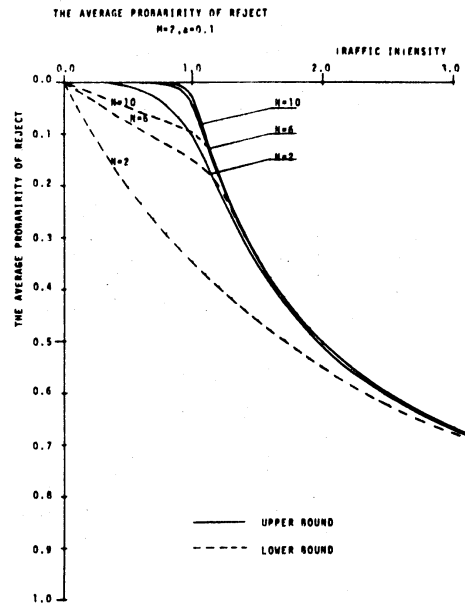


FIG. 4-10 平均棄却率特性
FOR $M=2, a=0.1$

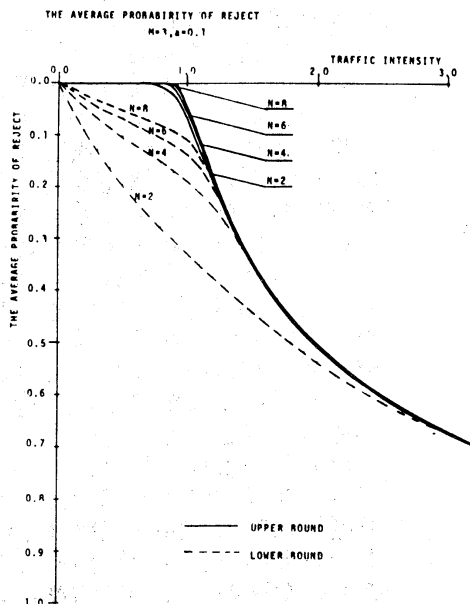


FIG. 4-11 平均棄却率特性
FOR $M=3, a=0.1$

各Mに対する平均棄却率—
Total Traffic Intensity 特性
をFIG. 4-9, 10, 11 に示した。

これらのグラフにより、MODEL A での棄却率は、低Traffic 状態では ほとんど零に近いことが 確かめられる。このことから、MODEL Aの低Traffic 状態での有効性が示せる。

また、高Traffic 状態では、Nの増大により UPPER, LOWER BOUND 特性値が近づくことより 高Traffic 状態でのMODEL Aの有効性が、示せる。

