数理解析研究所講究録
第521巻 1984年 29-46

Eventually covering family について

長崎大学 教養 森川良三 (Ryozo Morikawa)

1. 序言 まず用語について説明する。$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ は通常の意味とする。$\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ について $S(\alpha, \beta)$ によって集合 $\{[\alpha n + \beta] : n \in \mathbb{N}\}$ を表わす。但しここで [ ] は Gauß 記号である。

定義1. $\{S(\alpha_i, \beta_i) : 1 \leqq i \leqq k\}$ が eventually covering family (ECF と略記する) であるとは、十分大きな自然数が $\exists 1\, i$ の $S(\alpha_i, \beta_i)$ に入っていることをいう。

定義2. 順序対の集合 $\{(r_i, m_i) : 1 \leqq i \leqq s\}$ が exactly covering set (ECS) であるとは、各整数 n について、$\exists 1\, i$ によって $n \equiv r_i \pmod{m_i}$ が成り立つことをいう。

定義3. ECS $\{(r_i, m_i) : 1 \leqq i \leqq s\}$ $(= E)$ が与えられた

時、$S(\alpha, \beta)$ から新しい family $\{S(\alpha m_i, \alpha r_i + \beta) : 1 \leqq i \leqq s\}$ をつくる。これを $S[E]$ と書く。

ところで ECF の構造に関して、次の Graham の結果 [3] が基本的である：

ECF $\{S(\alpha_i, \beta_i)\ 1 \leqq i \leqq k\}$ について、ある $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ ならば全ての $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ であって、それは $\{S_1[E_1], S_2[E_2]\}$ というタイプである。ここで $\{S_1, S_2\}$ は ECF、又 E_1、E_2 は ECS である。

一方、$k=2$ である ECF の構造は well known、つまり $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ について、$\{S(\alpha_1, \beta_1), S(\alpha_2, \beta_2)\}$ が ECF

$$\Longleftrightarrow \quad 1/\alpha_1 + 1/\alpha_2 = 1 \quad \& \quad \beta_1/\alpha_1 + \beta_2/\alpha_2 \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}.$$

従って、ある $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ であるような ECF は、二つの ECS の問題に帰着出来て、まあ分ったといえる。それに反して、全ての α_i が有理数である様な ECF については、問題は非常にこみ入ってくる。これが ECF の問題の特異的なところである。例えば次の予想（A. S. Fraenkel による）が未解決で残っている：

α_i 達が全て互いに異なる様な ECF は $1/\alpha_i = 2^i/(2^w - 1)$ $1 \leqq i \leqq w-1$ のものに限る。

この予想については、Erdös-Graham [1] に Striking な評がある。(問題の背景一般についても[1]を参照されたい。)

ある $\alpha_i \notin \mathbb{Q}$ の ECF については必ず等しい α_i の pair が出て来ることは ECS についてのよく知られたことから従う。

従って、以下では我々は 全ての $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ であるような ECF の構造を調べる。その考察のあらすじを[4]−[7]に沿って述べるのが本稿の目的である。更に折角の機会であるので、考え方の底にあるもの、及び これからの展望についても述べておく。又証明については、全くといっていい程言及出来なかったので、最後の部分に もっとも基本的な事実を二三述べておいた。それがせめて、その全般的な雰囲気の理解に資することを期待する。

2. まず問題を少し整理する。二、三簡単な事実を注意する。

(a) $\mathbb{Q} \ni \alpha = q/a$, $q, a \in \mathbb{N}$, $(q, a) = 1$ について、$S(\alpha, \beta)$ に与える β の影響は $[a\beta]$ の値にしかよらない。

(b) 全ての $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ のときには、ECF $\{S(\alpha_i, \beta_i) : 1 \leq i \leq k\}$ は、$n \in \mathbb{Z}$ にすることによって、$\mathbb{Z}$ 全体を丁度一重に cover する。

この二つの事実から、集合 $\{[(qn+b)/a] : n \in \mathbb{Z}\}$ を $S(q, a, b)$ と書くことにして、$\{S(q_i, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k\}$

が $\mathbb{Z}$ を一重に cover するものを 以下で ECF とよぶ。(これによって、非本質的なゴタゴタを避けることが出来る。)

ところで、容易に分るように、

$\{S(q_i, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k\}$ が ECF である

$\Longleftrightarrow$ $S(q_i, a_i, b_i)$ が互いに disjoint かつ $\sum_{i=1}^{k} a_i/q_i = 1$.

