数理解析研究所講究録
第522巻 1984年 240-250

線形セル構造オートマトンのイデアル論的アプローチ II

東洋大学工学部 情報工学科
佐藤 忠一

1. まえがき

2次元以上のセル構造オートマトンについて、その性質はほとんど知られていないが、局所関数が線形である線形セル構造オートマトンについては、その局所関数の多項式表現が存在するために容易に調べることができ、線形局所関数の単射性、全射性、位数有限性及び位数無限性の判定条件が知られている。[7]

ここでは、セルの取り得る状態集合として、有限可換環Rの剰環R／Iを考え（IはRのイデアル）、R上の線形局所関数の単射性、全射性等の問題が根基を持たない環、即ち、半単純環（Semi-simple Ring）上の問題に帰着できることを示す。また単射である線形局所関数の群に関する"同型定理"及び、逆写像を求めるアルゴリズムと深い関係がある群構造を持つ線形局所関数の性質を明らかにし、位数有限、位数無

限の線形局所関数との関係について考察する。

2 準備

R上の線形セル構造オートマトンは（Z^k, R, N, f）で与えられ、Zは整数の集合、Z^k はk次元セル空間、Rは各セルが取り得る状態の集合で有限可換環、Nは Z^k の有限部分集合で、$N=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$。Nは近傍を表す。fは、$R^n \to R$ なる線形写像で $f=\sum_j a_j x_j$ である。fはスコープ巾nの線形局所関数と呼ばれる。Z^k からRへの写像を様相という。様相の集合をCで表す。fに対して、写像 $f_\infty : C \to C$ を次のように定める。$x, y \in C$ に対して、

$$f_\infty(x) = y \Leftrightarrow y(r) = \sum_{j=1}^{n} a_j x(r+v_j)$$

ここで、$r+v_1, \cdots, r+v_n$ なるn個のセルは、セル $r \in Z^k$ の近傍と呼ばれる。f_∞ を線形並列写像又は線形全域関数と言う。

定義 1.
f が単射 ⇔ f_∞ が単射
f が全射 ⇔ f_∞ が全射
f_∞ が位数有限 ⇔ $\exists n>0,\ f_\infty^n = I$（Iは恒等写像）
f_∞ が位数無限 ⇔ f_∞ は単射かつ $\forall n,\ f_\infty^n \neq I$
f が位数有限 ⇔ $\exists$ 近傍N, f_∞ が位数有限
f が位数無限 ⇔ $\forall$ 近傍N, f_∞ が位数無限

定義2　A_iを極大イデアルとし、A_iによって生成されるべき等イデアルをB_iとする。すなわち

$A_i \supsetneqq A_i^2 \supsetneqq \cdots \supsetneqq A_i^s = A_i^{s+1}$ の時、A_i^sをB_iとする。この時、$f = \sum_j a_j X_j$ に対して$\{1, 2, \cdots, \ell\}$の部分集合$\theta(a_j)$, $r(a_j)$を次のように定義する。

$\theta(a_j) = \{ i \mid a_j \notin A_i \}$, 又は単に$\theta_j$で表す。

$r(a_j) = \{ i \mid a_j \notin B_i \}$, 又は単に$r_j$で表す。

3. 線形局所関数の単射性、全射性

Rのすべての極大イデアルを$A_1, A_2, \cdots, A_\ell$とし、Rの根基をrad Rで表す。($\mathrm{rad}\, R = \bigcap_{i=1}^{\ell} A_i$), rad RはRのべき零元全体の集合で、商環R／rad Rは根基を持たない環、即ち、rad (R／rad R) = {0}となり半単純環である。また、R^*でRの正則元全体の集合を表す。

補題1　I_jをRのイデアルとする。この時、R上の線形局所関数fに対して、次の命題が成立する。

(1)　fはR／$\bigcap_j I_j$上で全射である。$\Leftrightarrow$ fはR／I_i上で全射であり、かつfはR／$\bigcap_{j \neq i} I_j$上で全射である。