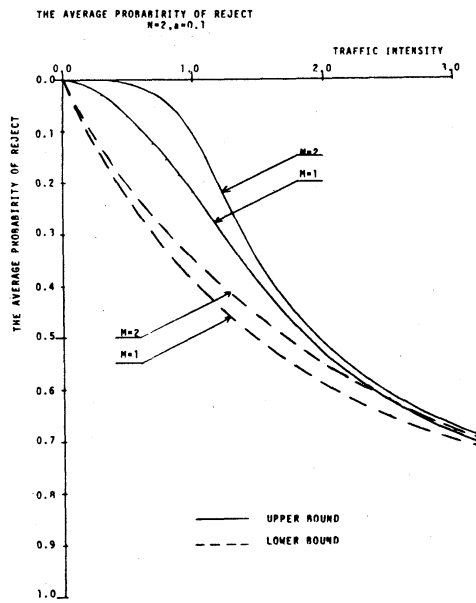


FIG. 4-12 平均棄却率特性
FOR $N=2, a=0.1$

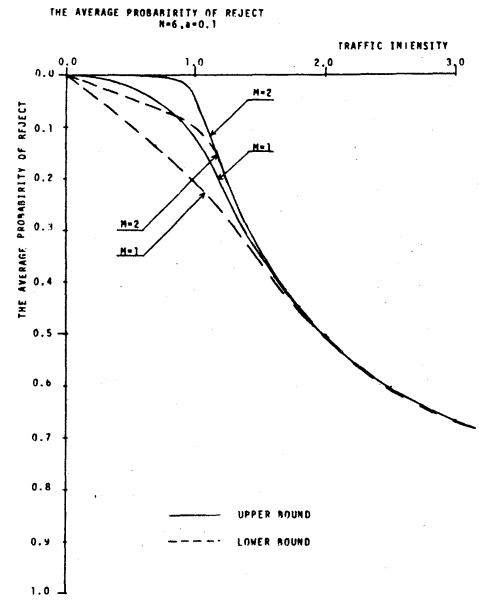


FIG. 4-13 平均棄却率特性
FOR $N=6, a=0.1$

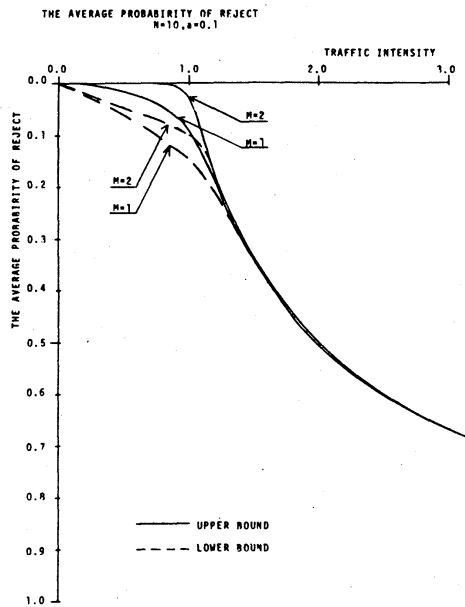


FIG. 4-14 平均棄却率特性
FOR $N=10, a=0.1$

Fig. 3-12, 13, 14には、Queue数 $N=2, 6, 10$ に対し、パラメータを有限BUFFER数 M とした場合の平均棄却率—Total Traffic Intensity 特性を示した。

このグラフの数値解析結果より実際のSystemへの応用例を示す。Systemを設計する際、BUFFER数の最適値を得ることはCostの面で非常に重大な点である。BUFFER数を十分大きく取っておけば、棄却は生じない為、System特性は向上する。しかし、Costがかかる。逆にCostを押えBUFFER数を小さく設計すると棄却が頻繁に生じ、System特性が劣化する。

Fig. 4-13より Traffic Intensity が 0.00 から 0.15 までの範囲内では BUFFER数は 1個で十分であり、0.15 から 0.60 までの範囲内ではBUFFER数は 2個で十分であることが分かる。但し、ここで議論しているBUFFER数は、Packet単位(Job単位)である。

第五章 結論

従来の研究では、BUFFER数を無限大としたCaseの解析が大部分を占めている。ここで、解析の目的を考えると 現実のSystemをよりExact な形でしかも、よりSimpleな関数形として表わすことにあるから、現実のSystemをよりExact に関数形として表現するためには、BUFFER数を有限とした場合の解析的なApproachが必要となる。

有限BUFFER多重待ち行列を解析する際、第一章でも述べた様に 解析的な困難さがある。そこで、本論文では、有限BUFFERの特性を十分に表現し、かつ、解析的な困難さを最小限におさえたMODEL を仮想BUFFERを導入することにより実現し、このMODEL Aに対する解析を与えた。

このMODEL Aの有限BUFFER多重待ち行列MODEL に対する有効性を示す為に MODEL Aの特性が、有限BUFFER多重待ち行列MODEL の特性に対するUpper Bound を与えることから、Lower Bound 特性を与えるMODEL を考え、両MODEL の数値解析結果から MODEL Aは、Queue 数Nが大である時、十分に有限BUFFER多重待ち行列MODEL を表現していることを示した。(棄却が、あまり生じない低Traffic 状態では、任意のQueue 数に対して 十分に有限BUFFER多重待ち行列MODEL を表現している。)