このうち、第二の条件はすぐチェック出来るから、問題は disjointness の方である。その criterion を与えたのが [4] であるが、その内容を次節で簡単に紹介する。

3. $S(q_i, a_i, b_i)$ $i=1, 2$ について、$(q_i, a_i) = 1$ とする。更に、$(q_1, q_2) = q$, $(a_1, a_2) = a$, $a_i = a u_i$ $(i=1, 2)$ とおく。

定理1. $S(q_i, a_i, b_i)$ $i=1, 2$ を適当に b_1, b_2 を選ぶことによって disjoint に出来る $\Longleftrightarrow$ 適当な $(x, y) \in N^2$ によって、$xu_1 + yu_2 = q - 2u_1u_2(a-1)$ にとれる。

この定理1の条件が満たされているとき、y の最小正の組を (x_0, y_0) とする。つまり $1 \leq y_0 \leq u_1$ である。更に $x_0 > u_2$ のときは、(x_1, y_1) を $x_1 = x_0 - u_2$, $y_1 = u_1 - y_0$ で定義する。

定理2. $S(q_1, a_1, b_1) \cap S(q_2, a_2, b_2) = \phi$

$\iff u_1 b_2 - u_2 b_1 \in E_1 \cup E_2 \pmod{q}$

ここで $E_1 = \{u_1 x + u_2 y + u_1 u_2 (a-1) : 0 \le x \le x_0 - 1,\ 1 \le y \le y_0\}$

$E_2 = \{u_1 x + u_2 y + u_1 u_2 (a-1) : 0 \le x \le x_1 - 1,\ y_0 + 1 \le y \le u_1\}$

($x_0 \le u_2$ のときは $E_2 = \phi$ と考える。)

証明のスケッチが [4] に与えてある。ところで $\alpha_1/\alpha_2 \notin \mathbb{Q}$ の場合に Th. Skolem が criterion を与えている：

$S(\alpha_1, \beta_1) \cap S(\alpha_2, \beta_2) = \phi \iff \exists (x, y) \in N^2$ によって

$x/\alpha_1 + y/\alpha_2 = 1$ と $x(\beta_1/\alpha_1) + y(\beta_2/\alpha_2) \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$.

これと比べると、我々の結果はいくつかの奇妙な点をもっている。例えば $a=1$ の場合は similar result といえなくもない。しかし $a>1$ のときの a の役割、又 Skolem の場合は x, y は unique に決まる。それに反して、定理2 での (x_i, y_i) の役割は一寸奇妙である。(特に $y_1 = u_1 - y_0$ であることに注意せよ。) つまりこれらのことは、§1 で述べた様に $\alpha_i \in \mathbb{Q}$ の時に situation がこみいってくることの証左であるともいえよう。

ついでに、残った場合、$\alpha_i \notin \mathbb{Q}$, $\alpha_1/\alpha_2 \in \mathbb{Q}$ の場合の disjointness criterion を与えておこう：

$\mu \in \mathbb{Q}$ を $m_1\alpha_1 = m_2\alpha_2 = m_1 m_2 \mu$　$m_i \in \mathbb{N}$　$(m_1, m_2) = 1$ で定義する。このとき

$$S(\alpha_1, \beta_1) \cap S(\alpha_2, \beta_2) = \phi \Longleftrightarrow \mu \| (\beta_2 - \beta_1)/\mu \| \geq 1.$$

但し $\|x\|$ は x とそれに最も近い整数との距離である。

この結果は[4]を書いた時点では既知と思っていたのだが、そうではないらしい。証明の方法は[4]で使ったものと同様で、ずっと簡単に片づく。しかし結論は既述の二つの場合のいずれとも異なった色合いをもっている。

