数理解析研究所講究録
第526巻 1984年 86-95

多重比較におけるMultiple Range Methodについて

農業技術研究所　三輪哲久

§1. はじめに

実験データに対して，通常，分散分析により処理効果の有意性の検定が行なわれる。しかし，我々は，F検定による有意差ありとの結論で満足できるわけではなく，さらに，その有意性の原因をさぐる必要がある。ここでは，そのための，処理平均の比較の問題を考える。1つは標準処理との比較の問題であり，もう1つは対比較の問題である。

標準処理との比較についてはDunnettの方法，対比較についてはTukey の方法がよく知られており，また実際にも使われている。しかし，両手法とも，処理の水準数が増え，従って比較の数が増えるにつれて，conservative になる。

検出力を高める方法として，いくつかのMultiple Range Testが提案されている。ここでは，Multiple Range Testの現状を紹介し，その問題点を指適する。

§2. 同時推測，多重決定方式，Multiple Range Test

本節では，多重決定方式とMultiple Range Testとの関係を述べる。

同時推測（simultaneous inference）とは，標本観測値に基づいて，母集団（パラメトリックな場合は，母数）に関する複数の命題を述べることである。その評価基準としてはいくつか考えられるが（たとえばMiller［1］参照），ここでは，どれか1つの命題でも誤ってしまう確率をα以下におさえることにする。このことは，次の多重決定の方式［2］を用いて実現することができる。

Xを確率変数，$\mathscr{X}$を標本空間とする。$\Omega=\{\theta\}$を母数空間とし，$\mathcal{S}=\{\omega\}$（$\omega\subset\Omega$）をΩの部分集合の1つの族とする。標本点$x\in\mathscr{X}$に対して，$\mathcal{S}$の元ωを対応させる写像関数φ：$\mathscr{X}\to\mathcal{S}$ を多重決定方式とよぶ。

定理1. $\mathcal{S}'\subset\mathcal{S}$。$\bigcup_{\omega'\in\mathcal{S}'}\omega'\in\mathcal{S}$とする。また，$H:\theta\in\omega'$に対する水準$\alpha$の検定関数を$\phi_{\omega'}(x)$とする。

$$\varphi(x)=\bigcup\omega':\omega'\in\mathcal{S}',\ \phi_{\omega'}(x)=0 \qquad (1)$$

とすれば，$\theta\in\omega'\in\mathcal{S}'$ に対しては

$$\Pr[\ \varphi(X)\ni\theta\mid\theta]\geqq 1-\alpha\ 。\qquad (2)$$

定理2. $\mathcal{S}\ni\Omega$とする。$\varphi_0(x)$を信頼率$1-\alpha$の同時信頼域とし，

$$\varphi(x) = \omega : \ \omega \supset \varphi_0(x), \ \omega \in S \qquad (3)$$

とすれば，$\theta \in \Omega$に対して

$$\Pr[\ \varphi(X) \ni \theta \mid \theta\ ] \geq 1-\alpha \ 。\qquad (4)$$

母数に関する命題は，その命題の表わす，母数空間の部分集合が$\varphi(x)$と共通部分をもたないとき棄却される。

定理1によると，検定をωごとに行なう事になり，これが後に示すようにMultiple Range Testに対応する。

§3、標準（control）との比較

まず例を考える[3]。8種の薬剤について，葉いもち病防除効果を調査した結果を第1表に示す。その分散分析表を，第2表に示す。薬剤間は高度に有意である。我々が知りたいのは，標準（無散布）に対して，防除効果のある（病斑面積率の小さくなる）薬剤はどれかという事である。

第1表　薬剤による葉いもち防除効果(病斑面積率)(%)

薬剤区	濃度 (ppm)	区 I	区 II	区 III	平均
A1	400	34.1	27.5	35.8	32.5
A2	200	58.0	51.8	61.0	56.9
A3	100	73.5	79.5	75.5	76.2
B1	1500	60.8	53.7	61.0	58.5
B2	750	75.8	70.5	71.0	72.4
B3	375	81.3	83.3	88.2	84.3
M1	水和剤	14.8	27.6	26.2	22.9
M2	粉剤	7.1	6.2	5.8	6.4
C	無散布	89.8	95.2	89.2	91.4

第２表　分散分析表

変動因	自由度	平方和	分散	F比
全体	26	20850.5		
薬剤	8	20551.2	2568.9	149.9**
ブロック	2	25.2	12.6	
誤差	16	274.2	17.1 = V_e	