本章で与えた数値解析結果の現実のSystemの応用例として平均棄却率—Total Traffic Intensity 特性より Traffic 帯域に於けるBUFFER数の最適値を示した。

解析的には、制限項の加わるMODEL の解析では、母関数を決定する際、未決定関数が生じる。そして、最終的には、この未決定関数を如何にして決定するかという問題に帰着される。本論文では、この関数を決定する為に、

SERVERの到着時点の状態数分布に対する母関数と制限項を含んだ形での処理呼数分布に対する母関数を定義した。

この2つの母関数の関係を考えてみると、BUFFER数をMとした場合、0から(M-1)までの状態数分布と処理呼数分布は、等しい分布をとるので、処理呼数分布に対する母関数を状態数分布に対する母関数の導関数で表わすことができる。また、状態方程式により、状態数分布に対する母関数は 処理呼数分布に対する母関数の積として表わすことができる。母関数間の両関係式に対して 0階から(M-1)階導関数までのM個の方程式をそれぞれ、連立することにより 各Mに対して両母関数を決定した。

以上で述べた様に 本論文では、Cycle TimeがSystem状態数の関数となっている多重待ち行列で入力をMで制限する場合の近似解析手法を与えた。

<<参考文献>>

- [1] 橋田温：“多重待ち行列の解析[II]—ゲート式—”研究実報;VOL.19,NO.10,pp1855-1864,(1970)
- [2] PIERRE N.ROBILLAD:“An Analysis of a Loop Switching System with Multirank Buffer Based on the Markov Process”
IEEE TRANSACTION ON COM,VOL.COM-22,NO.11,NOVEMBER 1974

[APPENDIX]

$E [x_j^{\nu_j(t([\xi_1^*(1)]_M))} | \xi_1^*(1)] = \{H_1^*(z_j)\} [\xi_1^*(1)]_M$ の導出.

$$E [x_j^{\nu_j(t([\xi_1^*(1)]_M))} | \xi_1^*(1)]$$

$= \{E [x_j^{\nu_j(t(1))}] \} [\xi_1^*(1)]_M$ BY サービス時間分布は、各 queue で同一であることと、到着がランダムであることより、各呼のサービス時間中に到着する呼数分布は同一かつ独立である。

$$= \left\{ \sum_{a=0}^{\infty} \Pr \{ \nu_j(t(1))=a \} * x_j^a \right\} [\xi_1^*(1)]_M$$

$$= \left[\sum_{a=0}^{\infty} \int_0^{\infty} [\{\lambda_j t(1)\}^a / a!] e^{-\lambda_j t(1)} dH_1(t(1)) * x_j^a \right] [\xi_1^*(1)]_M$$

BY 到着はポアソン過程

$$\left(\begin{array}{l} \Pr \{ \nu_j(t(1))=a \} \\ = \int_0^{\infty} [\{\lambda_j t(1)\}^a / a!] e^{-\lambda_j t(1)} dH_1(t(1)) \end{array} \right)$$

$$= \left\{ \int_0^{\infty} \sum_{a=0}^{\infty} [\{\lambda_j x_j t(1)\}^a / a!] e^{-\lambda_j t(1)} dH_1(t(1)) \right\} [\xi_1^*(1)]_M$$

$$= \left\{ \int_0^{\infty} e^{\lambda_j x_j t(1)} * e^{-\lambda_j t(1)} dH_1(t(1)) \right\} [\xi_1^*(1)]_M$$

$$= \left\{ \int_0^{\infty} e^{-\lambda_j (1-x_j) t(1)} dH_1(t(1)) \right\} [\xi_1^*(1)]_M$$

$$= \{H_1^*(\lambda_j (1-x_j))\} [\xi_1^*(1)]_M$$

BY $H_1^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-s t} dH_1(t)$

$$= \{H_1^*(z_j)\} [\xi_1^*(1)]_M$$

BY $z_j = \lambda_j (1-x_j)$