4. ECFの構造の話にもどって、まずいくつかの注意をする。ECF $\{S(q_i, a_i, b_i)\}$ の各元で $(q_i, a_i) = 1$ にとる代りに、$Q = \mathrm{L.C.M}\ q_i$ をとって、$\{S(Q, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k\}$ の形の方がとり扱い易い。この Q を、ECF の size という。又 a_i を modulus, b_i を residue とよぶ。

residue は mod Q で考えればよいのだが、更に、各 sequence を平行移動したものを同一視しておいた方が良いので、次の定義を導入する。

定義4. size 及び moduli の等しい二つの ECF $\{S(Q, a_i, b_i)\}$ と $\{S(Q, a_i, c_i)\}$ $1 \leq i \leq k$ が equivalent

であるとは、$\exists T \in Z_k$ によって、$c_i = Ta_i + b_i \pmod{Q}$ が $1 \leqq i \leqq k$ について成り立つときをいう。

ところで、ECFの構造というとき（相互に関連した）二つの問題に分れる。

A. 適当にresiduesをとれば、ECFになり得る Q, a_i のcriterionを得ること。

B. possible residues の組を（equivalenceを除いて）list upすること。

これらの問題について、§3のcriterionを使って、比較的簡単なECFについて調べたのが[5]である。例えば、

(イ) $k=3$ であるECFは、次のいづれかと同値である。
（$S(Q, a, b)$ を単に $(a; b)$ で示す。）

(i) $Q = 2(A+B)$, $(2A; -1) \cup (B; 0) \cup (B; Q/2)$,

(ii) $Q = A+2B$, A: odd $(A\ -1) \cup (B; 0) \cup (B; (Q-1)/2)$,

(iii) $Q = 3$, $(1; 0) \cup (1; 1) \cup (1; 2)$,

(iv) $Q = 7$, $(4; 0) \cup (2; 5) \cup (1; 4)$.

注意：(iv) が Fraenkel の予想で生じてきたものである。

又 $k=2$ の場合は、全て $Q = A+B$, $(A; 0) \cup (B; -1)$ と同値であることは、Fraenkel によって given [2]。又は、

§3 の結果より容易に分る。

(ロ) $a \in \mathbb{N}$ について、$Q = a^w - 1$, moduli として a^{w-1}, a^{w-2}, $\dots$, a, 1 を $a-1$ 個ずつ重複してとったものについて、ECF が存在する。例えば、a^{w-1} の residues を ta^{w-1} $(0 \leqq t \leqq a-2)$, a^i $(0 \leqq i \leqq w-2)$ の residues を $ua^{w-1} + a^i(a-1) - 1$ $(1 \leqq u \leqq a-1)$ にとればよい。そして $w \geqq 3$ のときは、この residue set が unique である。($w=2$, $a \geqq 3$ ではそうではない。)

(ハ) 更に次の予想を得た:

もし $(Q, a_i) = 1$ $1 \leqq i \leqq k$ ならば residues の和 $\equiv -k/2$ $(\mathrm{mod}\ Q)$.

5. ところが、複雑な ECF を調べるには、§3 の criterion だけでは k が少し大きくなると手におえない。従って、別の (Global な) ECF の為の criterion が望ましい [6].

それについて以下に述べるが、まずそれ自身興味あると思われる一つの命題からはじめよう。

命題 1. $q, a \in \mathbb{N}$, $(q, a) = 1$ とするとき

$$S(q, a, b) = \{ z : az \equiv b-j \pmod q,\ 0 \leq j \leq a-1 \}.$$

これにより、次の定義をする。

定義5. $(q, a) = 1$ に対して、$\hat{a}$ を $a\hat{a} \equiv 1 \pmod q$ の最小正整数とする。$V(q, a, b) \underset{\text{def}}{=} \{ \hat{a}(b-j) : 0 \leq j \leq a-1 \}$.

又 $(q, a) = d > 1$ のときは、$q = dq'$　$a = da'$ として

$$V(q, a, b) \underset{\text{def}}{=} \bigcup_{0 \leq j \leq d-1} V(q', a', [b/d] + jq')$$

このとき、次の criterion (#) を得る。

(#). $\{ S(Q, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k \}$ が ECF

$\Longleftrightarrow$ $\{ cV(Q, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k \}$ が mod Q の完全剰余系をなす。ここで c は $(c, Q) = 1$ である数を一つ固定したもの。

いくつか注意を述べておく。

(a) c は勿論 1 にとってよい。しかし (#) を適用するとき、適当な c をとることが議論を簡明にすることが多い。

(b) (#) は ECF と ECS との類似性を示している。つまり、$V(Q, a_i, b_i)$ は公差 $-\hat{a}_i$ 初項 $\hat{a}_i b_i$ 項数 a_i の算術級数であり、これが mod Q の cover になっているのが ECF で

ある。

(c) (#) によって、§4 に述べた予想は容易に肯定される [6].