(2)　$I_i \subseteq I_j$の時、fがR／I_i上で全射ならば、

fはR／I_j上で全射である。

定理1. R上の線形局所関数$f=\sum_{j=1}^{n}a_j X_j$に対して、次の各命題はすべて等価である。

（1） fはR上で全射である。

（2） fはR／I上で全射である。但し、$I \subseteq \mathrm{rad}\,R$。

（3） fはR／radR上で全射である。

（4） fはR／A_i上で全射であり、かつfはR／$\bigcap_{j\neq i}A_j$上で全射である。

（5） fは各iに対してR／A_i上で全射である。
（$i=1,2,\cdots,\ell$）。

（6） $\theta_1,\cdots,\theta_n$を$\bigcup_{j=1}^{n}\theta_j=\{1,2,\cdots,\ell\}$を満足する$\{1,2,\cdots,\ell\}$の部分集合とする時、

$$a_j \in \bigcap_{i\in\theta_j^c}A_i-\bigcup_{i\in\theta_j}A_i$$

但し、$\bigcap_{i\in\phi}A_i=R$とする。（ϕは空集合）

補題2 I_jをRのイデアルとする。この時、R上の線形局所関数fに対して、次の命題が成立する。

（1） fはR／$\bigcap_j I_j$上で単射である。$\Leftrightarrow$ fはR／I_i上で単射であり、かつfはR／$\bigcap_{j\neq i}I_j$上で単射である。

（2） $I_i \subseteq I_j$の時、fがR／I_i上で単射ならば、fはR／I_j上で単射である。

定理2　R上の線形局所関数 $f=\sum a_j X_j$ に対して、次の各命題はすべて等価である。

（1）　f はR上で単射である。

（2）　f は R/I 上で単射である。但し、$I\subseteq \mathrm{rad}\,R$。

（3）　f は $R/\mathrm{rad}\,R$ 上で単射である。

（4）　f は R/A_i 上で単射でありかつ f は $R/\bigcap_{j\neq i} A_j$ 上で単射である。

（5）　f は各 i に対して R/A_i 上で単射である。

（$i=1,2,\cdots,\ell$）

（6）　$\sum_j a_j\in R^*$ かつ $i\neq j$ ならば $a_i a_j\in \mathrm{rad}\,R$。

（7）　$\theta_1,\cdots,\theta_n$ を $\{1,2,\cdots,\ell\}$ の分割とする時、

$$a_j\in \bigcap_{i\in\theta_j{}^c} A_i-\bigcup_{i\in\theta_j} A_i$$

但し、$\bigcap_{i\in\phi} A_i=R$ とする。（ϕ は空集合）

定理3　R上の線形局所関数 f に対して、次の各命題はすべて等価である。

（1）　f はR上で位数有限である。

（2）　f は R/I 上で位数有限である。但し $I\subseteq \mathrm{rad}\,R$。

（3）　f は $R/\mathrm{rad}\,R$ 上で位数有限である。

（4）　f は単射であり、$R/\mathrm{rad}\,R$ 上で1スコープである。

定理4. R上の線形局所関数 f に対して、次の各命題はすべて等価である。

(1) f はR上で位数無限である。

(2) f は R/I 上で位数無限である。但し $I\subseteq \mathrm{rad}R$。

(3) f は $R/\mathrm{rad}R$ 上で位数無限である。

(4) f は単射であり、$R/\mathrm{rad}R$ 上で2スコープ以上である。

4. 線形局所関数の群

定義3. R上の線形局所関数 $f=\sum_{j=1}^{n}a_j x_j$ が群構造を持つとは、f が単射でかつ、次の演算 $*$ に関して f のべき乗の集合が群をなす時に言う。

$$f * f=\sum_j a_j^2 x_j$$

定理5. R上の線形局所関数 $f=\sum_{j=1}^{n}a_j x_j$ に対して、次の各命題はすべて等価である。

(1) f は群構造を持つ。

(2) f は全射であり、かつ $r(a_1),\cdots,r(a_n)$ は $\{1,2,\cdots,\ell\}$ の分割。

(3) f は単射であり、かつ任意の j に対して、

$$\theta(a_j)=r(a_j)$$

(4) $\sum_j a_j\in R^*$ かつ $i\neq j$ ならば $a_ia_j=0$

(5)　$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ を $\{1, \cdots, l\}$ の分割とする時、

$$a_j \in \bigcap_{i \in \gamma_j^c} B_i - \bigcup_{i \in \gamma_j} A_i$$

但し、$\bigcap_{i \in \phi} B_i = R$ とする。(ϕは空集合)

系1.　Rの極大イデアルの個数をlとする。この時、群構造を持つ線形局所関数のスコープ巾nは、$1 \leq n \leq l$である。

定義4.　群構造を持つR上の2つの線形局所関数、$f = \sum_j a_j x_j$ と $g = \sum_j b_j x_j$ が $f \sim g$ であるとは、次の2つの条件を満足する時に言う。