(1) モデル

$$\begin{cases} y_0, y_1, \cdots, y_k \sim n.i.d.(\mu_i, \sigma^2) \\ \nu\hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu) \end{cases} \qquad (5)$$

y_0を標準に対する標本平均とする。各iについて，$\mu_i < \mu_0$といえるかどうかを知りたいことになる。

(2) Dunnettの方法[4]

これは，§２の定理２に基づくものである。$\mu_i - \mu_0$の片側同時信頼区間は

$$\mu_i - \mu_0 \leqq y_i - y_0 + \sqrt{2}\cdot\hat{\sigma}\cdot d'(k, \nu; \alpha) \qquad (6)$$

である。($d'(k,\nu;\alpha)$はDunnettが与えている。) これより，

$$y_i - y_0 < -\sqrt{2}\cdot\hat{\sigma}\cdot d'(k, \nu; \alpha) \qquad (7)$$

となる処理に対して，$\mu_i < \mu_0$と判定する。

(3) Multiple Range Test

§２の定理１におけるS'の要素として

$$H_{i_1,\cdots,i_p}: \mu_0 = \mu_{i_1} = \cdots = \mu_{i_p} \tag{8}$$

を考える（$p=1,\cdots,k$）。(8)に対する水準αの検定は

$$\min_{j=i_1,\cdots,i_p}\{y_j - y_0\} < -\sqrt{2}\cdot\hat{\sigma}\cdot d'(p,\nu;\alpha) \tag{9}$$

である。従って，「ある処理は，その処理を含むすべての組合せに対して，α水準のDunnettの検定で有意ならば，標準処理に対して有意差ありと判定する。」

判定手順は，まず$y_1,\cdots,y_k$を小さい順に並べて，$y_{(1)} \leqq \cdots \leqq y_{(k)}$とする。

$$\begin{aligned}
&y_{(1)} - y_0 < -\sqrt{2}\cdot\hat{\sigma}\cdot d'(k,\nu;\alpha) \Rightarrow \text{有意}\\
&y_{(2)} - y_0 < -\sqrt{2}\cdot\hat{\sigma}\cdot d'(k-1,\nu;\alpha) \Rightarrow \text{〃}\\
&\qquad\vdots\\
&y_{(k)} - y_0 < -\sqrt{2}\cdot\hat{\sigma}\cdot d'(1,\nu;\alpha) \Rightarrow \text{有意}
\end{aligned} \tag{10}$$

ただし，一旦有意でないと判定されると，それ以後の処理はすべて有意ではないと判定する。上の例に対しては

判定規準

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$d'(p,16;0.05)$	1.75	2.06	2.23	2.34	2.43	2.50	2.56	2.61
R_p	5.91	6.96	7.53	7.90	8.20	8.44	8.64	8.81

結果

TREATMENT	C	B3	A3	B2	B1	A2	A1	M1	M2
MEAN	91.4	84.3	76.2	72.4	58.5	56.9	32.5	22.9	6.4
DIFFERENCE ($m_0 - m_j$)		7.1	15.2	19.0	32.9	34.5	58.9	68.5	85.0

ただし　$R_p = \sqrt{2} \cdot \hat{\sigma} \cdot d'(p, 16; 0.05)$,
$\hat{\sigma} = \sqrt{V_e/3}$。

いずれも，標準より防除効果があるといえる。Dunnettの方法では，すべて $R_8 = 8.81$ と比較するので，B3 の薬剤は有意とはならない。

標準との比較の場合には，(8)式の仮説を考えておけば十分である。従って，上記のMultiple Range Testが使える。

両側検定も同様に行なうことができる。

§4. 対比較

もう一つの，良く行なわれる問題が対比較である。これは処理のあらゆるペアについて，差があるかどうか判定する問題である。

(1) モデル

$$\begin{cases} y_1, \cdots, y_k \sim n.i.d.(\mu_i, \sigma^2) \\ \nu \hat{\sigma}^2/\sigma^2 \sim \chi^2(\nu) \end{cases} \tag{11}$$

すべてのペアの差 $\mu_i - \mu_j$ を考える。

(2) Tukeyの方法[1]

§2 の定理2に対応するものである。$\mu_i - \mu_j$ の同時信頼

区間は

$$y_i - y_j - \hat{\sigma} \cdot q(k, \nu; \alpha) \leqq \mu_i - \mu_j \leqq y_i - y_j + \hat{\sigma} \cdot q(k, \nu; \alpha) \tag{12}$$

である。$q(k, \nu; \alpha)$ はスチューデント化された範囲のパーセント点である。これより

$$| y_i - y_j | > \hat{\sigma} \cdot q(k, \nu; \alpha) \tag{13}$$

のときに $\mu_i \neq \mu_j$ と判定する。

(3) Newman－Keulsの方法 [5], [6]