(d) 命題1を出発点にして、$S(q_i, n_i, b_i)$ $i=1,2$ の disjoint の条件を示すことができる。その方が [4] で示した証明よりやや短い。しかしそれは $b_i \notin \mathbb{Q}$ には使えない。つまり一長一短である。

6. 論文 [6] の内容に入る前に、我々の理論構成の基本方針について説明しておく。上述の様に、又 Graham の結果でも分る様に、ECF の裏には ECS が形影相伴っている。従って、我々は次の概念構成を行う。

定義 6. ECF が standard な ECF である（SECF という）とは、$\mathbb{Z}[E]$、又は $S_1[E_1] \cup S_2[E_2]$ のときをいう。（夫々タイプ I, II という。）但し、ここで $\{S_1, S_2\}$ は ECF、E, E_1, E_2 は ECS、又 $\mathbb{Z}$ は時には $S(1,1,0)$ と考える。

この定義を援用すれば、Graham の結果は、$b_i \notin \mathbb{Q}$ である ECF は SECF of type II になるということである。ところが我々の場合は、そうはいかない。その代りに

"任意の ECF の近くには必ず SECF がある"

という類の命題を確立しようというのが、我々の目論見である。勿論、ここでessentialなのは"近く"の定義である。それについて、定案がある訳ではない。しかし今迄の考察からいうと、近くというのに、二つの種類がある。つまり、

(1) "moduli setが近い"というのはSECFのmoduliから、いくつかを除いたという意味。

(2) "residue setが近い"というのは、SECFのresiduesの周りを揺れ動くという意味。

このlineに沿って、(6)では、いくつかの結果を示した。

(例) タイプIのSECF（これは本質的にはECSである）の近くにあるECFとして：

ECS $E=\{(r_i, m_i) ; 1\leq i\leq s\}$ をとる。但し $-m_i+1 \leqq r_i \leqq 0$ にとっておく。又 $\|E\| \underset{def}{=}$ L.C.M. m_i とする。次の条件(*)が満たされているとする。

(*) ある $g\in \mathbb{N}$, $(g, \|E\|)=1$ について、Eの対の中に g コの $(r, \|E\|)$ で、$-g+1 \leqq r \leqq 0$ が入っている。

このとき $Q=\|E\|-g$, $a_i m_i=\|E\|$, $g b_i \equiv a_i r_i \pmod{Q}$ で Q, a_i, b_i を順次定義していく。但し i は(*)にでてくる g 対のpairは除いたものを渡らせる。

このとき $\{S(Q, a_i, b_i)\}$ はECFになる。

注意. 条件(ホ) は $g=1$ の時は, 非常に起り易い。一つ $(k, k \in I)$ という対があれば, 調節して $k=0$ にもってくればよい。

(ロ) residue が SECF の周りで動く例として:

$Q=a^W+1$, moduli として, a^i $(1 \leqq i \leqq W-1)$ を $a-1$ 個ずつと, 1 を $a+1$ 個とる。このときの possible residue set を list up することを考える。

まず注意すべきことは, その様な SECF が存在することである。今 $S_1=S(Q, a^W, 0)$, $S_2=S(Q, 1, 0)$ にとって, E_1 を free

$$a \to p, \quad a \to \underbrace{1, \ \ldots, \ 1}_{a-1 \text{個}}$$

に p-process を $W-2$ 回行ったものに対応する NECS として $S_1[E_1] \cup S_2$ を考えればよい。(ECS と tree との関係, 又 p-process の詳細は [8] を参照されたい。又は 1983年11月 山形大のシンポジウムの報告にも, 概要が出ている。)

結論は, $W=2$ と $W \geqq 3$ で分れる。

$W=2$ のときは, $a-1$ 個の moduli a について residues を決めれば, 1 の residues は自動的に決まるから, a の residue を b_i $1 \leqq i \leqq a-1$ とする。$b_1=0$ に決めておく。

このとき, $0=b_1<b_2<\cdots<b_{a-1} \leqq a^2-a+1$.