(1)　fとgのスコープ巾が等しい。

(2)　各jに対して、$\gamma(a_j) = \gamma(b_j)$。

明らかに関係"$\sim$"は同値関係である。fと同値な類を$G(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$又は単に$G(f)$で表す。

定理6.　$f, g \in G(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$に対して、$f = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, $g = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j$ とする。$f * g = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j x_j$ と定義する時、次の各命題が成立する。

(1)　$G(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$は演算$*$に関して群をなす。

(2)　$\{\gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ と $\{\gamma_1', \cdots, \gamma_n'\}$ をそれぞれ$\{1, \cdots, l\}$の分割とする時、$G(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$ と $G(\gamma_1', \cdots, \gamma_n')$ は同型である。従って、$G(\gamma_1, \cdots, \gamma_n)$を単に、$G_n$で表す。

定理7（同型定理）　Rの極大イデアルの個数をlとする。この時、

$$G_l \simeq G_{l-1} \simeq \cdots \simeq G_1 \simeq R^*$$

が成立する。従って群の元の個数はオイラー関数で与えられる。

$$|G_l| = |G_{l-1}| = \cdots = |G_1| = |R^*|$$
$$= |R| \prod_{i=1}^{l} \left(1 - \frac{1}{|R/A_i|}\right)$$

5.　群構造を持つ線形局所関数と位数

定理8.　R上の線形局所関数fに対して、次の各命題が成立する。

（1）　fはR上で単射である．⇔ fはR／rad R上で群構造を持つ。すなわち、fはR上で単射である。⇔ $\exists n>0$、f^nは群構造を持つ。

（2）　fが群構造を持つならば、fとf^{-1}のスコープ巾は等しい。

（3）　fが群構造を持ち、かつfが単位元ならば、

$$f = f^{-1}.$$

系2　fがR上で単射ならば、$\exists n>0$に対してf^nとf^{-n}のスコープ巾が等しい。

問1　系2は、非線形局所関数において成り立つか？
（位数有限の場合は明らかに成り立つ。）

注意1　文献[6]で、"$m=\prod_{i=1}^{l} p_i^{r_i}$ の時、Z_m 上の位数有限の線形局所関数

$$f = a_1x_1 + (a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)\prod_{i=1}^{l} p_i^{t_i}$$

の位数は a_1 の位数と $m/\prod_i p_i^{t_i}$ との最小公倍数である。" ことが知られているが、$m/\prod_i p_i^{t_i}$ は f が群構造に入る最小の周期であり、a_1 の位数は $a_1 \in Z_m^*$ が単位元になる最小の周期である。

定理9　$m=\prod_{i=1}^{l} p_i^{r_i}$ の時、Z_m 上の単射である線形局所関数を $f=\sum_j a_jx_j$ とする。f^n が群構造を持つ最小の正の整数 n は、次式で与えられる。

$$n = \prod_{i=1}^{l} p_i^{\,r_i - \min_j |a_j|_{p_i}}$$

但し、$|a_j|_{p_i}$ は、a_j を素因数分解した時の p_i の因子の指数で、$p_i \nmid a_j$ の時は $|a_j|_{p_i} = \infty$ とする。

4. あとがき

有限可換環上の線形局所関数の写像の性質は、より簡単な構造を持つ半単純環上において保存されるので、半単純環上の線形局所関数を考えれば十分である。

線形局所関数の群に関する同型定理の原形は増田［１］による。彼はZm上の線形局所関数の群について考察した。斉藤［２］は群環Zm［G］上において同様な考察をし、村田［３］，古川［４］らは群環Zm［G］の極大イデアル，ベキ等イデアルを求め、北［５］は群環Zm［G］上の群構造を持つ線形局所関数の係数をこれらのイデアルで表した。本報告はこれらの結果の有限可換環上への一般化である。

5. 参考文献

［1］ 増田 文 "局所関数の群論的研究"
東洋大学卒業論文 1979年3月

［2］ 斉藤 晃 "局所関数の群論的研究"
東洋大学卒業論文 1980年3月

［3］ 村田 徹 "局所関数のイデアル論的研究"
東洋大学卒業論文 1980年3月

［4］ 古川 慎治 "局所関数のイデアル論的研究"
東洋大学卒業論文 1981年3月

［5］ 北 恭一郎 "線形局所関数の群論的研究"
東洋大学卒業論文 1981年3月

［6］ 佐藤 忠一 "線型局所関数の単射性"
東洋大学工学部研究報告 1980年

〔7〕 佐藤 忠一 "線形セル構造オートマトンの
イデアル論的アプローチ"
京都大学数理解析研究所講究録 458
1982年