§2の定理1において，S'の要素として

$$H_{i_1, \cdots, i_p} : \mu_{i_1} = \cdots = \mu_{i_p} \tag{14}$$

を考える（$p = 2, \cdots, k$）。この仮説は

$$\max_{j, l = i_1, \cdots, i_p} | y_j - y_l | > \hat{\sigma} \cdot q(p, \nu; \alpha) \tag{15}$$

のときに棄却される。そこで，「2つの処理は，その2つの処理を含むすべての組合せに対して，α水準のTukeyの検定で有意ならば，有意差ありと判定する。」

Tukeyの方法より検出力は高くなる。しかし，(14)式以外の帰無仮説のもとでは誤りの確率はαより大きくなってしまう。たとえば $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3 = \mu_4$ のときに，$\mu_1 \neq \mu_2$ または $\mu_3 \neq \mu_4$ と判定してしまう確率はαより大きくなる。

(4) S'の拡張 [8]

添字の集合を $P=\{i_1, \cdots, i_p\}$ と表わす。H_P は次の帰無仮説（Ωの部分集合）を表わすものとする。

$$H_P \ : \ \mu_{i_1} = \cdots = \mu_{i_p} \quad . \qquad (16)$$

添字の分割を $P_1, \cdots, P_g$ ($P_i \cap P_j = \phi$) として，さらに次の帰無仮説を考える。

$$H_{P_1 \cdots P_g} \equiv H_{P_1} \cap H_{P_2} \cap \cdots \cap H_{P_g} \qquad (17)$$

S'として，すべての $H_{P_1 \cdots P_g}$ を考えれば良い。

(5) Ryan の方法 [7]

各 H_{P_i} を

$$1-(1-\alpha)^{p_i/k} \qquad (18)$$

の水準で検定する。p_i は P_i に含まれる添字の数。

修正Bonferroni の不等式より

$$\begin{aligned} P_r[\ \mathrm{Accept}(H_{P_1 \cdots P_g})] &\geq \prod P_r[\mathrm{Accept}(H_{P_i})] \\ &\geq (1-\alpha)^{\Sigma p_i/k} \geq 1-\alpha \end{aligned} \qquad (19)$$

が成りたつ。

(18) は k が大きくなると conservative である。

(6) Begun and Gabriel [8]

仮説 H_P に対しては，α の水準で検定を行なう。$H_{P_1 \cdots P_g}$

$(g \geqq 2)$ に対しては，Ryan の検定を行なう。

これによりRyan の方法より検出力が増す。

(7) すべての $H_{p_1 \cdots p_g}$ を水準 α で検定することにすれば，さらに検出力は増す。

$H_{p_1 \cdots p_g}$ に対する検定としては，次の2つが考えられる。

a) H_{p_i} を

$$1-(1-\alpha)^{p_i/\Sigma p_i} \tag{20}$$

の水準で検定し，H_{p_i} $(i=1, \cdots, g)$ のいずれかが有意ならば $H_{p_1 \cdots p_g}$ を棄却する。(18) に比べて $\sum_{i=1}^{g} p_i < k$ の場合 (20) の方が水準が高い。

b) 尤度比検定

$$\frac{\sum_{i=1}^{g}\sum_{j}^{p_i}(y_{ij}-\bar{y}_{i\cdot})^2/\nu_1}{\hat{\sigma}^2} > F(\nu_1, \nu; \alpha)$$

$$\nu_1 = \quad \Sigma p_i - g$$

ならば $H_{p_1 \cdots p_g}$ を棄却する。

参考文献

(1) Miller, R. G., Jr. (1966). Simultaneous Statistical Inference, New York: McGraw-Hill Book Co.

(2) 竹内啓.(1973). 数理統計学の方法的基礎,東洋経済.

(3) 松本和夫(1979). 薬剤試験成績における効果(処理平均値)の多重比較,植物防疫,33,170-175.

(4) Dunnett, C. W. (1955). "A multiple comparisons procedure for comparing several treatments with a control," J. A. S. A., 50, 1096-1121.

(5) Newman, D. (1939). "The distribution of the range in samples from a normal population, expressed in terms of an independent estimate of standard deviation, Biometrika, 31, 20-30.

(6) Keuls, M. (1952). "The use of the studentized range in connection with an analysis of variance, Euphytica, 1, 112-122.

(7) Ryan, T. A. (1959). "Multiple comparisons in psychological research," Psychological Bulletin, 56, 26-47.

(8) Begun, J. M. and K. R. Gabriel (1981). "Closure of the Newman-Keuls multiple comparisons procedure," J. A. S. A.,76, 241-245.