で，各 $b_{i+1}-b_i \geq a$ であるようにとればいいこと，又同値を考えに入れれば，これらが全てであることがいえる。つまり，その種類は，a: even のとき $(2a-1)!/(a+1)!(a-1)!$

$a=2A+1$ のときは，$(2a-1)!/(a+1)!(a-1)! + (2A-1)!/(A+1)!(A-1)!$。

$w \geq 3$ のときは，a^{w-1} の residue から順に a^{w-2}, . . . と決めていく。詳細は[6]に譲るけれども，$a^{w-1}+(a-3)a/2$ 種の同値でないものが出てくる。又この中，$a^{w-1}+1$ 個は SECF である。

この結果は，例えば $w=2$ と $w \geq 3$ で事情が変化することや，上の SECF を除いた $(a-1)(a-2)/2$ 個（これは SECF でないと思われる。）は w には relate していない点などで，p-process は ECF の理論に於いてそれなりの役割を果すことを示唆しているかの如くである。

(A) ECF がある条件の下では（これはかなり制限的な条件であるが），SECF に限ること；

$(Q, a_i)=1$, $1 \leq i \leq k$, 且つ $3a_1 > 2Q$ とする。このとき ECF $\{S(Q, a_i, b_i) : 1 \leq i \leq k\}$ が存在すれば，それは $S(Q, a_1, -1) \cup S[E]$ と同値である。

7. この§では，今とり扱いつつある問題の中で，結論が得られているものについて述べよう。

(11) [7] では次の問題をとり扱っている。

$Q = a_1v_1 + a_2v_2$, $(Q, a_i) = (a_1, a_2) = 1$ とする。

このとき moduli として、a_1 を v_1 個 a_2 を v_2 個もつ様な SECF が存在することは容易に分る。この residue set を list up すること。

この場合 一方の例えば v_2 個の a_2 について residues を与えれば、a_1 の方は自動的に決まる。ところで、この v_2 個の residues は次の様に与えられるものと常に同値である。

いま、v_2 個の整数を $0 \leqq c_0 \leqq c_1 \leqq \cdots \leqq c_{v_2-1} \leqq v_1-1$ にとって、$n(l, m) \underset{def}{=} [(c_l + mv_1)/a_2]$ $0 \leqq l \leqq v_2-1$, $0 \leqq m \leqq a_2-1$ とおく。又 t を $a_1t \equiv a_2 \pmod{Q}$ の整数を一つとっておく。

ここで $\{-lt + mv_1 - n(l, m)a_2 : 0 \leqq m \leqq a_2-1\}$ を考えると、これは、相つづく長さ a_2 の整数である。この中の一番大きな数、これを $0 \leqq l \leqq v_2-1$ についてとっていったものが求める residue set である。難しいのは、そして眼目なのは、そういうものに限る方であるが、詳細は [7] 参照。

例えば、$(v_1, v_2) = 1$ のとき、同値でないものは $(v_1+v_2-1)!/v_1!v_2!$ 個出て来る。

(12) [4] の延長上にある問題として、$S(q_i, a_i, b_i)$ $i = 1, 2, 3$ が disjoint である為の criterion を探すことが考えられるが、

これについては、今のところ、$q = q_1 = q_2 = q_3$ & q と a_1 a_2, a_3 はどの二つも互いに素という条件の下でしか分っていない。又 possible residues を list up するということもやっていない。

結果は次の様である。二つづつが disjoint ということから

$$\begin{cases} x_1 a_1 + y_1 a_2 = q \\ x_2 a_2 + y_2 a_3 = q \\ x_3 a_3 + y_3 a_1 = q \end{cases} \quad (x_i, y_i) \in N^2$$

が存在する。

こゝで、各 y_i を最小正にとっておく。ところで、上の relation から $(a_i, a_j) = 1$ に注意すると、$\exists f \in N$ によって、$qf = x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3$ に出来ることが分る。

定理3. 上述の situation において、どの様に residue をとっても、三つが disjoint には出来ない。

$\Longleftrightarrow$ $f = 1$ & $x_1 \leqq a_2$, $x_2 \leqq a_3$, $x_3 \leqq a_1$

又は、$q = a_1 + a_2 a_3$ $a_1 > a_2, a_3$.

つまり $f = 1$ の時は、二つの場合があるのだが、それらの数値例を与えておく。$q = 2536$ $a_1 = 101$ $a_2 = 117$ $a_3 = 203$ は disjoint に出来ない例，又 $q = 265$ $a_1 = 19$ $a_2 = 9$ $a_3 = 34$ は disjoint に出来る。

この様な結果を (a_i, a_j) が公約数をもつとき、又は4つ以上の sequences についても得ることが望ましいのであるが、上の f の様な適当な不変量が見つからないせいであって、取り扱えないでいる。

8. 今迄に述べて来たことは、全て証明抜きにせざるを得なかった。そして、それぞれの場合に少しづつ工夫が必要なのであるが、中でも basic なことを二、三注意して、読者の理解の一助にしたい。

$(q, a) = 1$ のとき $S(q, a, b)$ の value は mod q の剰余類の合併であるから、我々は $\mathbb{Z}$ の代りに、

$\mathbb{Z} \ni z \longrightarrow \exp(2\pi i z/q) \in \mathbb{C}$ に写してとり扱う。

この q 個の点から成る円を $C(q)$ と書く。又この円周上の一つづきの点を segment とよぶ。

この時、$S(q, a, b)$ の value は $a\hat{a} \equiv 1 \pmod{q}$ である $\hat{a}$ によって、長さ a の segment $b, b-1, \cdots, b-a+1$ を $\hat{a}$ 倍したものの属する類になっている。

ところが、こういうものを $S(q_i, a_i, b_i)$ について考えていっても相互関係は混み入って、中々分り難い。特に mod q で割り返すところが面倒である。ここでよく使うのは、、

(1) 適当な c を全体にかけて，$c\hat{a}_i \pmod q$ が比較的小さい数で，これをかけても mod q で折り返さないでよい様にする。例えば §4, §6 に出て来た moduli $a^{w-1}, a^{w-2}, \ldots, 1$ の場合は $c=a^{w-1}$ にとるのがよい。

(2) 二種の modulus a_1, a_2 が出て来るとき，夫々を $\hat{a}_i$ 倍するより，(symmetry を断念して) 一方を $a_2\hat{a}_1$ 倍，他方は長さ a_2 の segment のままでおこう。

この場合，もっとも基本的なことは，[4] Lemma 2 で示した事実である。

(I) $(a_1, a_2)=1$ のとき，$a_1 t \equiv a_2 \pmod q$ なる t によって，$C(q)$ 上の長さ a_1 の segment を t 倍すると，それは $C(q)$ 上で，距離が x_0+a_2，x_0 の二種，長いのが y_0 個，短い方が y_1 個，但しこの x_0, y_0, y_1 が定理1，2 に出て来たものである。

(II) $(a_1, a_2)=a$ のときは，$a_2=au_2$ とすると，一つの block が $\underbrace{\overset{\text{差が } u_2}{\circ \quad \circ} \quad \circ \cdots \circ}_{a\text{個}}$ のそれが u_1 個出てきて

これの $C(q)$ 上の分布について，(I) と同様のことが出て来る。

これらが，一見奇妙な定理1，2 の理由である。　以上

参考文献

[1] P. Erdös – R.L. Graham : Old & new problems and results in combinatorial number theory. Geneve. 1980.

[2] A. S. Fraenkel : The bracket function and complementary set of integers. Canad. J. Math. 21 (1969) 6–27.

(3) R. L Graham : Covering the positive integers by disjoint sets of the form $\{[n\alpha+\beta] : n = 1, 2, \dots\}$. J. Combi. Th. Ser. A 15 (1973) 354 – 358.

[4]. R. Morikawa : Disjointness of sequences $[\alpha_i n+\beta_i]$, $i=1, 2$. Proc. Japan Acad., 58 (1982) 269 – 271.

[5] — : On eventually covering families generated by the bracket function. Bull. Fac. Lib. Arts, Nagasaki Univ., (Natural Science) 23. (1982) 17–22.

(6) — : " II. ibid., 24 (1983) 1–9.

[7] — : " III. " ., to appear in vol 25.

(8) — : On a method to construct covering sets. ibid., 22 (1981), 1–11.